

УДК 539.375:534.1

© 1993 г. И.А. Зайцева, А.А. Золотарев

**О ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ  
В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ С ГРАНИЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ**

В отличие от подходов [1–3], рассматривающих волновые поля при ограниченных временах, развивается методика, позволяющая на основании принципа предельной амплитуды исследовать процесс распространения и установления волновых полей, генерируемых в слоистой идеально упругой среде с плоскопараллельными границами раздела гармоническими колебаниями берегов трещины с начального момента времени. Обсуждается вопрос необходимости учета всех компонент тензора напряжений вне трещины, но в ее плоскости.

Рассматривается задача возбуждения волновых полей в двухслойной упругой среде при воздействии гармонических напряжений с начального момента времени на берега полубесконечной трещины, расположенной в плоскости границы раздела сред

$$\mu_j \nabla^2 w_k^j + (\lambda_j + \mu_j) \theta^j_{,k} = \rho_j \partial^2 w_k^j / \partial t^2 \quad (1)$$

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2, \quad \theta^j = \partial w_n^j / \partial x_n$$

$$w^j = (w_1^j(x_1, x_2, t), w_2^j(x_1, x_2, t)) = (u^j, w^j)$$

$$|x_1| < \infty, \quad x_2 \in [-h_1, h_2], \quad x = (x_1, x_2) = (x, z)$$

$$\Omega = \{x > 0, z = 0\}$$

$$z = h_2, \quad \sigma_{22}^2 = 0, \quad \sigma_{12}^2 = 0$$

$$z = -h_1, \quad \sigma_{12}^1 = 0, \quad w_1 = 0$$

(2)

$$z = 0, \quad w^2 - w^1 = \begin{cases} 0, & x \in \Omega \\ \Delta w, & x \in \Omega \end{cases}, \quad u^2 - u^1 = \begin{cases} 0, & x \in \Omega \\ \Delta u, & x \in \Omega \end{cases}$$

$$\sigma_{22}^2 - \sigma_{22}^1 = \begin{cases} 0, & x \in \Omega \\ \Delta \sigma, & x \in \Omega \end{cases}, \quad \sigma_{12}^2 - \sigma_{12}^1 = \begin{cases} 0, & x \in \Omega \\ \Delta \tau, & x \in \Omega \end{cases}$$

$$t = 0, \quad u^j = w^j = 0, \quad \partial u^j / \partial t = \partial w^j / \partial t = 0 \quad (3)$$

Здесь  $x, z$  — декартова система координат с началом на плоскости раздела характерных свойств среды;  $\lambda_j, \mu_j$  — параметры Ламе и  $\rho_j$  — плотности нижнего ( $j = 1$ ) и верхнего ( $j = 2$ ) слоев,  $w^j, \sigma_{22}^j, \sigma_{12}^j$  — вектор смещений и компоненты тензора напряжений (нормальная и касательная) в  $j$ -м слое, связь которых определяется законом Гука,  $\Delta u, \Delta w, \Delta \sigma, \Delta \tau$  — скачки кинематических и динамических характеристик в плоскости разрыва ( $z = 0$ ). Известными в плоскости трещины ( $\Omega = \{x > 0, z = 0\}$ ) считаются напряжения  $\sigma_{22}^j, \sigma_{12}^j$ . Постановка задачи замыкается условием убывания возмущений на бесконечности.

При использовании интегральных преобразований Фурье и Лапласа исходная начально-краевая задача (1)–(3) в случае  $\Delta \sigma = 0, \Delta \tau = 0$  сводится к системе функциональных

уравнений типа Винера—Хопфа

$$K\Delta W^+ = S^+ + S^- - K_0(T^+ + T^-) \quad (4)$$

$$G\Delta U^+ - K\Delta W^+ = G_0(T^+ + T^-), \quad \alpha \in E, \quad \text{Re } s > s_1 \geq 0$$

где  $\alpha, s$  — параметры преобразований Фурье и Лапласа соответственно,  $E$  — общая полоса регулярности входящих в (4) функций, содержащая всю действительную ось  $\alpha$  за исключением, быть может, конечного числа точек,  $s_1$  — абсцисса сходимости преобразования Лапласа,  $S^+, T^+, \Delta W^+, \Delta U^+$  — образы Фурье—Лапласа функций  $\sigma_{22}, \sigma_{12}, \Delta w, \Delta u$  соответственно при  $\{x > 0, z = 0\}$ ,  $S^-, T^-$  — образы Фурье—Лапласа соответствующих функций при  $\{x < 0, z = 0\}$ .

Индексы плюс и минус здесь и далее обозначают регулярность функций в верхней ( $E \cup \{\alpha : \text{Im } \alpha > 0\}$ ) и нижней ( $E \cup \{\alpha : \text{Im } \alpha < 0\}$ ) полуплоскостях.

