

УДК 539.3

© 1993 г. Ю.А. Антипов, Н.Х. Арутюнян

### КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ С НАКЛАДКАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ

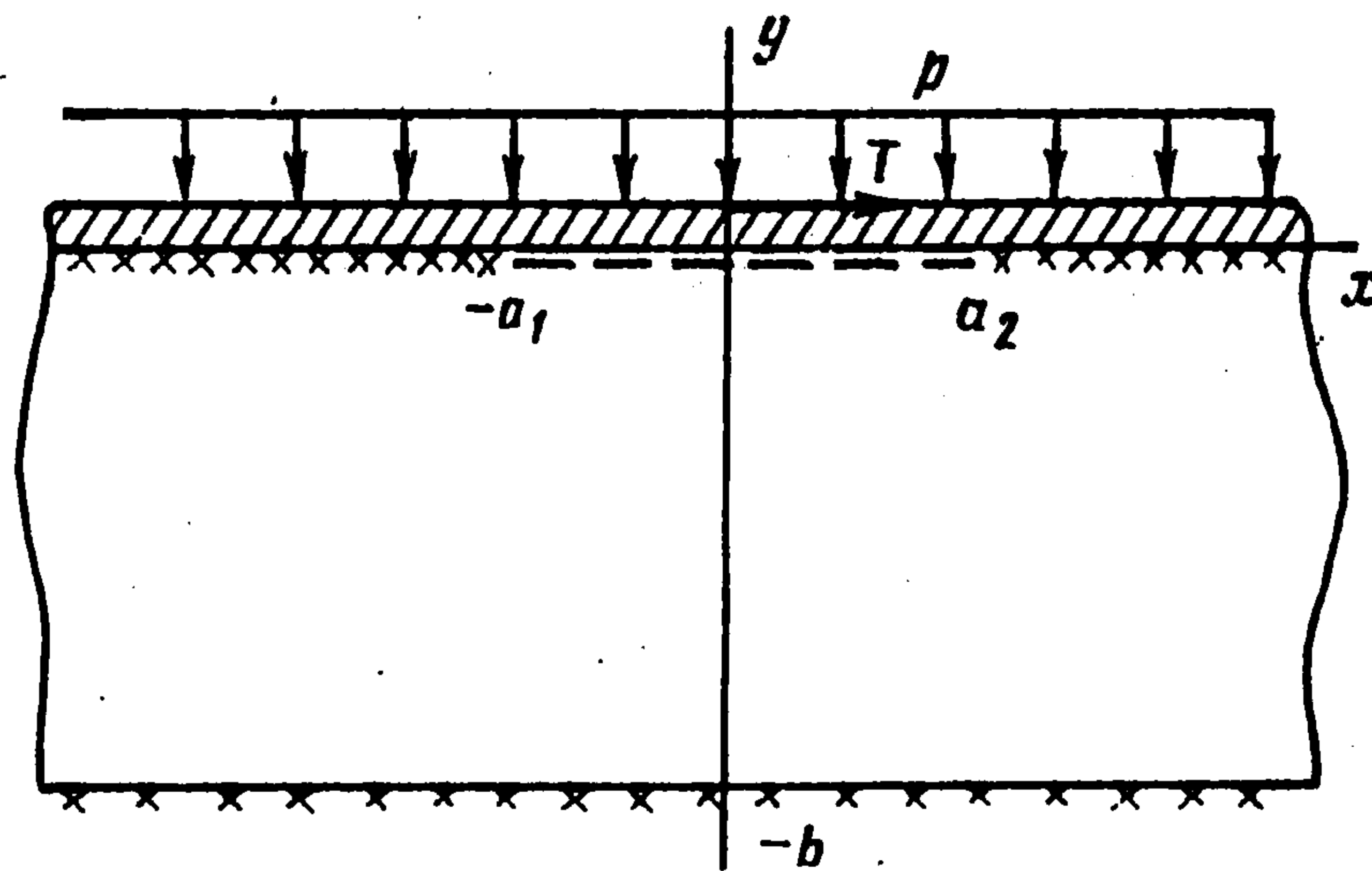
Рассматривается контакт упругого слоя с бесконечной накладкой, к которой приложены равномерно распределенная постоянная нормальная нагрузка и сосредоточенная касательная сила. В окрестности точки приложения этой силы на линии контакта накладки со слоем выделяется участок кулоновского трения; вне его накладка со слоем полностью сцеплена. Задача сводится к интегродифференциальному уравнению типа Прандтля на двух полубесконечных отрезках, для решения которого предлагается аналитический метод, основанный на сведении уравнения к векторной задаче Римана, а затем к бесконечной алгебраической системе Пуанкаре — Коха, допускающей явное решение, а также обращение в терминах рекуррентных соотношений, эффективных при численной реализации. Найдены длина зоны кулоновского трения, а также контактные касательные напряжения в области сцепления. В отличие от задачи Мелана [1] контактные напряжения не имеют логарифмической особенности и всюду в области контакта непрерывны.

