

УДК 539.374

© 1993 г. Я.А. Каменярж, Е.В. Якушева

## О РАЗВИТИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ ВБЛИЗИ ОТВЕРСТИЯ

Рассматривается плоская упруго-пластическая задача (УПЗ) в случае, когда на части границы области нагрузка не изменяется. К этой части границы примыкает пластическая зона, поле напряжений в которой часто считается заранее известным. Тогда эта задача сводится к задаче сопряжения известного пластического поля напряжений с искомым упругим полем при условии непрерывности напряжений на искомом контуре сопряжения. Определяемое при этом упругое поле напряжений может, однако, выйти за поверхность текучести. Например, для известного решения задачи о двухосном нагружении плоскости с отверстием [1] это происходит, когда нагрузка достигает некоторого критического значения, но является допредельной [2]. Для закритической нагрузки решение задачи сопряжения не является решением УПЗ. В этом случае для решения УПЗ требуется построить в части пластической зоны новое поле напряжений.

Для закритической нагрузки, мало отличающейся от критической, эта задача решается методом малого параметра. При этом определяется и форма пластической зоны. Для определенности рассматривается задача о пластической зоне, целиком охватывающей контур отверстия, на котором приложена не изменяющаяся нагрузка. Аналогичное построение применимо и к другим плоским УПЗ с критическими нагрузками. В качестве примера приведен расчет пластической зоны, охватывающей круговое отверстие в плоскости, подверженной на бесконечности двухосному нагружению.

**1. Критическая нагрузка в задаче сопряжения.** Пусть упругопластическое тело находится в условиях плоской деформации. Рассматривается соответствующая плоская задача для плоскости с отверстием или ограниченной области с отверстием. Нагрузка описывается силами, приложенными на контуре отверстия и на бесконечности (соответственно — на внешней границе области). Пусть отверстие целиком охватывается пластической зоной  $\Omega^P$ , которую от упругой зоны  $\Omega^e$  отделяет контур  $l$ , см. фиг. 1. Компоненты тензора напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{xy}$  в декартовой системе координат  $x$ ,  $y$  удовлетворяют в пластической зоне уравнениям равновесия и критерию текучести

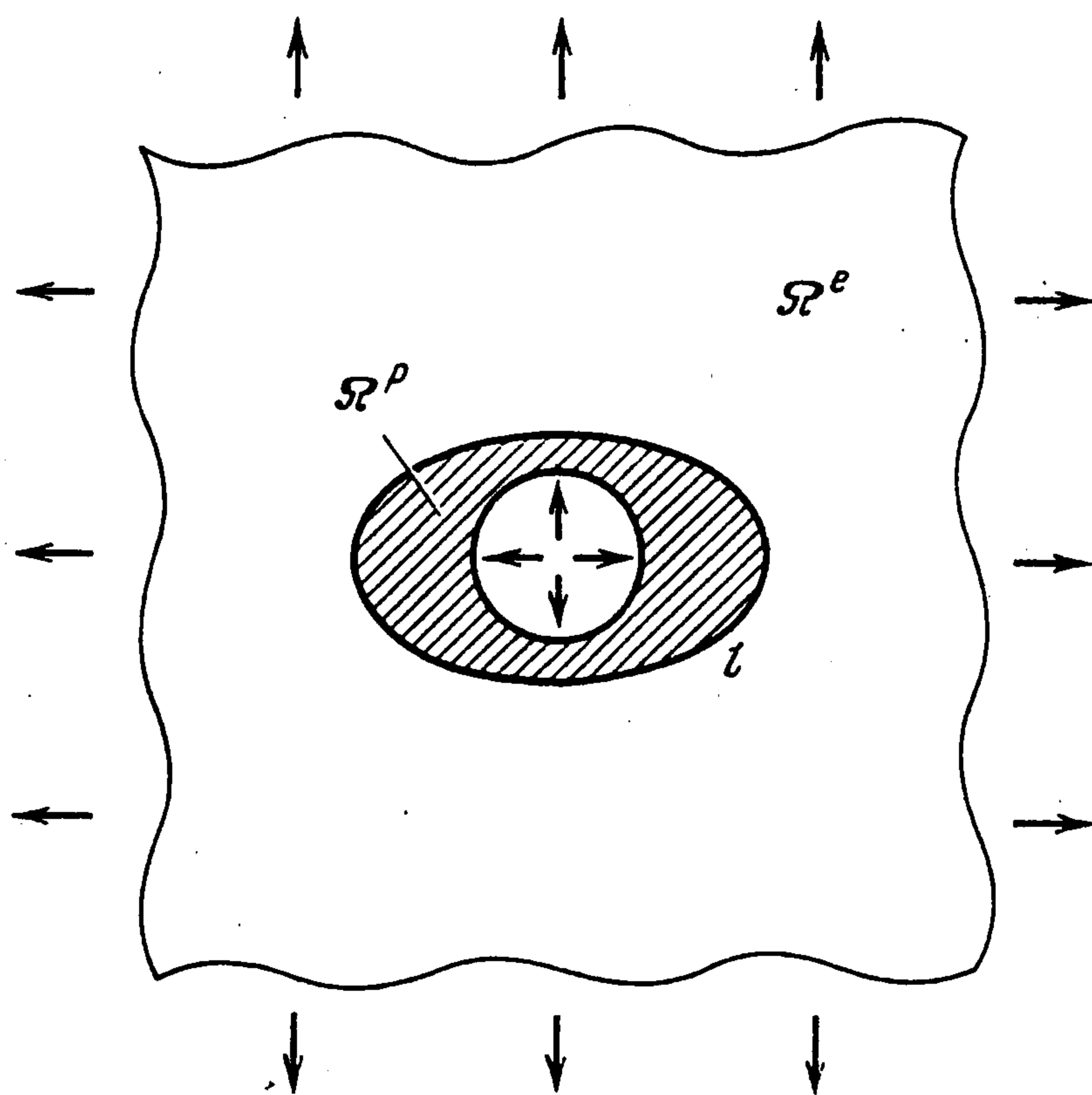
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad F(\sigma) \equiv (\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\sigma_{xy}^2 - 1 = 0 \quad (1.1)$$

Напряжения считаются безразмерными, они отнесены к величине  $2k$ , где  $k$  — предел текучести при чистом сдвиге.

В дальнейшем нагрузка на контуре отверстия не изменяется.

Обычно предполагается, что уравнения (1.1) вместе с силовыми краевыми условиями на контуре отверстия полностью определяют напряжения в пластической зоне. Это поле напряжений обозначается  $\sigma^P$  и считается известным.

В упругой зоне напряжения определяются бигармонической функцией напряжений. Условие непрерывности напряжений позволяет выразить ее вторые производные на неизвестном контуре сопряжения  $l$  через известные напряжения  $\sigma^P$  в пластической зоне.



Фиг. 1

Задача нахождения контура сопряжения  $l$  и бигармонической функции напряжений, удовлетворяющей этим уравнениям и заданным условиям нагружения на бесконечности (или на внешней границе области), называется в дальнейшем задачей сопряжения (ЗС). Начиная с работы [1], где построено аналитическое решение ЗС в случае плоскости с круговым отверстием, развивались аналитические и численные методы ее решения. Их обзор имеется в [3,4].

Решение ЗС не всегда является одновременно и решением УПЗ.

*Пример.* Пусть плоскость с ненагруженным круговым отверстием подвержена на бесконечности действию усилия  $p$  вдоль оси  $x$  и усилия  $q$  вдоль оси  $y$  (усилия безразмерны, как и напряжения)

$$\sigma_x \rightarrow p, \sigma_y \rightarrow q, \sigma_{xy} \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty$$

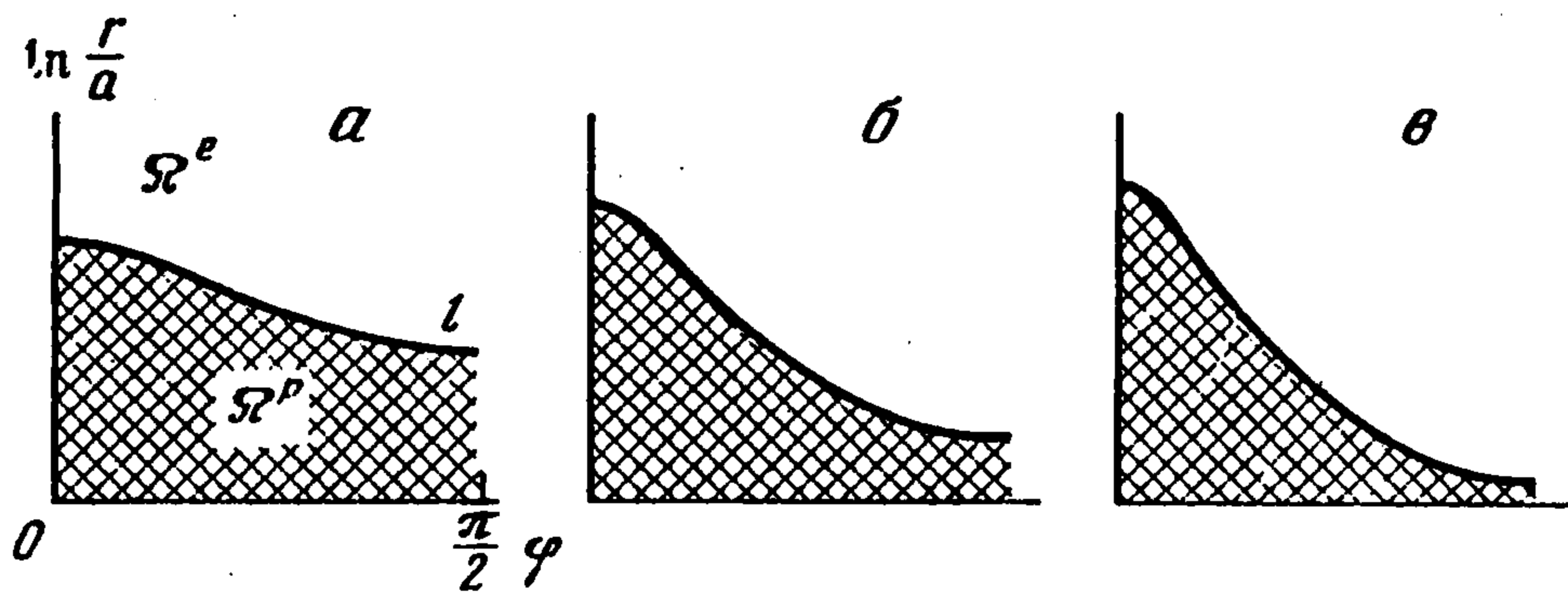
Решение ЗС, в частности, поле напряжений  $\sigma^p$  построено [1] при условии

$$|q - p| < 1, (1 - |q - p|) \exp\{\frac{1}{2}(|p + q| - 1)\} \geq 1 \quad (1.2)$$

Однако использовать его в качестве решения УПЗ можно лишь при выполнении дополнительного условия  $|q - p| \leq \sqrt{2} - 1$ .