Функции Грина, входящие в систему функциональных уравнений (4), определяются различными комбинациями функций  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ):

$$K = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta_3}, \quad K_0 = \frac{\Delta_4}{\Delta_3}, \quad G = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta_4}, \quad G_0 = \frac{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_5}{\Delta_3 \Delta_4} \quad (5)$$

$$\Delta_1 = (\alpha^2 + \gamma_{1s}^2) \text{ch } \gamma_{1p} H_1 \text{sh } \gamma_{1s} H_1 - 4\alpha^2 \gamma_{1p} \gamma_{1s} \text{sh } \gamma_{1p} H_1 \text{ch } \gamma_{1s} H_1$$

$$\Delta_2 = 8\alpha^2 \gamma_{2p} \gamma_{2s} (\alpha^2 + \gamma_{2s}^2)^2 [\text{ch } \gamma_{2p} H_2 \text{ch } \gamma_{2s} H_2 - 1] - \\ - [16\alpha^4 \gamma_{2p}^2 \gamma_{2s}^2 + (\alpha^2 + \gamma_{2s}^2)^4] \text{sh } \gamma_{2p} H_2 \text{sh } \gamma_{2s} H_2$$

$$\Delta_3 = \mu_1 \Delta_1 T_1 - \mu_2 \Delta_2 F_1, \quad \Delta_4 = i\alpha(\mu_1 \Delta_1 T_2 - \mu_2 \Delta_2 F_2)$$

$$\Delta_5 = \mu_1^2 \Delta_1 (T_1 T_3 - \alpha^2 T_2^2) / \Delta_2 + \mu_2^2 \Delta_2 F + \mu_1 \mu_2 (2\alpha^2 T_2 F_2 - T_1 F_3 - T_3 F_1)$$

$$T_1 = \gamma_{2p} s^2 H^2 C_{2s}^{-2} ((\alpha^2 + \gamma_{2s}^2)^2 \text{ch } \gamma_{2p} H_2 \text{sh } \gamma_{2s} H_2 - 4\alpha^2 \gamma_{2p} \gamma_{2s} \text{sh } \gamma_{2p} H_2 \text{ch } \gamma_{2s} H_2)$$

$$T_2 = [(\alpha^2 + \gamma_{2s}^2)^3 + 8\alpha^2 \gamma_{2p}^2 \gamma_{2s}^2] \text{sh } \gamma_{2p} H_2 \text{sh } \gamma_{2s} H_2 -$$

$$- 2\gamma_{2p} \gamma_{2s} (\alpha^2 + \gamma_{2s}^2) (3\alpha^2 + \gamma_{2s}^2) [\text{ch } \gamma_{2p} H_2 \text{ch } \gamma_{2s} H_2 - 1] \quad (6)$$

$$T_3 = \gamma_{2s} s^2 H^2 C_{2s}^{-2} [(\alpha^2 + \gamma_{2s}^2)^2 \text{sh } \gamma_{2p} H_2 \text{ch } \gamma_{2s} H_2 - 4\alpha^2 \gamma_{2p} \gamma_{2s} \text{ch } \gamma_{2p} H_2 \text{sh } \gamma_{2s} H_2]$$

$$F_1 = \gamma_{1p} s^2 H^2 C_{1s}^{-2} \text{sh } \gamma_{1p} H_1 \text{sh } \gamma_{1s} H_1$$

$$F_2 = 2\gamma_{1p} \gamma_{1s} \text{sh } \gamma_{1p} H_1 \text{ch } \gamma_{1s} H_1 - (\alpha^2 + \gamma_{1s}^2) \text{ch } \gamma_{1p} H_1 \text{sh } \gamma_{1s} H_1$$

$$F_3 = \gamma_{1s} s^2 H^2 C_{1s}^{-2} \text{ch } \gamma_{1p} H_1 \text{ch } \gamma_{1s} H_1$$

$$F = \gamma_{1p} \gamma_{1s} \text{sh } \gamma_{1p} H_1 \text{ch } \gamma_{1s} H_1 - \alpha^2 \text{ch } \gamma_{1p} H_1 \text{sh } \gamma_{1s} H_1$$

$$\gamma_{jp}^2 = \alpha^2 + s^2 H^2 C_{jp}^{-2}, \quad C_{jp}^2 = (\lambda_j + 2\mu_j) / \rho_j$$

$$\gamma_{js}^2 = \alpha^2 + s^2 H^2 C_{js}^{-2}, \quad C_{js}^2 = \mu_j / \rho_j, \quad j = 1, 2$$

$$H = h_1 + h_2, \quad H_1 = h_1 / H, \quad H_2 = h_2 / H$$

В силу единственности решения исходной задачи указанные функции Грина (5) являются однозначными, аналитическими, четными по совокупности переменных функциями, не имеющими точек ветвления в комплексных плоскостях  $\alpha$  и  $s$ . При этом их асимптотическое поведение при фиксированном  $s$  и  $|\alpha| \rightarrow \infty$  следующее:  $K, G = O(|\alpha|)$ ,  $K_0, G_0 = O(1)$ .

Исследуем возможность факторизации функции  $K$  в виде произведения.  $K$  — мероморфная функция переменной  $\alpha$ , имеющая счетное множество нулей  $\alpha = \alpha_m^\pm(s)$  и полюсов  $\alpha = \eta_m^\pm(s)$  при  $s \in D = \{0 \leq \text{Re } s < \epsilon = \text{const}, -\infty < \text{Im } s < +\infty\}$ . Для определенности

будем считать, что индексы плюс либо минус для рассматриваемых особенностей означают в дальнейшем принадлежность верхней либо нижней полуплоскости соответственно.

Покажем, что такая систематизация возможна. Действительно, в силу четности  $K$  по совокупности переменных можно фиксировать ветви дисперсионных зависимостей таким образом, чтобы указанное разделение дисперсионных множеств выполнялось.