Получено также решение задачи о контакте слоя с конечной накладкой, которая подвержена равномерному давлению по всей длине и растяжению сосредоточенными на концах силами. Зона контакта разбита на срединный участок сцепления и два участка кулоновского трения. Задача сводится к интегродифференциальному уравнению типа Прандтля на отрезке, которое решается аналогично уравнению первой задачи. При такой постановке касательные контактные напряжения ограничены на концах накладки и непрерывны в точках перехода от участка сцепления к зонам кулоновского трения. При сцеплении по всей линии контакта касательные напряжения, вообще говоря, имеют [2] корневую особенность. В задаче о контакте плоского штампа с полуплоскостью при наличии трения и сцепления контактные напряжения на концах штампа имеют [3] степенную (отличную от корневой) особенность.

**1. Контактная задача для упругого слоя с бесконечной накладкой в условиях трения и сцепления.** Пусть бесконечный стрингер  $\{-\infty < x < +\infty, 0 < y < h\}$  с модулем упругости  $E_0$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_0$  прикреплен к упругой полосе  $\{-\infty < x < +\infty, -b < y < 0\}$  с соответствующими упругими постоянными  $E, \nu$  (фиг. 1). Рассматривается плоская деформация упругой полосы, сцепленной с жестким основанием. На накладку действует нормальная равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $p$  и сосредоточенная касательная нагрузка  $T$  (точка приложения  $x = 0$ ). Зона контакта разбивается на участки сцепления  $x < -a$  и  $x > a$  и зону кулоновского трения  $|x| < a$ . Требуется найти положение точки  $a$  и закон распределения контактных касательных напряжений  $\tau(x)$  на линии соединения стрингера с полосой.

Уравнение равновесия стрингера приводит к выражению для его осевой деформации

$$\epsilon_x^0(x) = \frac{1-\nu_0^2}{hE_0} \left[ \int_{-\infty}^x \tau(\xi) d\xi - TH(x) \right] \quad (1.1)$$



Фиг. 1

где  $H(x)$  – функция Хевисайда. Равновесие стрингера обеспечит условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) dx = T \quad (1.2)$$

Рассмотрим задачу о плоской деформации упругой полосы

$$\begin{aligned} \Delta^2 U(x, y) &= 0, \quad |x| < \infty, \quad -b < y < 0 \\ \sigma_y|_{y=0} &= \sigma(x), \quad \tau_{xy}|_{y=0} = \tau(x), \quad |x| < \infty \\ u|_{y=-b} &= 0, \quad v|_{y=-b} = 0, \quad |x| < \infty \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $U$  – функция Эри,  $\|u, v\|$  – вектор смещений,  $\sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненты тензора напряжений. При помощи преобразования Фурье приходим к следующему соотношению для горизонтальных деформаций полосы при  $y=0$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_x(x, 0) &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} [(\kappa_- \text{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2) \sigma_\alpha^0 - \kappa_+ (\kappa \text{sh} \alpha b \text{ch} \alpha b + \alpha b) i \tau_\alpha^0] \times \\ &\times [d(\alpha)]^{-1} e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad d(\alpha) = \kappa \text{sh}^2 \alpha b + \alpha^2 b^2 + \kappa_+^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\kappa_\pm = \frac{1}{2}(\kappa \pm 1), \quad \kappa = 3 - 4\nu, \quad \|\sigma_\alpha^0, \tau_\alpha^0\| = \int_{-\infty}^{\infty} \|\sigma(x), \tau(x)\| e^{i\alpha x} dx$$

Вследствие того что накладка лишена изгибной жесткости, имеем  $\sigma(x) = -p, |x| < \infty$ . На участке проскальзывания касательные и нормальные напряжения связаны соотношением ( $\mu$  – коэффициент трения)

$$\tau(x) = \mu p, \quad |x| < a$$

а на участках сцепления значения тангенциальных контактных напряжений недостаточны для того, чтобы вызвать проскальзывание:  $\tau(x) < \mu p, |x| > a$ . Кроме того, должны совпадать горизонтальные деформации  $\epsilon_x^0(x)$  и  $\epsilon_x(x, 0)$  накладки и полосы, т.е.

$$\epsilon_x^0(x) = \epsilon_x(x, 0), \quad |x| > a \quad (1.5)$$

В точке  $x = a$  напряжения  $\tau(x)$  должны быть ограниченными.