Причина этого, во-первых, состоит в том, что при  $|q - p| > \sqrt{2} - 1$  имеются характеристики системы (1.1), построенные для поля напряжений  $\sigma^p$  которые пересекают контур сопряжения в трех точках. Из-за этого отсутствует соответствующее решение для перемещений [4]. Семейства характеристик и контур сопряжения  $l$  для решения [1] представлены на фиг. 2 при различных  $q > p > 0$ , удовлетворяющих условиям (1.2), в координатах  $\ln r/a, \varphi$  ( $r, \varphi$  — полярные координаты в плоскости  $x, y$ ;  $a$  — радиус отверстия). На фиг. 2, а-в показаны соответственно случаи  $q - p < \sqrt{2} - 1, q - p = \sqrt{2} - 1, q - p > \sqrt{2} - 1$ .

Во-вторых при  $|q - p| > \sqrt{2} - 1$  поле напряжений, построенное в [1], в части области  $\Omega^e$  выходит за поверхность текучести [2]. При близких к  $\sqrt{2} - 1$  значениях  $|q - p|$  это происходит в окрестности точки касания характеристики и контура  $l$ , соответствующего значению  $|q - p| = \sqrt{2} - 1$ . Такая связь выхода напряжений за поверхность текучести и касания характеристики с контуром сопряжения имеет место и в общем случае и рассматривается в разд. 2.



Фиг. 2

Рассмотрим ЗС, когда нагрузка на бесконечности (или на внешней границе области) определяется монотонно возрастающим безразмерным параметром  $\tau$ , а нагрузка на контуре отверстия неизменна. В силу последнего условия поле напряжений  $\sigma^P$  в зоне  $\Omega^P$  не зависит от параметра  $\tau$ . Зоны  $\Omega^P$ ,  $\Omega^e$  и контур сопряжения  $l$  зависят от параметра  $\tau$  и в дальнейшем обозначаются  $\Omega_\tau^P$ ,  $\Omega_\tau^e$ ,  $l_\tau$ .

Пусть при  $\tau \leq \tau_0$  для решения ЗС в зоне  $\Omega_\tau^e$  выполнено условие допустимости напряжений  $F(\sigma) \leq 0$ , а при  $\tau$ , близких к  $\tau_0$ ,  $\tau > \tau_0$ , на контуре  $l_\tau$  имеется такая точка  $Q_\tau$ , что в пересечении некоторой ее окрестности  $V_\tau$  с зоной  $\Omega_\tau^e$  имеет место обратное неравенство  $F(\sigma) > 0$ ; напряжения выходят за поверхность текучести (см. фиг. 3). Значения  $\tau_0$  и соответствующую ему нагрузку назовем критическими, нагрузки, соответствующие  $\tau < \tau_0$  ( $\tau > \tau_0$ ), — докритическими (закритическими). В рассмотренном примере при нагружении  $(\tau p_0, \tau q_0)$ , удовлетворяющем условиям (1.2), критическим является значение  $\tau_0 = (\sqrt{2} - 1)/|q_0 - p_0|$ .

Для закритических нагрузок решение ЗС не дает поля напряжений, являющегося решением УПЗ. Цель этой работы состоит в построении для закритической нагрузки при  $\tau - \tau_0 \ll 1$  поля напряжений, являющегося решением УПЗ.

**2. Критическая нагрузка и касание характеристики с контуром сопряжения.** Укажем одно существенное для дальнейшего свойство критической нагрузки (оно отмечалось в примере разд. 1 и имеет место и в общем случае). Именно при критической нагрузке происходит касание характеристики системы (1.1) с контуром сопряжения  $l_{\tau_0}$ .

Для того чтобы установить это свойство, рассмотрим сначала  $F_\tau$  — функцию (1.1), составленную для поля напряжений  $\sigma_\tau$ , являющегося решением ЗС в зоне  $\Omega_\tau^e$  при значении  $\tau$  параметра нагружения. Пусть  $\partial F_\tau / \partial n$  — ее производная по направлению нормали к контуру  $l_\tau$ , внешней по отношению к области  $\Omega_\tau^P$ . Пусть  $\tau_0$  — критическое значение параметра нагружения,  $Q_\tau$ , где  $\tau > \tau_0$  — точка, указанная в определении критической нагрузки, и  $Q_{\tau_0}$  — точка на контуре  $l_{\tau_0}$ , предельная для точек  $Q_\tau$  при  $\tau \rightarrow \tau_0$ .

Покажем, что в этой точке обращается в нуль производная

$$\partial F_{\tau_0} / \partial n |_{Q_{\tau_0}} = 0 \quad (2.1)$$

Действительно, на контуре  $l_\tau$  в силу непрерывности напряжений всегда имеет место равенство  $F_\tau = 0$ . Поэтому при  $\tau \leq \tau_0$ , когда  $F_\tau \leq 0$  в зоне  $\Omega_\tau^e$ , во всех точках контура  $l_\tau$  выполнено неравенство  $\partial F_\tau / \partial n \leq 0$ . Аналогично при  $\tau > \tau_0$ , когда  $F_\tau > 0$  в области  $V_\tau \cap \Omega_\tau^e$ , в точке  $Q_\tau$  выполнено неравенство  $\partial F_\tau / \partial n \geq 0$ . При  $\tau = \tau_0$  в точке  $Q_{\tau_0}$  по непрерывности справедливо равенство (2.1).

Учитывая, что в зоне  $\Omega_\tau^P$  выполнено соотношение  $F_\tau = 0$ , равенство (2.1) представим в виде  $[\partial F_{\tau_0} / \partial n] |_{Q_{\tau_0}} = 0$  (здесь и в дальнейшем квадратными скобками обозначается скачок величины).

Покажем, что из этого равенства вытекает касание характеристики и контура  $l_{\tau_0}$  в точке  $Q_{\tau_0}$ . Выберем декартову систему координат с началом в точке  $Q_{\tau_0}$ , осью  $y$ , направленной по нормали, и осью  $x$  — по касательной к контуру  $l_{\tau_0}$ . Тогда по формуле (1.1) для функции  $F_\tau$  предыдущее соотношение представляется в виде (при  $x = 0, y = 0$ )

$$(\sigma_y - \sigma_x) ([\partial \sigma_y / \partial y] - [\partial \sigma_x / \partial y]) + 4 \sigma_{xy} [\partial \sigma_{xy} / \partial y] = 0$$

При учете вытекающих из уравнений равновесия (1.1) соотношений (при  $x = 0, y = 0$ )

$$[\partial \sigma_{xy} / \partial y] = 0, [\partial \sigma_y / \partial y] = 0$$

оно равносильно равенству (при  $x = 0, y = 0$ )

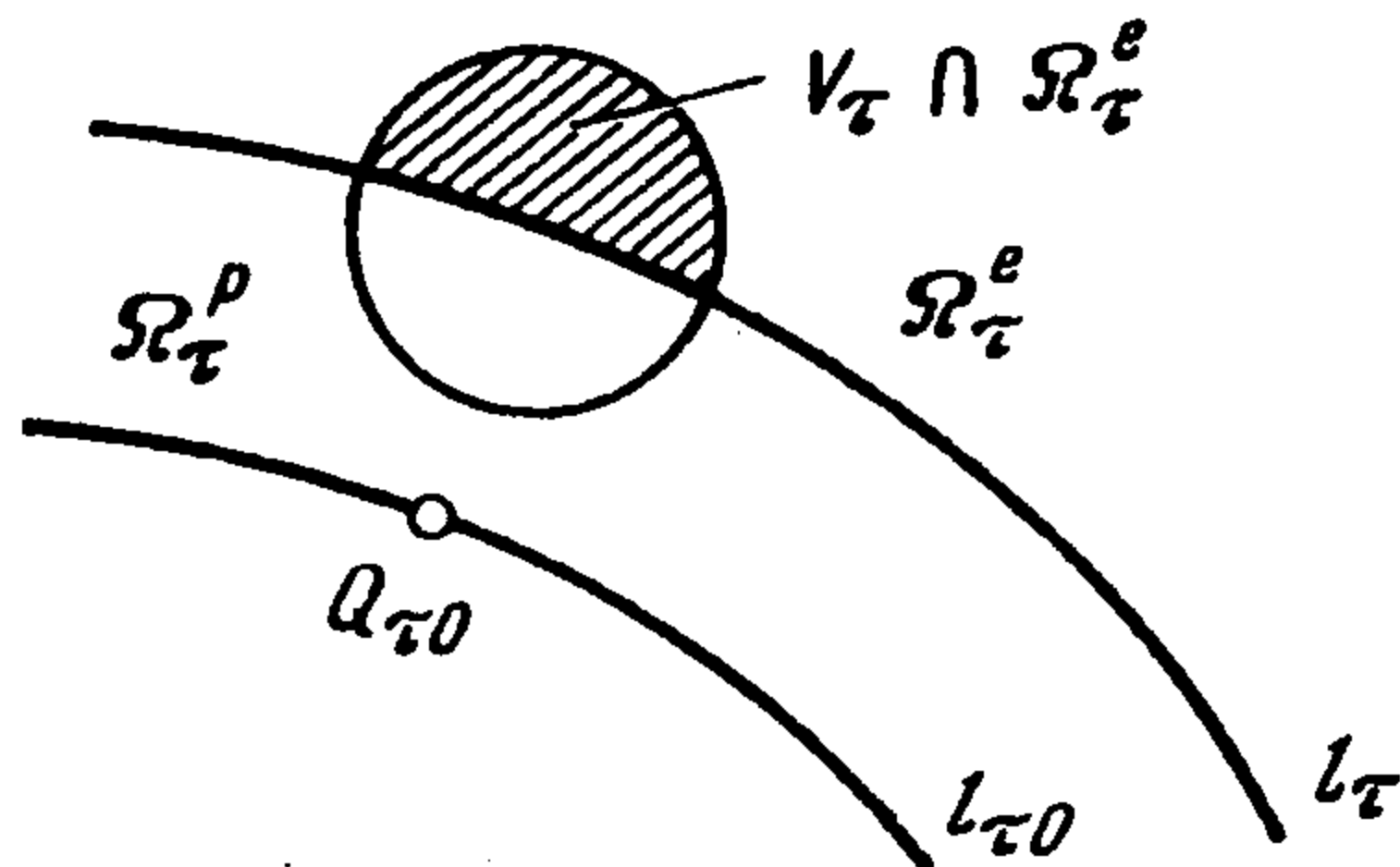
$$(\sigma_y \sim \sigma_x) [\partial \sigma_x / \partial y] = 0$$