Известно, что при  $\text{Re } s = 0$  и  $\text{Im } s = -\omega < 0$  среди указанных множеств имеется конечное число действительных значений ( $\alpha = \eta_m^+(-i\omega)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $\omega > 0$ ) и счетное множество комплексных ( $\alpha = \eta_m^+(-i\omega)$ ,  $m \geq M + 1$ ,  $\omega > 0$ ). Из представления, справедливого в полосе  $D$ :

$$\eta_m^+(s) \sim \eta_m^+(-i\omega) + i(\partial \eta_m^+(-i\omega)/\partial \omega) \text{Res}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (7)$$

следует, что условие фиксации  $\eta_m^+(s)$  в верхней полуплоскости

$$C_m^{-1} = \partial \eta_m^+(-i\omega)/\partial \omega > 0, \quad -\infty < \omega < \infty \quad (8)$$

совпадает с естественным физическим требованием положительности групповой скорости  $C_m$  соответствующей моды. Очевидно, (8) соответствует выбору нечетной ветви дисперсионной зависимости, при этом из соотношения  $\eta_m^-(s) = -\eta_m^+(s)$  и (8) следует аналогичное (7) свойство принадлежности  $\eta_m^-$  нижней полуплоскости при  $m = 1, 2, \dots, M$ .

Далее, из принципа предельной амплитуды вытекает результат, аналогичный [4], но полученный на основе принципа предельного поглощения:  $\eta_m^\pm(s)$  ( $s \in D$ ,  $m \geq M + 1$ ) не переходят через действительную ось, а следовательно, фиксированы в верхней либо в нижней полуплоскости соответственно.

Рассмотренными выше свойствами обладает и дисперсионное множество нулей  $\alpha = \alpha_m^\pm(s)$ .

Таким образом, на основании теоремы Вейерштрасса имеет место представление для  $K$ , а также для вводимой функции  $L = \Delta_3/\Delta_5$  в виде бесконечных произведений, а следовательно, и их факторизация по  $\alpha$  в  $E$ :  $K = K^+K^-$ ,  $L = L^+L^-$ ,  $s \in D$ . Тогда, используя метод Винера–Хопфа, на основании обобщенной теоремы Лиувилля, образы функции нормальных и касательных напряжений в плоскости трещины вне ее представимы в виде

$$S^-(\alpha, s) = \frac{K^-(\alpha, s)}{s + i\omega} \sum_{n=1}^N \frac{(\alpha - \alpha_n^+)^{-1}}{[K^-(\alpha_n^+)]'} \{ -S^+(\alpha_n^+) + (T^+(\alpha_n^+) + T^-(\alpha_n^-)) \Delta_4(\alpha_n^+)/\Delta_3(\alpha_n^+) \} \quad (9)$$

$$T^-(\alpha, s) = -\frac{L^-(\alpha, s)}{s + i\omega} \sum_{m=1}^M \frac{(\alpha - \eta_m^+)^{-1}}{[L^-(\eta_m^+)]'} \{ T^+(\eta_m^+) + \Delta W^+(\eta_m^+) \Delta_4(\eta_m^+)/\Delta_5(\eta_m^+) \} \quad (10)$$

Здесь  $N$  — число вещественных нулей функции  $K$ , а коэффициенты  $\Delta W^+(\eta_m^+)$  определяются как решения системы линейных уравнений ( $\delta_{ml}$  — символ Кронекера)

$$A \Delta W = B, \quad \Delta W = \{ \Delta W^+(\eta_m^+) \}_{m=1}^M \quad (11)$$

$$A = \{ a_{ml} \}_{m,l=1}^M, \quad B = \{ b_m \}_{m=1}^M, \quad b_m = b_m^1 + b_m^2$$

$$a_{ml} = \delta_{ml} - \frac{\Delta_4(\eta_l^+)/\Delta_5(\eta_l^+)}{K^+(\eta_m^+)[L^+(\eta_l^-)]'} \sum_{k=1}^M \frac{\Delta_4(\eta_k^-)/\Delta_5(\eta_k^-)}{K^+(\eta_k^+)[L^+(\eta_k^-)]'} (\eta_m^+ + \eta_k^+)^{-1} (\eta_k^+ + \eta_l^+)^{-1}$$

$$b_m^1 = \frac{1}{K^+(\eta_m^+)} \sum_{n=1}^N \frac{S^+(\alpha_n^+)}{[K^+(\alpha_n^+)]'} (\eta_m^+ - \alpha_n^+)^{-1}$$

$$b_m^2 = -\frac{1}{K^+(\eta_m^+)} \sum_{k=1}^M \frac{\Delta_4(\eta_k^-)(\eta_m^+ + \eta_k^-)^{-1}}{\Delta_1(\eta_k^-)\Delta_2(\eta_k^-)} \left\{ T^+(\eta_k^-) - L^+(\eta_k^+) \sum_{i=1}^M \frac{T^+(\eta_i^+)}{[L^+(\eta_i^-)]'} (\eta_k^+ + \eta_i^+)^{-1} \right\}$$