Подставим выражения (1.1) и (1.4) в соотношение (1.5), учтем, что  $\sigma_\alpha^0 = -2\pi p \delta(\alpha)$ ,

и введем новую неизвестную функцию

$$\chi(t) = bT^{-1}\tau(-a + bt) \quad (1.6)$$

В результате приходим к следующему интегродифференциальному уравнению типа Прандтля

$$\int_{-\infty}^t \chi(\tau) d\tau + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} S(t-\tau)\chi(\tau) d\tau = H\left(t - \frac{\lambda}{2}\right) \quad (1.7)$$

$$t \in (-\infty, 0) \cup (\lambda, \infty), \quad \gamma = 2hE_0(1 - \nu^2)b^{-1}E^{-1}(1 - \nu_0^2)^{-1}, \quad \lambda = 2ab^{-1} \quad (1.8)$$

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \alpha}{\kappa \operatorname{sh}^2 \alpha + \alpha^2 + \kappa_+^2} \sin \alpha t d\alpha, \quad \chi(t) = p_0 \quad (0 < t < \lambda), \quad p_0 = \frac{\mu p b}{T}$$

Решение уравнения (1.7) ищем в классе ограниченных в точках  $t=0$  и  $t=\lambda$  функций. Введем односторонние функции

$$\chi_-(t) = \begin{cases} \chi(t), & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}, \quad \chi_+(t) = \begin{cases} \chi(t), & t > \lambda \\ 0, & t < \lambda \end{cases}$$

$$f_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \lambda \\ 0, & t \notin (0, \lambda) \end{cases}, \quad \chi(t) = \chi_-(t) + \chi_+(t) + p_0 f(t), \quad |t| < \infty \quad (1.9)$$

и доопределим уравнение (1.7) на всю вещественную ось при помощи функции  $\chi_0(t)$ , неизвестной на отрезке  $0 < t < \lambda$  и обращающейся в нуль вне этого отрезка. Имеем

$$\int_{-\infty}^t \chi(\tau) d\tau + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} S(t-\tau)\chi(\tau) d\tau = H\left(t - \frac{\lambda}{2}\right) + \chi_0(t), \quad |t| < \infty$$

Введем в рассмотрение трансформанты Фурье

$$\Phi_1^+(\alpha) = \int_0^{\lambda} \chi_0(t) e^{i\alpha t} dt, \quad \Phi_1^-(\alpha) = \int_{-\lambda}^0 \chi_0(\lambda+t) e^{i\alpha t} dt$$

$$\Phi_2^+(\alpha) = \int_0^{\infty} \chi(\lambda+t) e^{i\alpha t} dt, \quad \Phi_2^-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \chi(t) e^{i\alpha t} dt \quad (1.10)$$

Функции  $\Phi_1^{\pm}(\alpha)$  целые, а  $\Phi_2^{\pm}(\alpha)$  аналитические в  $C^{\pm}$ :  $\operatorname{Im} \alpha \geq 0$ . Далее, учитывая соотношения [4]

$$V[H(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{i\alpha t} dt = -\frac{i}{\alpha + i0}$$

$$V\left[\int_{-\infty}^t \chi(\tau) d\tau\right] = \frac{i}{\alpha + i0} [\Phi_2^-(\alpha) + e^{i\alpha\lambda} \Phi_2^+(\alpha) + \frac{p_0}{i\alpha} (e^{i\alpha\lambda} - 1)]$$

а также вследствие (1.10) связь

$$\Phi_1^+(\alpha) = e^{i\alpha\lambda} \Phi_1^-(\alpha)$$

приходим к векторной задаче Римана

$$G(\alpha) [\Phi_2^{\pm}(\alpha) + e^{\mp i\alpha\lambda} \Phi_2^{\mp}(\alpha) \pm \frac{p_0}{i\alpha} (1 - e^{\mp i\alpha\lambda})] = -i\alpha \Phi_1^{\mp}(\alpha) + e^{\mp i\alpha\lambda/2}$$

$$-\infty < \alpha < +\infty \quad (1.11)$$

$$G(\alpha) = 1 + \gamma \alpha (\kappa \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha + \alpha) (\kappa \operatorname{sh}^2 \alpha + \alpha^2 + \kappa_+^2)^{-1}$$