Если второй множитель отличен от нуля, то в точке  $Q_{\tau_0}$  выполняются равенства  $\sigma_y - \sigma_x = 0$ ,  $\sigma_{xy} = \pm 1/2$ . Это означает [5], что направления осей  $x$  и  $y$  — характеристические для системы (1.1) в точке  $Q_{\tau_0}$ .

Таким образом, при критической нагрузке  $\tau = \tau_0$  характеристика системы (1.1) касается контура сопряжения  $l_{\tau_0}$  в точке  $Q_{\tau_0}$ , если только в этой точке отличен от нуля скачок  $[\partial \sigma_x / \partial y]$ .

Справедливо и обратное утверждение. Именно, пусть при  $\tau \leq \tau_*$  решение ЗС в области  $\Omega_\tau^e$  удовлетворяет условию допустимости напряжений  $F(\sigma) \leq 0$ , а при  $\tau = \tau_*$  характеристика системы (1.1) касается контура сопряжения  $l_{\tau_*}$  в точке  $Q_{\tau_*}$ .

Покажем, что в случае общего положения значение  $\tau_*$  — критическое. Рассмотрим для значения параметра  $\tau$ , близкого к  $\tau_*$ , на контуре  $l_\tau$  функцию  $f_\tau = \partial F_\tau / \partial n$ . При  $\tau \leq \tau_*$  во всех точках контура



Фиг. 3

$l_\tau$  выполнено неравенство  $f_\tau \leq 0$ , в частности,  $f_{\tau_*} \leq 0$ . В точке  $Q_{\tau_*}$  характеристика касается контура  $l_{\tau_*}$  и, значит, в той же, что и выше, локальной декартовой системе координат имеется равенство  $(\sigma_y - \sigma_x)(Q_{\tau_*}) = 0$ . Из него следует соотношение  $f_{\tau_*}(Q_{\tau_*}) = 0$ . Таким образом, в точке  $Q_{\tau_*}$  функция  $f_{\tau_*}$  имеет локальный максимум. Ему соответствует локальный максимум функции  $f_\tau$  при близком к  $\tau_*$  значению параметра  $\tau$ . Определим функцию  $g(\tau) = \max f_\tau$ , она неположительна для значений  $\tau < \tau_*$ , которая обращается в нуль при  $\tau = \tau_*$ . Поэтому в случае общего положения (при  $(dg/d\tau)(\tau_*) \neq 0$ ) она положительна при  $\tau > \tau_*$ . Тогда в точке  $Q_\tau$ , в которой достигается максимум функции  $f_\tau$ , выполнено неравенство  $(\partial F_\tau / \partial n)(Q_\tau) > 0$ . Поэтому в области  $\Omega_\tau^e$  вблизи точки  $Q_\tau$  выполнено неравенство  $F_\tau > 0$ . Следовательно, значению  $\tau_*$ , при котором происходит касание характеристики и контура сопряжения, соответствует критическая нагрузка.

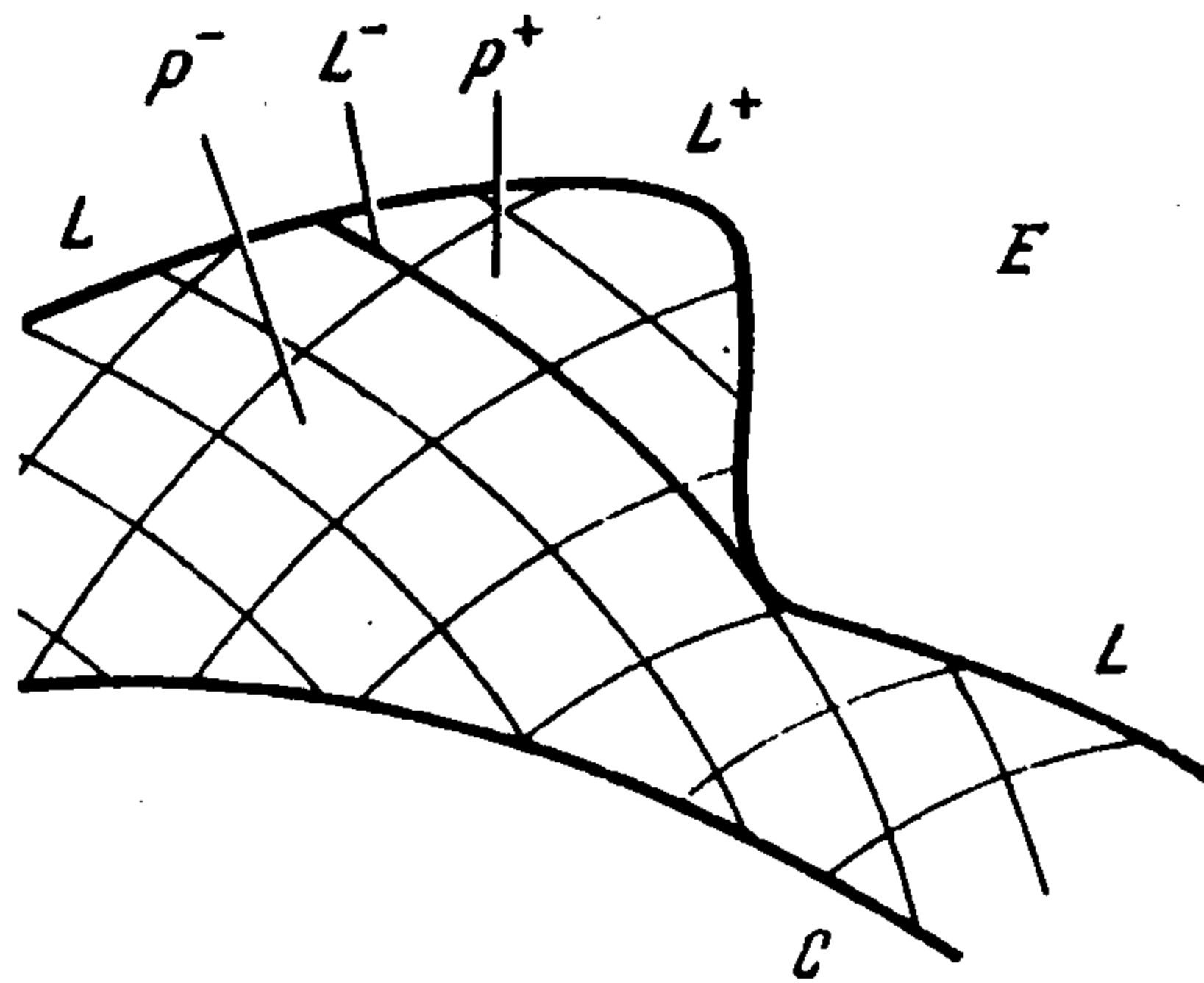
Тогда при докритической нагрузке характеристики не касаются контура сопряжения, а пересекают его в одной точке. Поэтому происходящее при критической нагрузке касание характеристики и контура сопряжения имеет второй порядок (см. фиг. 2).

*Замечание.* Установленные свойства относятся к случаю общего положения, который и рассматривается в дальнейшем. Возможно, однако, их нарушение при некотором вырождении. Это происходит при  $(dg/d\tau)(\tau_*) = 0$ , тогда при  $\tau > \tau_*$  функция  $g(\tau)$  может принимать не положительные, как считалось выше, а отрицательные значения. Поэтому для применения установленных свойств к анализу конкретной задачи следует проверять отсутствие вырождения.

**3. Пластическая зона решения УПЗ при закритической нагрузке.** Плоская УПЗ при закритической нагрузке, если она допредельная, имеет единственное решение [6]. Поле напряжений этого решения в соответствующей пластической зоне не всюду совпадает с полем  $\sigma^P$ . Действительно, в противном случае решение УПЗ являлось бы и решением ЗС. Однако последнее также единственно и при закритической нагрузке выходит за поверхность текучести, и, значит, не может совпадать с решением УПЗ.

Таким образом, при закритической нагрузке лишь в некоторой части  $P^-$  пластической зоны решения УПЗ сохраняется поле напряжений  $\sigma^P$ . Каждая точка области  $P^-$  соединяется с контуром отверстия кривыми обоих семейств характеристик системы (1.1), целиком лежащими в пластической зоне. В других областях пластической зоны, точки которых нельзя так соединить с контуром отверстия, имеется отличное от  $\sigma^P$  поле напряжений  $s$ . Пусть  $P^+$  — такая область и  $L^-$  — кривая, разделяющая ее и область  $P^-$ .