Построение функции напряжений в плоскости трещины позволяет определить кинематические и динамические характеристики всего слоя. В частности, для смещений выводим

$$w^j(x, z, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} 1^{-i\alpha x} d\alpha \int_{S_0 - i\infty}^{S_0 + i\infty} W^j(\alpha, z, s) e^{st} ds$$

$$W^2(\alpha, z, s) = H(\mu_2 \Delta_2)^{-1} \{ (S^+ + S^-) \mathbf{R}_1(\alpha, z, s) + (T^+ + T^-) \mathbf{R}_2(\alpha, z, s) \} \quad (12)$$

$$\mathbf{R}_j(\alpha, z, s) = (R_{j1}(\alpha, z, s), R_{j2}(\alpha, z, s)), \quad j = 1, 2$$

$$R_{11}(\alpha, H_2, s) = R_{22}(\alpha, H_2, s) =$$

$$= -2i\alpha\gamma_{2p}\gamma_{2s}(\alpha^2 + \gamma_{2s}^2)s^2 H^2 C_{2s}^{-2} (\text{ch}\gamma_{2p}H_2 - \text{ch}\gamma_{2s}H_2)$$

$$R_{12}(\alpha, H_2, s) = \gamma_{2s}s^2 H^2 C_{2s}^{-2} ((\alpha^2 + \gamma_{2s}^2)^2 \text{sh}\gamma_{2p}H_2 - 4\alpha^2\gamma_{2p}\gamma_{2s}\text{sh}\gamma_{2s}H_2)$$

$$R_{21}(\alpha, H_2, s) = \gamma_{2p}s^2 H^2 C_{2s}^{-2} ((\alpha^2 + \gamma_{2s}^2)^2 \text{sh}\gamma_{2s}H_2 - 4\alpha^2\gamma_{2p}\gamma_{2s}\text{sh}\gamma_{2p}H_2)$$

Методику обращения интегралов (12) покажем для простоты на частном примере задачи с заданным на трещине разрывом нормальных напряжений, которая пренебрегает наличием касательных напряжений в плоскости трещины вне ее. В этом случае нормальные напряжения на границе раздела вне трещины могут быть определены из первого функционального уравнения (4) и решения (9)–(11) в образах Фурье–Лапласа как предельные значения при  $T^+, T^- = 0$

$$\sigma_{22}(x, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} d\alpha \int_{S_0 - i\infty}^{S_0 + i\infty} S^-(\alpha, s) e^{st} ds, \quad x < 0, z = 0 \quad (13)$$

$$S^-(\alpha, s) = -\frac{K^-(\alpha, s)}{s + i\omega} \sum_{n=1}^N \frac{S^+(\alpha_n^+)}{[K^-(\alpha_n^+)]'} (\alpha - \alpha_n^+)^{-1}$$

Особенностями подынтегрального выражения в комплексной плоскости  $s$  являются полюса, лежащие на мнимой оси симметрично относительно начала координат

$$s = -i\omega, \quad s = \sigma_m^+(\alpha), \quad \eta_m^+(\sigma_m^+(\alpha)) = \alpha$$

Обращение внутреннего интеграла осуществляется замыканием контура интегрирования в левую полуплоскость комплексного параметра  $s$  ( $\text{Re} s < 0$ ) с дальнейшим использованием леммы Жордана. Имеем

$$\sigma_{22}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^-(\alpha, t) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad x < 0, z = 0 \quad (14)$$

$$S^-(\alpha, t) = -K^-(\alpha, -i\omega) e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^N \frac{S^+(\alpha_n^+)}{[K^-(\alpha_n^+, -i\omega)]'} (\alpha - \alpha_n^+)^{-1} -$$

$$- \sum_{m=1}^M \frac{e^{\sigma_m^+(\alpha) t}}{(\sigma_m^+(\alpha) + i\omega)[K_-^{-1}(\alpha, \sigma_m^+(\alpha))]' } \sum_{n=1}^N \frac{S^+(\alpha_n^+)}{[K^-(\alpha_n^+, \sigma_m^+(\alpha))]' } (\alpha - \alpha_n^+)^{-1}$$

Из этого представления видно, что функция  $S^-(\alpha, t)$  не имеет особенностей на действительной оси  $\alpha$ . В тоже время каждое из слагаемых обладает одними и теми же полюсами, которые взаимно погашаются. Таким образом, для перехода к почленному интегрированию необходимо деформировать контур с действительной оси в комплексную плоскость вблизи этих особенностей. Подобную деформацию можно провести, используя принцип предельной амплитуды — убывания решения при  $t \rightarrow \infty$ , что соответствует смещению участков исходного контура интегрирования вблизи отрицательных полюсов в верхнюю полуплоскость  $\alpha$ , а вблизи положительных — в нижнюю. Аналогичная деформация контура получена в гармонических установившихся задачах на основании принципа предельного поглощения [4].

Вычисление интеграла от первой суммы в (14), определяющей установившийся вклад в решение, проводится при помощи теории вычетов, замыканием контура интегрирования в верхнюю полуплоскость для  $x < 0$ . Обращение же по Фурье второй суммы после почленного интегрирования выполняется при помощи контурного интегрирования и дальнейшего деформирования контуров в верхнюю или нижнюю полуплоскость вблизи полюсов этого интегрального выражения (14) при учете убывания функций экспоненциального типа на плоскости пространственно-временных параметров  $x$  и  $t$ . Это приводит к погашению установившегося вклада соответствующей  $m$ -й моды в области  $|x| > C_m t$ , где  $C_m$  — групповая скорость (8). Окончательно решение представляется в виде разложения по модам

$$\sigma_{22}(x, t) = e^{-i\omega t} \sum_{m=1}^M \frac{e^{i|x|\eta_m^+(-i\omega)}}{[K_+^{-1}(\eta_m^-)]'} \xi(|x|, C_m) \times \\ \times \sum_{n=1}^N \frac{S^+(\alpha_n^+)}{[K^+(\alpha_n^-)]'} (\eta_m^+ - \alpha_n^+)^{-1} + O(t^{-\nu}) \quad (15)$$

$$x < 0, z = 0, 1/3 \leq \nu \leq 1/2, \xi(|x|, C_m) = 1/2 \{ \text{sign}(C_m t - |x|) + 1 \}$$

Аналогично (13)–(15) получим и остальные представления решений в виде суммы решения задачи для заданных нормальных напряжений в области трещины (задача 1, индекс  $S$ ) и решения для заданных касательных напряжений в области разрыва (задача 2, индекс  $T$ ). Таким образом

$$w(x, z, t) = w^S(x, z, t) + w^T(x, z, t) \quad (16)$$

$$\sigma_{ij}(x, z, t) = \sigma_{ij}^S(x, z, t) + \sigma_{ij}^T(x, z, t), \quad i, j = 1, 2$$

В частности, для поля смещений поверхности среды и напряжений в плоскости трещины вне ее для задачи 1 имеем

$$w^S = w^{SS} + w^{ST}, \quad z = h_2 \quad (17)$$

$$x > 0$$

$$w^{SS}(x, h_2, t) = \frac{H}{\mu_2} e^{-i\omega t} \sum_{k=1}^{N_2} \frac{e^{ix\alpha_{k2}^+(-i\omega)}}{\Delta_2'(\alpha_{k2}^-)} \xi(x, v_{k2}) \times$$

$$\times R_1(\alpha_{k2}^-, H_2, -i\omega) \{ S^+(\alpha_{k2}^-) - K^+(\alpha_{k2}^+) \sum_{n=1}^N \frac{S^+(\alpha_n^+)}{[K^+(\alpha_n^-)]'} (\alpha_{k2}^+ + \alpha_n^+)^{-1} \}$$

$$w^{ST}(x, h_2, t) = \frac{H}{\mu_2} e^{-i\omega t} \sum_{k=1}^{N_2} \frac{e^{ix\alpha_{k2}^+(-i\omega)}}{\Delta_2'(\alpha_{k2}^-)} \xi(x, v_{k2}) \times$$

$$\times \{ -R_1(\alpha_{k2}^-, H_2, -i\omega) Q(\alpha_{k2}^-) + R_2(\alpha_{k2}^-, H_2, -i\omega) T^-(\alpha_{k2}^-) \}$$

$$x < 0$$

$$\begin{aligned}
w^{SS}(x, h_2, t) &= \frac{H}{\mu_2} e^{-i\omega t} \sum_{m=1}^M \frac{e^{i|x|\eta_m^+(-i\omega)} \mathbf{R}_1(\eta_m^+, H_2, -i\omega)}{[K_+^{-1}(\eta_m^-)]' \Delta_2(\eta_m^+)} \xi(|x|, C_m) \times \\
&\times \sum_{n=1}^N \frac{S^+(\alpha_n^+)}{[K^+(\alpha_n^-)]'} (\eta_m^+ - \alpha_n^+)^{-1} \\
w^{ST}(x, h_2, t) &= -\frac{H}{\mu_2} e^{-i\omega t} \left[ \sum_{k=1}^{N_2} \frac{e^{i|x|\alpha_{k2}^+(-i\omega)}}{\Delta_2'(\alpha_{k2}^+)} T^-(\alpha_{k2}^+) \xi(|x|, v_{k2}) \times \right. \\
&\times \{ \mathbf{R}_1(\alpha_{k2}^+, H_2, -i\omega) \Delta_4(\alpha_{k2}^+) / \Delta_3(\alpha_{k2}^+) + \mathbf{R}_2(\alpha_{k2}^+, H_2, -i\omega) \} - \\
&- \sum_{m=1}^I \frac{e^{i|x|\zeta_m^+(-i\omega)} \mathbf{R}_2(\zeta_m^+, H_2, -i\omega)}{[L_+^{-1}(\zeta_m^-)]' \Delta_2(\zeta_m^+)} \xi(|x|, d_m) P(\zeta_m^+) + \\
&+ \sum_{m=1}^M \frac{e^{i|x|\eta_m^+(-i\omega)} \mathbf{R}_1(\eta_m^+, H_2, -i\omega)}{[K_+^{-1}(\eta_m^-)]' \Delta_2(\eta_m^+)} \xi(|x|, C_m) Q(\eta_m^+) \left. \right] \\
\sigma_{22}^S &= \sigma_{22}^{SS} + \sigma_{22}^{ST}, \quad x < 0, z = 0 \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{22}^{SS}(x, t) = e^{-i\omega t} \sum_{m=1}^M \frac{e^{i|x|\eta_m^+(-i\omega)}}{[K_+^{-1}(\eta_m^-)]'} \xi(|x|, C_m) \sum_{n=1}^N \frac{S^+(\alpha_n^+)}{[K^+(\alpha_n^-)]'} (\eta_m^+ - \alpha_n^+)^{-1}$$

$$\sigma_{22}^{ST}(x, t) = e^{-i\omega t} \sum_{m=1}^M \frac{e^{i|x|\eta_m^+(-i\omega)}}{[K_+^{-1}(\eta_m^-)]'} \xi(|x|, C_m) Q(\eta_m^+)$$