Кривая  $L^-$  является характеристикой системы (1.1). Действительно, в противном случае поле напряжений  $\sigma^P$  распространялось бы и в область  $P^+$  (другое непрерывное



Фиг. 4

продолжение этого решения системы (1.1) через нехарактеристическую кривую невозможно). Это, однако, противоречит выбору области  $P^+$ . Таким образом, область  $P^+$  отделяется от области  $P^-$  характеристиками системы (1.1). В дальнейшем ограничимся случаем, когда рассматриваемая область  $P^+$  отделяется одной характеристикой (фиг. 4).

4. Метод малого параметра в УПЗ для закритической нагрузки. Пусть  $\tau_0$  — критическое значение параметра нагружения. Рассмотрим закритическую нагрузку, соответствующую значению  $\tau = \tau_0 + \epsilon^2$ ,  $\epsilon^2 \ll 1$ . Требуется найти поле напряжений, являющееся решением УПЗ при этой нагрузке.

Пусть  $E_\epsilon$ ,  $P_\epsilon$  — соответствующая упругая и пластическая зоны;  $P_\epsilon^-$  и  $P_\epsilon^+$  — части пластической зоны, в которых полем напряжений является соответственно  $\sigma^P$  и отличное от него поле  $s_\epsilon$  (п. 3). Поле напряжений в упругой зоне обозначим  $\sigma_\epsilon^E$ . Кривые, разделяющие пары областей  $P_\epsilon^-$  и  $P_\epsilon^+$ ,  $P_\epsilon^+$  и  $E_\epsilon$ ,  $P_\epsilon^-$  и  $E_\epsilon$ , обозначим соответственно  $L_\epsilon^-, L_\epsilon^+, L_\epsilon$  (см. фиг. 4, где индекс  $\epsilon$  не указан).

При критической нагрузке  $\epsilon = 0$  решением УПЗ является решение ЗС: область  $P_0^+$  и кривые  $L_0^-, L_0^+$  отсутствуют, области  $P_0^-, E_0$ , контур  $L_0$  и поле напряжений  $\sigma_0^E$  совпадают соответственно с  $\Omega_{\tau_0}^P, \Omega_{\tau_0}^E$ , контуром  $l_{\tau_0}$  и полем напряжений  $\sigma_{\tau_0}$ . Требуется найти решение УПЗ при  $\epsilon \neq 0$ , т.е. найти кривые  $L_\epsilon^-, L_\epsilon^+, L_\epsilon$  и поле напряжений  $s_\epsilon, \sigma_\epsilon^E$  так, чтобы 1) в области  $P_\epsilon^+$  при  $\sigma = s_\epsilon$  удовлетворялась система уравнений теории пластичности (1.1), 2) в области  $E_\epsilon$  поле напряжений  $\sigma = \sigma_\epsilon^E$  выражалось через бигармоническую функцию напряжений и удовлетворяло условию допустимости  $F(\sigma) \leq 0$ , 3) на контурах  $L_\epsilon^-, L_\epsilon^+, L_\epsilon$  выполнялось условие сопряжения — условие непрерывности напряжений, 4) на бесконечности (или на внешней границе области) выполнялись краевые условия для напряжений при нагрузке, соответствующей значению  $\tau = \tau_0 + \epsilon^2$  параметра нагружения. (Напомним, что в области  $P_\epsilon^-$  определено поле напряжений  $\sigma = \sigma^P$ , удовлетворяющее системе (1.1) и фиксированным краевым условиям на контуре отверстия.)

Методом малого параметра решен ряд задач как с полным, так и с неполным охватом отверстия пластической зоной [7,8]. В случае закритической нагрузки требуется дополнительное рассмотрение, связанное с определением напряжений в зоне  $P_\epsilon^+$  и проверкой допустимости напряжений в зоне  $E_\epsilon$ .

*Система координат.* При решении поставленной задачи методом малого параметра в дальнейшем используется специальная система координат, связанная с контуром  $L_0 \equiv l_{\tau_0}$ . Пусть  $x$  — длина дуги, отсчитываемая от точки  $Q_{\tau_0}$ , и  $\mathbf{r}_0(x)$  — векторное параметрическое задание этого контура,  $\mathbf{n}(x)$  — единичная нормаль к нему, внешняя по отношению к области  $\Omega_{\tau_0}^P$ ; введем криволинейную ортогональную систему координат  $x, y$ , сопоставив паре  $(x, y)$  точку плоскости с радиус-вектором  $\mathbf{r}(x, y) = \mathbf{r}_0(x) + \mathbf{n}(x)y$ .

Безразмерные, отнесенные к величине  $2k$  физические компоненты тензора напряжений в этой системе координат обозначим  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ . При этом условие текучести сохра-

няет прежнюю форму, а уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \left(1 + \frac{y}{R(x)}\right) \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{2}{R(x)} \sigma_{xy} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \left(1 + \frac{y}{R(x)}\right) \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{R(x)} = 0$$

где  $R(x)$  — радиус кривизны контура  $L_0$ .

*Представление границ пластической зоны.* Часть  $L_\epsilon^-$  границы области  $P_\epsilon^-$  является характеристикой (п. 3). Поэтому, если при  $\epsilon \rightarrow 0$  отсутствует конечное отличие углов наклона  $L_\epsilon^-$  и предельной для нее кривой  $L_0$ , то  $L_\epsilon^-$  располагается вблизи точки  $Q_{T_0}$  ( $x = 0, y = 0$ ), в которой при критической нагрузке происходит касание контура сопряжения и характеристики, и  $L_\epsilon^-$  принадлежит этому же семейству характеристик.

Таким образом, зона  $P_\epsilon^+$  располагается вблизи точки  $Q_{T_0}$ . Оценим характерные размеры этой зоны. Пусть  $\sigma = \sigma_{T_0 + \epsilon^2}(x, y)$  поле напряжений решения ЗС. Оно выходит за поверхность текучести в некоторой области  $V_{T_0 + \epsilon^2}$  вблизи точки  $Q_{T_0}$ ; в направлении  $x$  область имеет размер порядка  $\epsilon$ , в направлении  $y$  — размер порядка  $\epsilon^2$ ; выход напряжений за поверхность текучести характеризуется соотношением  $F(\sigma) = O(\epsilon^4)$  (разд. 6). Это означает, что рассматриваемое поле напряжений можно принять за первое приближение решения УПЗ и в зоне  $E_\epsilon$ , и в зоне  $P_\epsilon^+$ , совершая погрешность порядка  $\epsilon^3$ . Поэтому зона  $P_\epsilon^+$  имеет те же характерные размеры, что и область  $V_{T_0 + \epsilon^2}$ .

Пусть  $y = \rho_\epsilon^-(x)$  — уравнение кривой  $L_\epsilon^-$ . Поскольку эта кривая является характеристикой, вид функции  $\rho_\epsilon^-(x)$  определяется величиной  $r = r_2 \epsilon^2 + r_3 \epsilon^3 + \dots$  — значением этой функции при  $x = 0$ . Пусть  $y = f(x, \eta)$  — уравнение характеристики того же семейства, что и  $L_\epsilon^-$ , проходящей через точку  $x = 0, y = \eta$ . В соответствии с оценкой размера зоны  $P_\epsilon^+$  разложим функцию  $f(x, \eta)$  в окрестности точки  $x = 0, y = 0$ , учитывая, что  $f(0, \eta) = \eta$  и что вследствие касания второго порядка характеристики и контура  $L_0$  (разд. 2) в точке  $x = 0, \eta = 0$  выполнены соотношения

$$f(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$$

При помощи разложения уравнение кривой  $L_\epsilon^-$  представляется в виде

$$y = \rho_\epsilon^-(x) = \epsilon^2 \rho_2^-\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^3 \rho_3^-\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

$$\rho_2^-\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \text{const} = r_2, \quad \rho_3^-\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \frac{1}{6} f_{xxx} \frac{x^3}{\epsilon^3} + f_{x\eta} r_2 \frac{x}{\epsilon} + r_3 \quad (4.2)$$

$$f_\eta = \frac{\partial f}{\partial \eta}(0, 0), \quad f_{x\eta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta}(0, 0), \quad f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0)$$

Величины  $\rho_2^-, \rho_3^-, \dots$  в соответствии с оценкой размера зоны  $P_\epsilon^+$  имеют порядок единицы; числа  $r_2, r_3, \dots$  — искомые в УПЗ.

Уравнения кривых  $L_\epsilon^+, L_\epsilon$ , будем искать в виде

$$y = \rho_\epsilon^+(x) = \epsilon^2 \rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^3 \rho_3^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \dots \quad (4.3)$$

$$y = \rho_\epsilon(x) = \epsilon^2 \rho_2(x) + \epsilon^3 \rho_3(x) + \dots,$$

где  $\rho_i^+(x/\epsilon), \rho_i(x)$  — неизвестные величины.

Разрывы производных поля напряжений на кривой  $L_\epsilon^-$ . На характеристике  $L_\epsilon^-$  поле напряжений непрерывно, а его производные, вообще говоря, терпят разрыв. Величины соответствующих скачков используются в дальнейшем для представления поля напряжений в зоне  $P_\epsilon^+$ .

Укажем их выражения через минимальное число независимых величин.