$$\sigma_{12}^{ST}(x, t) = e^{-i\omega t} \sum_{k=1}^I \frac{e^{i|x|\zeta_k^+(-i\omega)}}{[L_+^{-1}(\zeta_k^-)]'} \xi(|x|, d_k) P(\zeta_k^+), \quad T^-(\alpha) = L^+(-\alpha)P(\alpha)$$

$$P(\alpha) = \sum_{m=1}^M \frac{\Delta W^+(\eta_m^+) \Delta_4(\eta_m^+) / \Delta_5(\eta_m^+)}{[L^+(\eta_m^-)]' (\alpha - \eta_m^+)}, \quad Q(\alpha) = \sum_{n=1}^N \frac{T^-(\alpha_n^+) \Delta_4(\alpha_n^+) / \Delta_3(\alpha_n^+)}{[K^+(\alpha_n^-)]' (\alpha - \alpha_n^+)}$$

Заметим, что функция  $\sigma_{22}^{SS}$  есть определенная в (15)  $\sigma_{22}(x, t)$ .

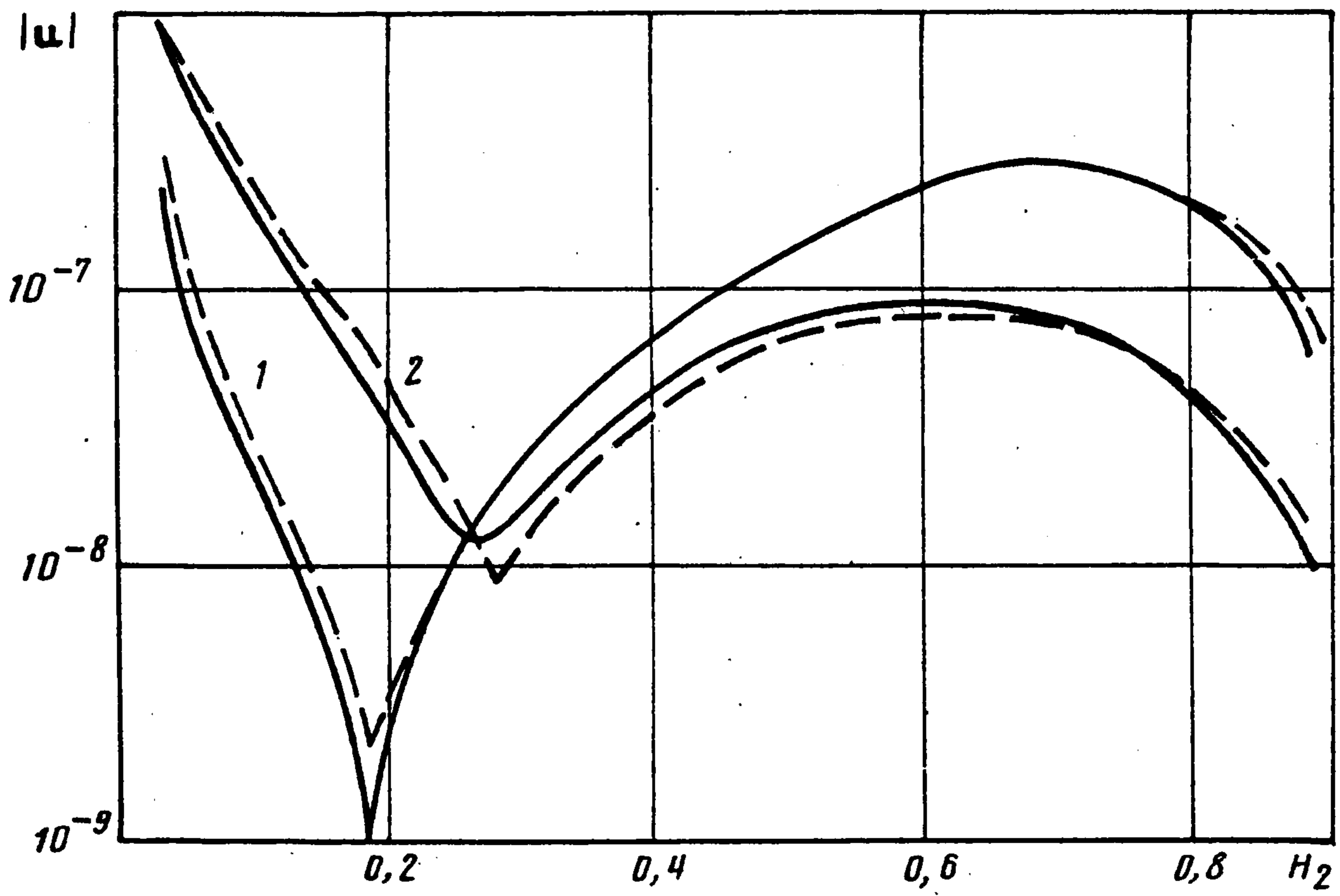
Аналогичные соотношения получаем для задачи 2.

Особенности  $\alpha = \zeta_m^\pm(-i\omega)$  соответствуют множеству нулей определенной в (6) функции  $\Delta_5$ . Множество особенностей  $\alpha = \alpha_n^\pm(-i\omega)$  представлено в виде  $\{\alpha_n^\pm(-i\omega)\} = \{\alpha_{n1}^\pm(-i\omega)\} \cup \{\alpha_{n2}^\pm(-i\omega)\}$ , где  $\alpha_{n1}^\pm, \alpha_{n2}^\pm$  соответствуют нулям функций  $\Delta_1, \Delta_2$ . Здесь же  $I, N_1, N_2 (N = N_1 + N_2)$  — число действительных значений  $\zeta_m^+, \alpha_{n1}^\pm, \alpha_{n2}^\pm$  соответственно при фиксированном  $\omega > 0$ , групповые скорости соответствующих мод вводятся аналогично (8) по формулам

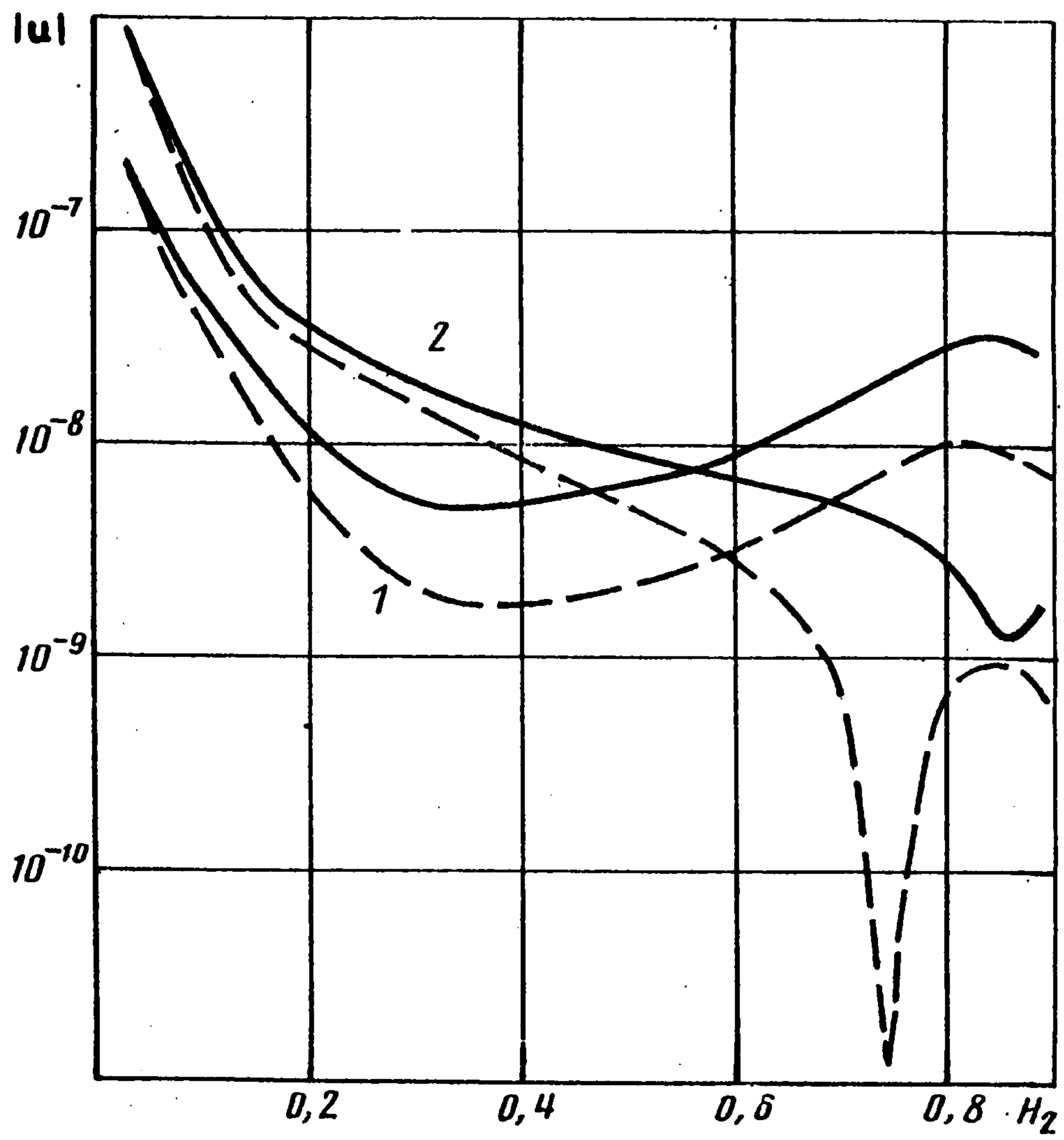
$$d_m^{-1} = \partial \zeta_m^+(-i\omega) / \partial \omega, \quad v_{mk}^{-1} = \partial \alpha_{mk}^+(-i\omega) / \partial \omega, \quad k = 1, 2$$

Коэффициенты  $\Delta W^+(\eta_m^+)$  определяются из системы (11), причем в качестве правой части для задачи 1 берется лишь первое слагаемое  $b_{m1}$ . Для задачи 2 аналогичные коэффициенты определяются из (11) с правой частью  $b_{m2}$ .