Соотношения на характеристике  $y = f(x, \eta)$  системы уравнений (4.1), (1.1) имеют вид

$$\left[ \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \right] = A, \quad \left[ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right] = A\kappa, \quad \left[ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right] = A\kappa^2 \quad (4.4)$$

$$\kappa(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \eta) \left( 1 + \frac{f(x, \eta)}{R(x)} \right)^{-1}$$

Транспортное уравнение [7], управляющее значениями  $A(x)$ , приведем в переменных  $\sigma, \psi$

$$\sigma_y + \sigma_x = 2\sigma, \quad \sigma_y - \sigma_x = \sin 2\psi, \quad 2\sigma_{xy} = \cos 2\psi \quad (4.5)$$

Характеристика  $L_\epsilon^-$ , для которой записывается транспортное уравнение, имеет наклон, близкий к нулю, и принадлежит первому или второму из семейств

$$\frac{dy}{dx} = \left( 1 + \frac{y}{R(x)} \right) \operatorname{tg} \psi, \quad \frac{dy}{dx} = - \left( 1 + \frac{y}{R(x)} \right) \operatorname{ctg} \psi$$

в зависимости от значения  $\sigma_{xy}^p(0,0) = \frac{1}{2}$  или  $\sigma_{xy}^p(0,0) = -\frac{1}{2}$ . Ограничимся для определенности случаем  $\sigma_{xy}^p(0,0) = -\frac{1}{2}$  и, следовательно,  $\psi(0,0) = \pi/2$  (он реализуется, в частности, в примере разд. 1). Тогда транспортное уравнение

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = \left( -\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial c}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] - \frac{\partial c}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]^2, \quad c = - \left( 1 + \frac{y}{R} \right) \operatorname{ctg} \psi$$

при учете соотношения на характеристике  $[\partial \sigma / \partial y] = [\partial \psi / \partial y]$  и замены (4.5) преобразуется к виду

$$dA/dx = k_1(x)A + k_2(x)A^2, \quad A = [\partial \sigma_x / \partial y]$$

При помощи его решения скачки (4.4) выражаются через значение  $A(0)$  в точке  $x=0, y=r$  характеристики  $L_\epsilon^-$ .

Решение этого уравнения найдем в виде разложения по координате  $x$  в окрестности точки  $x=0$ . Коэффициенты разложения, как и выражения  $k_1(x), k_2(x)$  в уравнении и значение  $A(0)$ , зависят от величины  $r = r_2 \epsilon^2 + \dots$ , поэтому в свою очередь разложим их по параметру  $\epsilon$ . В результате вычислений находим (коэффициенты разложения имеют в силу оценки размеров зоны  $P_\epsilon^+$  порядок единицы; не выписываются члены более высокого порядка малости, чем  $\epsilon^2$ )

$$A(x) = A_0 + \epsilon A_0' \frac{x}{\epsilon} + \epsilon^2 \left( A_1 r_2 + \frac{1}{2} A_0'' \frac{x^2}{\epsilon^2} \right) + \dots$$

$$A_0' = \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_y^p}{\partial y}(0,0) - \frac{\partial \sigma_x^p}{\partial y}(0,0) \right\} A_0 - \frac{1}{2} A_0^2 \quad (4.6)$$

$$A_0'' = \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_y^p}{\partial x \partial y}(0,0) - \frac{\partial^2 \sigma_x^p}{\partial x \partial y}(0,0) \right\} A_0 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \sigma_y^p}{\partial y}(0,0) - 2 \frac{\partial \sigma_x^p}{\partial y}(0,0) - 2 A_0 \right\} A_0'$$

Коэффициенты  $A_0, A_1, \dots$  разложения скачка  $[\partial\sigma_x/\partial y]|_{x=0}$  являются искомыми в УПЗ.

Для величины  $\kappa(x)$  используем ее разложение

$$\kappa(x) = \epsilon^2 \left( \frac{1}{2} f_{xxx} \frac{x^2}{\epsilon^2} + r_2 f_{x\eta} \right) + \dots$$

По формуле (4.4) вместе с представлением (4.6) оно приводит к выражениям для скачков на характеристике  $L_\epsilon^-$  (отбрасываются члены более высокого порядка малости, чем  $\epsilon^2$ )

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} \right] &= A_0 + \epsilon A_0' \frac{x}{\epsilon} + \epsilon^2 \left( A_1 r_2 + \frac{1}{2} A_0'' \frac{x^2}{\epsilon^2} \right) + \dots \\ \left[ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} \right] &= \epsilon^2 A_0 \left( \frac{1}{2} f_{xxx} \frac{x^2}{\epsilon^2} + r_2 f_{x\eta} \right) + \dots, \quad \left[ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} \right] = 0 + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

При помощи уравнения характеристики находятся величины

$$f_{x\eta} = -\frac{1}{2} \frac{\partial(\sigma_y^p - \sigma_x^p)}{\partial y}(0,0); \quad f_{xxx} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2(\sigma_y^p - \sigma_x^p)}{\partial x^2}(0,0) \quad (4.8)$$

Скачки производных второго порядка (и если потребуется – скачки высших производных) выражаются через параметры  $B_0, B_1, \dots$ , аналогичные величинам  $A_0, A_1, \dots$ , и через сами величины  $A_i$ . Отметим, в частности, используемое в дальнейшем выражение (отбрасываются члены, малые по сравнению с единицей)

$$\left[ \frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial y^2} \right] = A_0 \left( -\frac{\partial(\sigma_y^p - \sigma_x^p)}{\partial y}(0,0) + \frac{1}{2} A_0 \right) + \dots \quad (4.9)$$

*Представление поля напряжений.* В зоне  $P_\epsilon^+$  разложим поле напряжений  $s_\epsilon(x, y)$  по второму аргументу  $y = \rho_\epsilon^-(x) + (y - \rho_\epsilon^-(x))$  в окрестности его значения  $\rho_\epsilon^-(x)$ . Используя непрерывность напряжений на кривой  $L_\epsilon^-$ ,  $\sigma^p(x, \rho_\epsilon^-(x)) = s_\epsilon(x, \rho_\epsilon^-(x))$ , и представление производных

$$\frac{\partial s_\epsilon}{\partial y}(x, \rho_\epsilon^-(x)) = \frac{\partial \sigma^p}{\partial y}(x, \rho_\epsilon^-(x)) + \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right](x)$$

где скачок берется на контуре  $L_\epsilon^-$ , и аналогичное представление для высших производных, находим (отбрасываются члены более высокого порядка малости, чем  $\epsilon^4$ )

$$\begin{aligned} s_\epsilon(x, y) &= \sigma^p(x, 0) + \frac{\partial \sigma^p}{\partial y}(x, 0) y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma^p}{\partial y^2}(x, 0) y^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right](x) (y - \rho_\epsilon^-(x)) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right](x) (y - \rho_\epsilon^-(x))^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

Это представление вместе с выражениями (4.7) для скачков производных и аналогичными им выражениями для скачков высших производных сводят задачу построения поля напряжений  $s_\epsilon$  к разысканию величин  $A_0, A_1, \dots, B_0, B_1, \dots$ .

Поле напряжений  $\sigma_\epsilon^e$  в упругой зоне  $E_\epsilon$  будем искать в виде

$$\sigma_\epsilon^e(x, y) = \sigma_0^e(x, y) + \epsilon^2 \sigma_2^e(x, y) + \epsilon^3 \sigma_3^e(x, y) + \epsilon^4 \sigma_4^e(x, y) + \dots \quad (4.11)$$

где  $\sigma_0^e(x, y) = \sigma_{\tau 0}(x, y)$  – решение ЗС при критической нагрузке и поля  $\sigma_2^e, \sigma_3^e$  имеют величину порядка единицы и, возможно, зависят также от  $\epsilon$ .

*Условия сопряжения на границе упругой и пластической зон.* На контуре  $L_\epsilon \cup L_\epsilon^+$ ,

разделяющем упругую и пластическую зоны, напряжения непрерывны. На кривой  $L_\epsilon$  условия непрерывности  $\sigma_\epsilon^e(x, \rho_\epsilon(x)) = \sigma^p(x, \rho_\epsilon(x))$  записывается, как в [8,9], на основе разложений (4.3), (4.11) и вытекающих из уравнений (4.1) соотношений (используется обозначение  $\sigma_0 = \sigma_0^e - \sigma^p$ ).

$$(\partial\sigma_{0xy}/\partial y)(x, 0) = 0, (\partial\sigma_{0y}/\partial y)(x, 0) = 0$$

Для первых членов разложения (4.11) непрерывность напряжений приводит к следующим условиям (при значениях  $x$ , которым соответствуют точки кривой  $L_\epsilon$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{2xy}^e(x, 0) = 0, \sigma_{2y}^e(x, 0) = 0, \frac{\partial\sigma_{0x}}{\partial y}(x, 0)\rho_2(x) + \sigma_{2x}^e(x, 0) &= 0 \\ \sigma_{3xy}^e(x, 0) = 0, \sigma_{3y}^e(x, 0) = 0, \frac{\partial\sigma_{0x}}{\partial y}(x, 0)\rho_3(x) + \sigma_{3x}^e(x, 0) &= 0 \\ \sigma_{4xy}^e(x, 0) = -\frac{\partial\sigma_{2xy}^e}{\partial y}(x, 0)\rho_2(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma_{0xy}}{\partial y^2}(x, 0)\rho_2^2(x) & \quad (4.12) \\ \sigma_{4y}^e(x, 0) = -\frac{\partial\sigma_{2y}^e}{\partial y}(x, 0)\rho_2(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma_{0y}}{\partial y^2}(x, 0)\rho_2^2(x) \\ \frac{\partial\sigma_{0x}}{\partial y}(x, 0)\rho_4(x) + \sigma_{4x}^e(x, 0) + \frac{\partial\sigma_{2x}}{\partial y}(x, 0)\rho_2(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma_{0x}}{\partial y^2}(x, 0)\rho_2^2(x) &= 0 \end{aligned}$$

Условие непрерывности  $s_\epsilon(x, \rho_\epsilon^+(x)) = \sigma_\epsilon^e(x, \rho_\epsilon^+(x))$  на кривой  $L_\epsilon^+$  записывается на основе разложений (4.10), (4.11). При этом при учете оценки размера зоны  $P_\epsilon^+$  производится дополнительное разложение по  $x$  в окрестности точки  $x = 0$ , а также используются соотношения (4.7). Непрерывность напряжений приводит к условиям сопряжения, которые тождественно выполнены для членов порядка единицы и имеют вид для членов порядка  $\epsilon^2$  (при значениях  $x$ , которым соответствуют точки кривой  $L_\epsilon^+$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{2xy}^e(x, 0) = 0, \sigma_{2y}^e(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{0x}}{\partial y}(0,0)\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \sigma_{2x}^e(0,0) - A_0\left(\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \rho_2^-\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Для членов порядка  $\epsilon^3$  условия сопряжения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{3xy}^e(x, 0) = 0, \sigma_{3y}^e(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{0x}}{\partial y}(0,0)\rho_3^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{\partial^2\sigma_{0x}}{\partial x\partial y}(0,0)\frac{x}{\epsilon}\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{\partial\sigma_{2x}^e}{\partial x}(0,0)\frac{x}{\epsilon} + \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$+ \sigma_{3x}^e(0,0) - A_0\left(\rho_3^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \rho_3^-\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) - A_0'\frac{x}{\epsilon}\left(\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \rho_2^-\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) = 0.$$

Для членов порядка  $\epsilon^4$  условия сопряжения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{4xy}^e(x, 0) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma_{0xy}}{\partial y^2}(0,0)\left(\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)^2 - \frac{\partial\sigma_{2xy}^e}{\partial y}(0,0)\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \\ + A_0\left(\frac{1}{2}f_{xxx}\frac{x^2}{\epsilon^2} + f_{x\eta}r_2\right)\left(\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \rho_2^-\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial y^2}\right]\left(\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \rho_2^-\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)^2 \\ \sigma_{4y}^e(x, 0) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma_{0y}}{\partial y^2}(0,0)\left(\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)^2 - \frac{\partial\sigma_{2y}^e}{\partial y}(0,0)\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right]\left(\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \rho_2^-\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{0x}}{\partial y} (0,0) \rho_4^+ \left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{\partial^2 \sigma_{0x}}{\partial x \partial y} (0,0) \frac{x}{\epsilon} \rho_3^+ \left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \sigma_{0x}}{\partial x^2 \partial y} (0,0) \frac{x^2}{\epsilon^2} \rho_2^+ \left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{0x}}{\partial y^2} (0,0) (\rho_2^+ \left(\frac{x}{\epsilon}\right))^2 + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{2x}^e}{\partial x^2} (0,0) \frac{x^2}{\epsilon^2} + \frac{\partial \sigma_{2x}^e}{\partial y} (0,0) \rho_2^+ \left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{\partial \sigma_{3x}^e}{\partial x} (0,0) \frac{x}{\epsilon} + \\
& + \sigma_{4x}^e(x, 0) - A_0 (\rho_4^+ \left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \rho_4^- \left(\frac{x}{\epsilon}\right)) - A'_0 \frac{x}{\epsilon} (\rho_3^+ \left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \rho_3^- \left(\frac{x}{\epsilon}\right)) - \\
& - (A_1 r_2 + \frac{1}{2} A_0'' \frac{x^2}{\epsilon^2}) (\rho_2^+ \left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \rho_2^- \left(\frac{x}{\epsilon}\right)) - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \right] (\rho_2^+ \left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \rho_2^- \left(\frac{x}{\epsilon}\right))^2 = 0
\end{aligned}$$

Подразумевается, что в выражениях для скачков вторых производных здесь отбрасываются члены, малые по сравнению с единицей, как, например, в формуле (4.9).

*Представление краевых условий.* Нагрузка на бесконечности (внешней границе рассматриваемой области) задается как функция параметра  $\tau$ . Ее разложение по малому параметру  $\epsilon^2$  приводит к краевым условиям для полей  $\sigma_2^e, \sigma_3^e, \dots$  в разложении (4.11).

Например, в случае двухосного растяжения плоскости с отверстием усилиями  $p, q$  на бесконечности

$$\sigma_x \rightarrow p, \sigma_y \rightarrow q, \sigma_{xy} \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty$$

соответствующие краевые условия для первых членов разложения (4.11) имеют вид (при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned}
\sigma_{2x}^e & \rightarrow \frac{dp}{d\tau}(\tau_0), \sigma_{2y}^e \rightarrow \frac{dq}{d\tau}(\tau_0), \sigma_{2xy}^e \rightarrow 0 \\
\sigma_{3x}^e & \rightarrow 0, \sigma_{3y}^e \rightarrow 0, \sigma_{3xy}^e \rightarrow 0 \\
\sigma_{4x}^e & \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d^2 p}{d\tau^2}(\tau_0), \sigma_{4y}^e \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d^2 q}{d\tau^2}(\tau_0), \sigma_{4xy}^e \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

*Последовательные приближения.* При отсутствии пластической зоны  $P_\epsilon^+$  с отличным от  $\sigma^p$  полем напряжений условия сопряжения компонент  $\sigma_{nx}^e, \sigma_{ny}^e$  не содержат неизвестного коэффициента разложения  $\rho_n$ , представляющего в том же приближении границу пластической зоны [8,9]. Аналогичным свойством обладают и условия (4.13)–(4.15), а также условия сопряжения в дальнейших приближениях и в рассматриваемом случае. Однако процедура построения очередного приближения, применяемая при отсутствии зоны  $P_\epsilon^+$  (используются условия сопряжения компонент  $\sigma_{nx}^e, \sigma_{ny}^e$  для нахождения из упругой задачи поля  $\sigma_n^e$ , а затем условие сопряжения компоненты  $\sigma_{nx}^e$  для нахождения коэффициента  $\rho_n$ ), в рассматриваемом случае нуждается в дополнении.

Условия сопряжения при наличии зоны  $P_\epsilon^+$ , вообще говоря, содержат параметры, описывающие поле напряжений в этой зоне и положение границы зон  $P_\epsilon^-, P_\epsilon^+$ . Эти величины могут неполностью определяться предыдущими приближениями, как, например, параметр  $A_0$  в условии (4.13). Чтобы найти их значения, следует использовать условия допустимости (отсутствие выхода за поверхность текучести) напряжений в упругой зоне. Это условие гарантирует единственность решения плоской УПЗ [6] и поэтому позволяет определить значения всех свободных параметров.

**5. Поле напряжений в упругой зоне и граница зоны  $P_\epsilon^-$ .** Первый неизвестный член в разложении (4.11) поля напряжений в упругой зоне определяется решением  $\sigma_2^e(x, y)$

упругой задачи во внешности контура  $\bar{L}_0 = l_{\tau_0}, y = 0$  со следующими краевыми условиями. На всем контуре  $L_0$  в силу соотношения (4.12) и (4.13) должно выполняться условие отсутствия нагрузки; должны также выполняться первые из краевых условий типа (4.16).

Решением этой задачи является

$$\sigma_2^e(x, y) = \partial \sigma_\tau(x, y) / \partial \tau |_{\tau = \tau_0} \quad (5.1)$$

где  $\sigma_\tau(x, y)$  — решение ЗС со стандартным полем  $\sigma^P$  при значении  $\tau$  параметра нагружения (выполнение краевых условий на контуре  $L_0$  проверяется при помощи геометрических условий совместности на изменяющемся с параметром  $\tau$  контуре сопряжения  $l_\tau$ ).

Коэффициент  $\rho_2(x)$  в представлении кривой  $L_\epsilon$  находится из условия сопряжения (4.12) для компоненты  $\sigma_{2x}^e$ :

$$\rho_2(x) = \rho_2^c(x) = -\sigma_{2x}^e(x, 0) (\partial \sigma_{0x}(x, 0) / \partial y)^{-1} \quad (5.2)$$

где  $\rho_2^c(x)$  — первый член разложения в представлении  $y = \rho_\epsilon^c(x) = \epsilon^2 \rho_2^c(x) \pm \epsilon^4 \rho_4^c(x) + \dots$  контура сопряжения  $l_{\tau_0 + \epsilon^2}$  решения ЗС.

Аналогично с использованием условий (4.12) и (4.14) находятся  $\sigma_3^e(x, y) = 0$ ,  $\rho_3(x) = 0$ . Таким образом, поле напряжений в упругой зоне и уравнение кривой  $L_\epsilon$  имеют вид

$$\sigma_\epsilon^e(x, y) = \sigma_0^e(x, y) + \epsilon^2 \sigma_2^e(x, y) + O(\epsilon^4)$$

$$\sigma_2^e = \partial \sigma_\tau / \partial \tau |_{\tau = \tau_0}, y = \rho_\epsilon(x) = \epsilon^2 \rho_2(x) + O(\epsilon^4) \quad (5.3)$$

$$\rho_2(x) = \rho_2^c(x)$$

Найденное уравнение кривой  $L_\epsilon$  позволяет найти в первом приближении и уравнение оставшегося участка границы зоны  $P_\epsilon^-$  — характеристики  $L_\epsilon^-$ . Действительно, в соответствии с оценкой (разд. 4) размер зоны  $P_\epsilon^-$  в направлении  $x$  (расстояние между общими точками кривой  $L_\epsilon$  и характеристики  $L_\epsilon^-$ ) имеет порядок  $\epsilon$ . Это возможно лишь при

$$r_2 = \rho_2^c(0) = -\sigma_{2x}^e(0, 0) ((\partial \sigma_{0x} / \partial y)(0, 0))^{-1} \quad (5.4)$$

Найдем далее приближения для границы пластической зоны, поля напряжений  $s_\epsilon$  в зоне  $P_\epsilon^+$  и ограничивающей ее характеристики  $L_\epsilon^-$ . Другими словами, найдем функцию  $\rho_2^+(\frac{x}{\epsilon})$  и параметр  $A_0$ , а также функцию  $\rho_3^+(\frac{x}{\epsilon})$  и параметр  $r_3$ , удовлетворяющие условиям сопряжения (4.13), (4.14) для компоненты  $\sigma_x^e$ . Как отмечено в разд. 4, условия сопряжения не исчерпывают произвол в определении этих величин и необходимо использовать условие допустимости напряжений.

**6. Условие допустимости напряжений.** Граница пластической зоны. Поле напряжений  $\sigma_\epsilon^e(x, y)$  в силу соотношения (5.3) близко к решению ЗС,  $\sigma_\epsilon^e(x, y) = \sigma_{\tau_0 + \epsilon^2}(x, y) + O(\epsilon^4)$ . Поэтому нарушение условия допустимости напряжений возможно лишь в окрестности той области, где выходит за поверхность текучести решение ЗС  $\sigma_{\tau_0 + \epsilon^2}$ , т.е. вблизи точки  $x = 0, y = 0$ . В связи с этим для применения условия допустимости напряжений рассмотрим разложение по  $x, y, \epsilon$  функции

$$F(\sigma_\epsilon^e(x, y)) = F(\sigma_0^e(x, y) + \epsilon^2 \sigma_2^e(x, y) + \epsilon^4 \sigma_4^e(x, y) + \dots)$$

в окрестности точки  $x = 0, y = 0, \epsilon = 0$ .