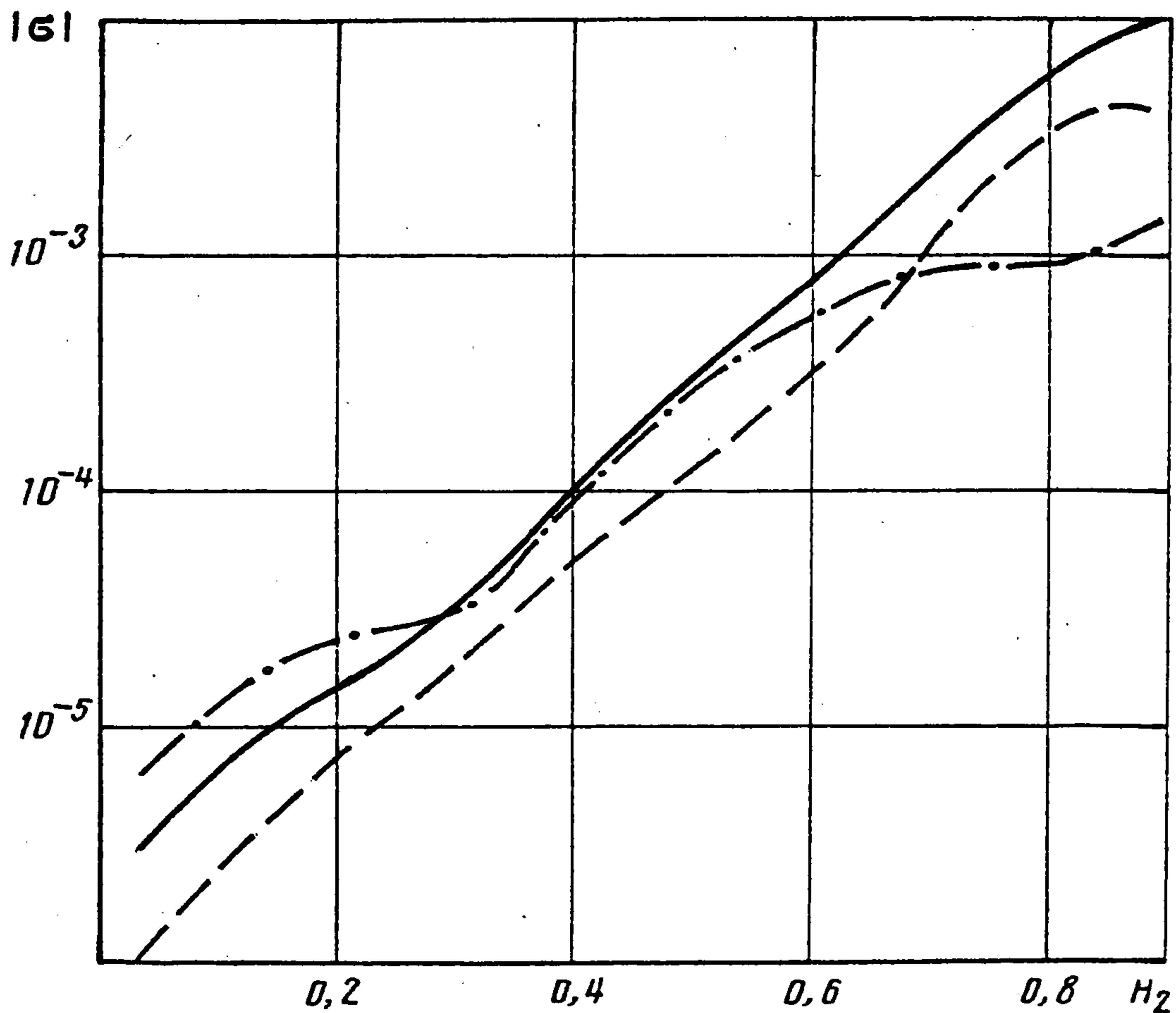
В решении задачи 1 первые слагаемые с индексом  $SS$  соответствуют решению в частном случае, не учитывающему касательные напряжения вне разрыва на его продолжении,



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

а в решении задачи 2 слагаемые с индексом ТТ — решению в частном случае, не учитывающем нормальные напряжения на продолжении разрыва.

На фиг. 1–3 приведены результаты расчетов амплитуд волновых полей в зависимости от заглубления трещины в задаче 1 при учете касательных напряжений на продолжении линии разрыва (сплошная линия) и без их учета (штриховая линия). Группы кривых 1 либо 2 соответствуют вертикальным либо касательным составляющим смещений свободной поверхности над разрывом (фиг. 1) и вне его (фиг. 2). На фиг. 3 приведены зависимости амплитудных функций нормальных напряжений, где штрихпунктирная линия соответствует функции касательных напряжений на продолжении разрыва.

Выбор функции возмущений осуществлен таким образом, чтобы ее образ Фурье не имел особенностей на действительной оси в плоскости комплексного параметра  $\alpha$ .

В расчетах использованы следующие значения параметров (в безразмерном виде):

$$\omega = 0,57; \quad x = 1,33; \quad t = 2,33; \quad C_{1p}/C_{1s} = 2,8571$$

$$C_{1p}/C_{2p} = 1,6; \quad C_{1p}/C_{2s} = 5,0; \quad \eta = 117 + i20$$

Численный анализ этого и других вариантов показывает, что неучет касательных напряжений на продолжении линии разрыва в задаче 1 и нормальных напряжений в задаче 2 не приводит к существенным изменениям поля смещений над разрывом, но вне этой области может оказать заметное влияние на смещения поверхности и на напряжения на продолжении разрыва.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Флитман Л.М. Волны, вызванные мгновенным разрывом сплошной упругой среды // ПММ, 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 618–628.
2. Костров Б.В. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1042–1049.
3. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
4. Ворovich И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.