Используя краевые условия (4.14), (4.15) и следующие из результатов п. 2 равенств-

ва в точке  $x = 0, y = 0$

$$\sigma_y^p - \sigma_x^p = 0, \quad \partial(\sigma_y^p - \sigma_x^p)/\partial x = 0, \quad \partial\sigma_{xy}^p/\partial x = 0$$

$$\partial\sigma_{0xy}/\partial y = 0, \quad \partial^2\sigma_{0xy}^e/\partial x\partial y = 0$$

получаем выражение (отброшены члены более высокого порядка малости, чем  $\epsilon^4$ )

$$F(\sigma^e(x, y)) = ay^2 + (b_1 x^2 + b_2 \epsilon^2) y + c_1 x^2 \epsilon^2 +$$

$$+ c_{21} \left\{ d_1 \left(\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)^2 + d_2 \rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + A_0 \left(\frac{1}{2} f_{xxx} \frac{x^2}{\epsilon^2} + f_{x\eta} r_2\right) \left(\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - r_2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} \right] \left(\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - r_2\right)^2 \right\} \epsilon^4 + c_{22} \epsilon^4 + \dots \quad (6.1)$$

$$a = 4 \sigma_{xy}^p \frac{\partial^2 \sigma_{0xy}^e}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial \sigma_{0y}^e}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{0x}^e}{\partial y} \right)^2$$

$$b_1 = \frac{\partial^2 (\sigma_y^p - \sigma_x^p)}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \sigma_{0y}^e}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{0x}^e}{\partial y} \right) + 4 \sigma_{xy}^p \frac{\partial^3 \sigma_{0xy}^e}{\partial x^2 \partial y}$$

$$b_2 = -2 \sigma_{2x}^e \left( \frac{\partial \sigma_{0y}^e}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{0x}^e}{\partial y} \right) + 8 \sigma_{xy}^p \frac{\partial \sigma_{2xy}^e}{\partial y}$$

$$c_1 = -\sigma_{2x}^e \frac{\partial^2 (\sigma_y^p - \sigma_x^p)}{\partial x^2}, \quad c_{21} = 8 \sigma_{xy}^p, \quad c_{22} = (\sigma_{2x}^e)^2$$

$$d_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{0xy}^e}{\partial y^2}, \quad d_2 = -\frac{\partial \sigma_{2xy}^e}{\partial y}$$

Напряжения и их производные в формулах для коэффициентов  $a, b_1, b_2, c_1, c_{21}, c_{22}, d_1, d_2$  вычисляются в точке  $x = 0, y = 0$ ; для величин  $f_{x\eta}, f_{xxx}, [\partial^2 \sigma_{xy}/\partial y^2]$  имеются формулы (4.8), (4.9); величины  $\rho_2^+(x/\epsilon)$  и  $A_0$  связаны соотношением (4.13).

*Условие допустимости напряжений.* Рассмотрим уравнение  $F(\sigma_\epsilon^e(x, y)) = 0$  относительно  $y$  при фиксированном значении координаты  $x$ . Кривые  $y(x)$ , соответствующие корням этого уравнения, определяют область, в которой напряжения выходят за поверхность текучести  $F(\sigma_\epsilon^e(x, y)) > 0$ . Приравняв нулю выражение (6.1), можно проверить, что одним из корней этого уравнения при  $\sigma_{2x}^e(0,0) \neq 0$  является  $y_1 = \epsilon^2 \rho_2^+$  (это естественно, поскольку кривая  $y = \rho_\epsilon^+(x) = \epsilon^2 \rho_2^+(x/\epsilon) + \dots$  — граница пластической зоны, на которой в силу непрерывности напряжений выполняется равенство  $F(\sigma_\epsilon^e(x, y)) = 0$ ). Вторым корнем рассматриваемого уравнения является тогда

$$y_2 = -\epsilon^2 (a^{-1} (b_1 x^2 / \epsilon^2 + b_2) + \rho_2^+(x/\epsilon)) \quad (6.2)$$

Условие допустимости напряжений в зоне  $E_\epsilon$  означает, что с ней не пересекается область, в которой  $F(\sigma_\epsilon^e(x, y)) > 0$ . Это эквивалентно условию  $y_2 \leq y_1$ , т.е. неравенству

$$\rho_2^+(x/\epsilon) - a^{-1} (b_1 x^2 / \epsilon^2 + b_2) \leq \rho_2^+(x/\epsilon) \quad (6.3)$$

*Условие допустимости решения ЗС при докритической нагрузке и оценка размеров зоны  $V_{\tau_0 + \epsilon^2}$  при закритической нагрузке.* Если построение разд. 5 проводить, считая, что зона  $P_\epsilon^+$  отсутствует,  $\rho_\epsilon^+(x) = \rho_\epsilon(x)$ , то оно приводит к решению ЗС. Для значений  $\tau_0 \pm \epsilon^2$  параметра нагружения это решение дается разложением  $\sigma_0^e(x, y) \pm \epsilon^2 \sigma_2^e(x, y) + \dots$ . Соответственно формула (6.1), если положить в ней  $\rho_2^+(x/\epsilon) = r_2$  и при  $\tau = \tau_0 - \epsilon^2$  заменить  $\epsilon^2$  на  $-\epsilon^2$  дает разложение функции  $F(\sigma_{\tau_0 \pm \epsilon^2}(x, y))$ . Одним из корней уравнения, определяющего границы области, в которой напряжения  $\sigma_{\tau_0 \pm \epsilon^2}$  выходят за поверхность текучести, являются  $y_1(x) = \pm \epsilon^2 r_2$ , другой —  $y_2(x)$ , находится по формуле (6.2) с заменой  $\rho_2^+$  на  $r_2$  (и  $\epsilon^2$  на  $-\epsilon^2$  при  $\tau = \tau_0 - \epsilon^2$ ).

При докритической нагрузке решение ЗС  $\sigma_{\tau_0 - \epsilon^2}$  не выходит за поверхность текучести в области, лежащей вне контура сопряжения  $l_{\tau_0 - \epsilon^2}$ . Условие допустимости напряжений  $y_2(x) \leq y_1(x)$  сводится в первом приближении к неравенству

$$b_1/a \geq 0, \quad 2\rho_2^c(0) + b_2/a \leq 0 \quad (6.4)$$

При закритической нагрузке решение ЗС  $\sigma_{\tau_0 + \epsilon^2}$  выходит за поверхность текучести в области  $V_{\tau_0 + \epsilon^2}$ . Она определяется в первом приближении условием  $y_1(x) < y < y_2(x)$ . Отсюда видно, что область  $V_{\tau_0 + \epsilon^2}$  имеет в направлении  $x$  размер порядка  $\epsilon$ , в направлении  $y$  — размер порядка  $\epsilon^2$ . Величина  $F(\sigma_{\tau_0 + \epsilon^2}(x, y))$  в области  $V_{\tau_0 + \epsilon^2}$  положительна и имеет порядок  $\epsilon^4$ .

*Распространение пластической зоны и величина  $A_0$ .* В дальнейшем считается, что во втором из соотношений (6.4) выполняется строгое неравенство (замечание п. 2 относится к этому предположению). Тогда при закритической нагрузке пластическая зона решения УПЗ распространяется во внешность контура сопряжения решения ЗС (в окрестности точки  $x = 0, y = 0$ ),  $\rho_2^+(0) > \rho_2^c(0)$ . Действительно, при значении  $\tau_0 + \epsilon^2$  параметра нагружения контур сопряжения в ЗС описывается соотношением  $y = \rho_\epsilon^c(x) = \epsilon^2 \rho_2^c(x) + \dots$ , а по критериям допустимости (6.3), (6.4) со строгим неравенством справедливо соотношение  $\rho_2^c(0) < \rho_2^+(0)$ .

Покажем, что  $A_0 = (\partial\sigma_{0x}/\partial y)(0,0)$ . Действительно, условие сопряжения (4.13) с учетом равенства  $\rho_2^- = r_2$  и формулы (5.4) эквивалентно соотношению

$$\left(\frac{\partial\sigma_{0x}}{\partial y}(0,0) - A_0\right) \left(\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - r_2\right) = 0$$

Покажем, что если второй множитель обращается в нуль, то не везде в зоне  $E_\epsilon$  выполняется условие допустимости напряжений. Действительно, пластическая зона  $P_\epsilon^+$  располагается между кривыми  $L_\epsilon^-$  и  $L_\epsilon^+$ . Если рассматриваемый множитель обращается в нуль, то в силу формул (4.2), (5.4) кривая  $L_\epsilon^+$  отстоит от кривой  $L_\epsilon^-$  (а значит, и от контура сопряжения) на величину порядка  $\epsilon^3$ . В то же время граница области  $V_{\tau_0 + \epsilon^2}$  отстоит от контура сопряжения на величину порядка  $\epsilon^2$ . Следовательно, часть области  $V_{\tau_0 + \epsilon^2}$  не перекрывается зоной  $P_\epsilon^+$  и расположена в зоне  $E_\epsilon$ . В области  $V_{\tau_0 + \epsilon^2}$  поле напряжений  $\sigma_{\tau_0 + \epsilon^2}$  выходит за поверхность текучести. В силу соотношений (5.3) и поле напряжений  $\sigma_\epsilon^e$  также выходит за поверхность текучести в области  $V_{\tau_0 + \epsilon^2} \cap E_\epsilon$ . Таким образом, напряжения  $\sigma_\epsilon^e$  недопустимы и, следовательно, равенство  $\rho_2^+(x/\epsilon) - r_2 = 0$  не может выполняться. Это означает, что справедлива указанная выше формула для  $A_0$ . Условие допустимости также должно проверяться при расчетах и в этом случае.

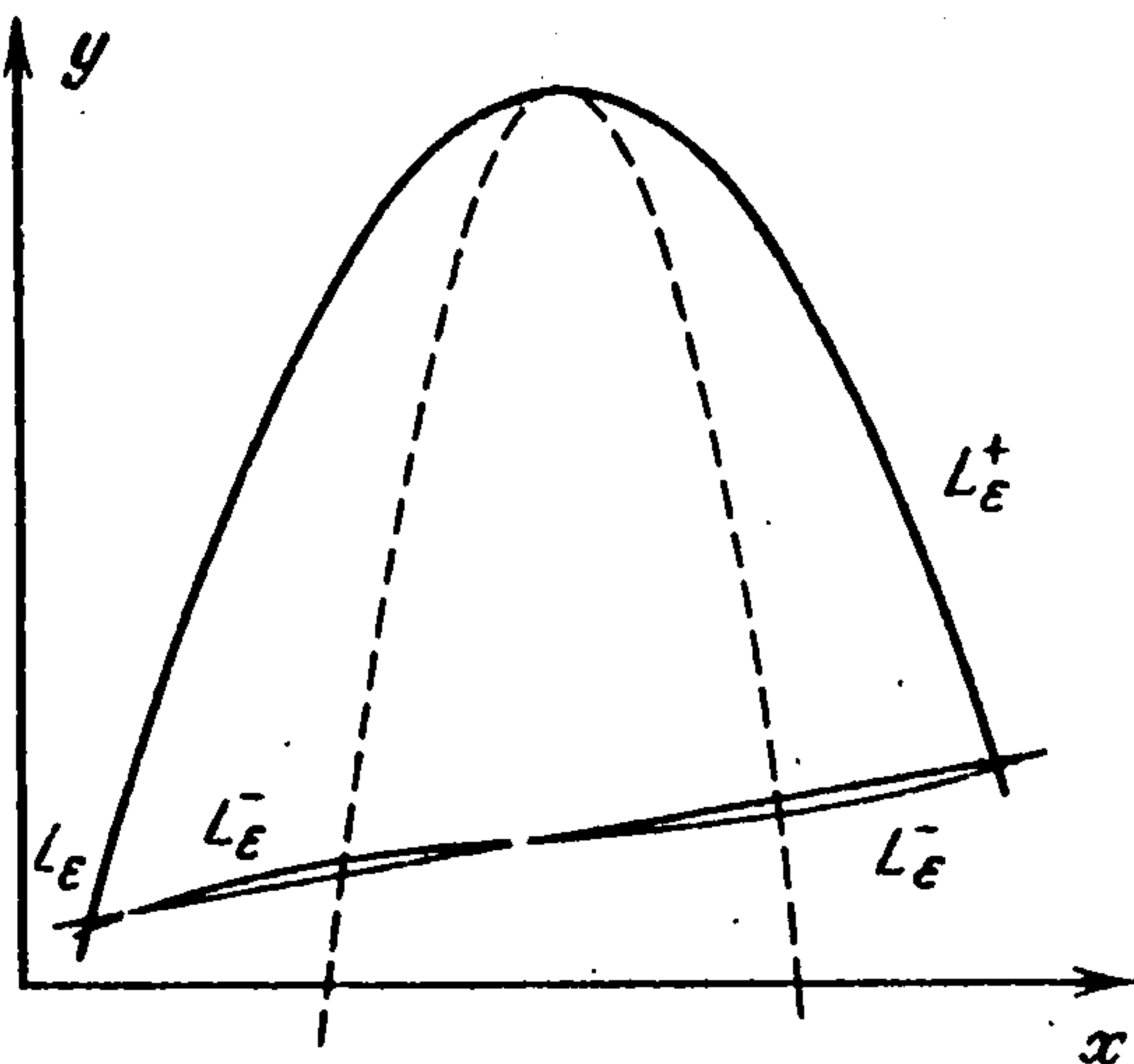
В силу равенства  $A_0 = (\partial\sigma_{0x}/\partial y)(0,0)$  оказывается удовлетворенным и последнее из условий сопряжения (4.13). В то же время граница пластической зоны (описывающая ее положение функция  $\rho_2^+(x/\epsilon)$ ) еще не найдена.

*Граница пластической зоны.* Для определения кривой  $L_\epsilon^+$  служит последнее из условий сопряжения для  $\sigma_2^e, \sigma_3^e$ , оставшееся неудовлетворенным соотношение (4.14) для компоненты  $\sigma_{3x}^e$ . С учетом равенства  $A_0 = (\partial\sigma_{0x}/\partial y)(0,0)$  и выражения (4.2) для величины  $\rho_3^-$  оно принимает вид

$$\frac{x}{\epsilon} \left\{ -M\rho_2^+\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{1}{6}A_0 f_{xxx} \frac{x^2}{\epsilon^2} + N \right\} + A_0 r_3 = 0$$

$$M \equiv A_0' - \frac{\partial^2\sigma_{0x}}{\partial x\partial y}(0,0), \quad N \equiv \frac{\partial\sigma_{2x}^e}{\partial x}(0,0) + A_0 f_{x\eta} r_2 + A_0' r_2$$

(величина  $A_0'$  определена формулой (4.6)). Отсюда при  $A_0 \neq 0, M \neq 0$  (к этим усло-



Фиг. 5

виям относится замечание из разд. 2) находим

$$\rho_2^+ \left( \frac{x}{\epsilon} \right) = \left( \frac{1}{6} A_0 f_{xxx} \frac{x^2}{\epsilon^2} + N \right) / M, \quad r_3 = 0 \quad (6.5)$$

*Замечание.* Граница зоны  $P_\epsilon^+$  не совпадает ни с контуром сопряжения  $l_{\tau_0 + \epsilon^2}$  в ЗС, ни с границей области, в которой решение ЗС выходит за поверхность текучести.

Таким образом, в дополнение к приближениям для поля напряжений в упругой зоне и участка границы  $L_\epsilon$  между упругой и пластической зонами (соотношение (5.3)) найдены соответствующие приближения для: 1) оставшегося участка  $L_\epsilon^+$  этой границы — соотношение (6.5), 2) границы между пластическими зонами  $P_\epsilon^-$  и  $P_\epsilon^+$ , кривой  $L_\epsilon^-$  — соотношение (4.2), в которое входят величины, определяемые из формул (4.8), (5.4), (6.5), 3) поля напряжений в зоне  $P_\epsilon^+$ . Последнее дается формулой (4.10), в которой при отбрасывании членов более высокого порядка малости чем  $\epsilon^3$  оставшиеся слагаемые полностью определяются найденными уже величинами  $A_0$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ , поскольку они позволяют с нужной точностью найти входящие в (4.10) скачки (4.7) и функцию (4.2)  $\rho_\epsilon^-(x)$ .

7. Развитие пластической зоны около кругового отверстия. Для плоскости с ненагруженным круговым отверстием (пример из разд. 1) рассмотрим двухосное нагружение на бесконечности  $p = \tau p_0$ ,  $q = \tau q_0$ , удовлетворяющее условиям (1.2). Критическим является значение  $\tau_0 = (\sqrt{2}-1)/|q_0 - p_0|$ . При помощи известного решения [1] можно проверить, что вырождение (см. замечание из разд. 2) в этом случае отсутствует, и вычислить величины (4.8),  $A_0 = (\partial \sigma_{0x} / \partial y)(0,0)$  и другие входящие в формулу (6.5).

На фиг. 5 в качестве примера показаны результаты расчетов границ пластической зоны — графики функций  $y = \epsilon^2 \rho_2(x)$  (соответствует кривой  $L_\epsilon$ ),  $y = \epsilon^2 \rho_2^-(x/\epsilon) + \epsilon^3 \rho_3^-(x/\epsilon)$  (соответствует кривой  $L_\epsilon^-$ ),  $y = \epsilon^2 \hat{\rho}_2^+(x/\epsilon)$  (соответствует кривой  $L_\epsilon^+$ ), а также изображенный пунктирной кривой график функции  $y = \epsilon^2 \hat{\rho}_2(x/\epsilon)$ , где  $\hat{\rho}_2(x/\epsilon)$  — выражение в левой части неравенства (6.3). Расчеты проведены при  $p_0 = 1.5$ ,  $q_0 = \sqrt{2} + 0.5$ ,  $\epsilon^2 = 10^{-3}$ . Расположение кривых  $y = \epsilon^2 \rho_2^+$  и  $y = \epsilon^2 \hat{\rho}_2$  показывает, что для рассматриваемого решения выполнено условие допустимости напряжений в зоне  $E_\epsilon$ .

Кривая  $L_\epsilon$  в первом приближении совпадает с эллипсом — контуром сопряжения в решении ЗС при  $\tau = \tau_0 + \epsilon^2$ . Полная пластическая зона рассматриваемого решения УПЗ в первом приближении получается добавлением к "пластической зоне" решения ЗС части плоскости, внешней границей которой является кривая  $y = \epsilon^2 \rho_2^+(x/\epsilon)$ .

Отметим, что независимо от значений  $p_0$ ,  $q_0$  развитие пластической зоны  $P_\epsilon^+$  начинается из точки, которая лежит на контуре сопряжения  $l_{\tau_0}$ , соответствующем критической нагрузке, и расположена на луче, образующем угол  $\pi/8$  с направлением оси  $x$ . Развитие таких же зон начинается и из точек, симметричных указанной относительно осей  $x$  и  $y$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Упругопластические задачи, М.: Наука, 1984. 232 с.
2. Григорьев П.А., Каменярж Я.А., Якушева Е.В. Безопасные нагрузки при растяжении полосы и плоскости с отверстиями // Вестн. МГУ. Сер. 1 Математика, механика. 1990. № 3. С. 46–51.
3. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.
4. Остросаблин Н.И. Плоское упругопластическое распределение напряжений около круговых отверстий. Новосибирск: Наука, 1984. 113 с.
5. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
6. Cimatti G. Elastoplastic deformation in multiply-connected domains // *Mechanica*. 1975. V. 10. № 2. P. 87–92.
7. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
8. Быковцев Г.И., Цветков Ю.Д. Двумерная задача нагружения упругопластической плоскости, ослабленной отверстием // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 314–322.
9. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.

Москва

Поступила в редакцию  
24.X.1991