Факторизация функции  $G(\alpha)$  определяется соотношениями

$$G(\alpha) = K^+(\alpha) X^+(\alpha) K^-(\alpha) X^-(\alpha), \quad X^\pm(\alpha) = [X(\alpha)]^{\pm 1}, \quad \alpha \in C^\pm \quad (1.12)$$

$$K^\pm(\alpha) = (\pi\gamma)^{1/2} \frac{\Gamma(1 \mp i\alpha/\pi)}{\Gamma(1/2 \mp i\alpha/\pi)}, \quad X(\alpha) = \exp\left(\frac{\alpha}{\pi i} \int_0^\infty \ln G_0(\eta) \frac{d\eta}{\eta^2 - \alpha^2}\right) \quad (\alpha \neq 0)$$

$$G_0(\alpha) = 1 + \frac{\text{th}\alpha}{\gamma\alpha} + \frac{\alpha \text{th}\alpha - \alpha^2 - \kappa_+^2}{\kappa \text{sh}^2\alpha + \kappa_+^2 + \alpha^2}, \quad X^\pm(0) = \gamma^{-1/2}$$

Подставим первую формулу из (1.12) в краевое условие (1.11) и получим

$$K^\pm(\alpha) X^\pm(\alpha) [\Phi_2^\pm(\alpha) \pm (i\alpha)^{-1} p_0] \mp (i\alpha)^{-1} p_0 = [K^\mp(\alpha) X^\mp(\alpha)]^{-1} \{-i\alpha \Phi_1^\mp(\alpha) + e^{\mp i\alpha\lambda/2} - e^{\mp i\alpha\lambda} G(\alpha) [\Phi_2^\mp(\alpha) \mp (i\alpha)^{-1} p_0]\} \mp (i\alpha)^{-1} p_0 \quad (1.13)$$

Левая часть последнего равенства аналитична в  $C^\pm$ , а правая имеет в  $C^\mp$  счетное множество полюсов, совпадающих с полюсами функции  $G(\alpha) : \alpha = \mp i\beta_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), причем  $\beta_1$  — вещественный корень функции

$$h(\beta) = \kappa_+^2 - \beta^2 - \kappa \sin^2 \beta$$

а  $\beta_{2m+j} = 1/2 [b_m - (-1)^j a_m i]$  ( $m = 1, 2, \dots; j = 0, 1$ ); числа  $z_m = a_m + ib_m$  — корни уравнения [5]

$$2\kappa \text{ch}z + z^2 + \kappa^2 + 1 = 0$$

определяемые по итеративной формуле

$$z_n^{(k)} = 2\pi ni + \ln \varphi(z_n^{(k-1)}) \quad (k = 2, 3, \dots), \quad z_n^{(1)} = 2\pi ni \quad (1.14)$$

$$\varphi(z) = -\kappa^{-1} (z^2 + \kappa^2 + 1) - e^{-z}$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Psi^\pm(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{iA_n^\pm}{\alpha \pm i\beta_n}$$

при помощи которых нейтрализуем полюсы правых частей равенств (1.13), находящиеся в  $C^\mp$ . Учитывая ограниченность касательных контактных напряжений  $\tau(x)$  в точках  $x = \pm a$ , из (1.13) находим решение задачи (1.11)

$$\Phi_1^+(\alpha) = \frac{i}{\alpha} \left\{ -e^{i\alpha\lambda/2} + K^+(\alpha) X^+(\alpha) \left[ \Psi^-(\alpha) - \frac{p_0}{i\alpha} \right] + \frac{e^{i\alpha\lambda} G(\alpha)}{K^-(\alpha) X^-(\alpha)} \times \right. \\ \left. \times [\Psi^+(\alpha) + (i\alpha)^{-1} p_0] \right\}, \quad \Phi_1^-(\alpha) = e^{-i\alpha\lambda} \Phi_1^+(\alpha) \quad (1.15)$$

$$\Phi_2^+(\alpha) = -\frac{p_0}{i\alpha} + \frac{\Psi^+(\alpha) + (i\alpha)^{-1} p_0}{K^+(\alpha) X^+(\alpha)}, \quad \Phi_2^-(\alpha) = \frac{p_0}{i\alpha} + \frac{\Psi^-(\alpha) - (i\alpha)^{-1} p_0}{K^-(\alpha) X^-(\alpha)}$$

Для того чтобы функции  $\Phi_1^+(\alpha)$ ,  $\Phi_1^-(\alpha)$  были аналитичны в точке  $\alpha = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\left\{ -e^{i\alpha\lambda/2} + K^+(\alpha) X^+(\alpha) \left[ \Psi^-(\alpha) - (i\alpha)^{-1} p_0 \right] + e^{i\alpha\lambda} K^-(\alpha) X^-(\alpha) \times \right. \\ \left. \times [\Psi^+(\alpha) + (i\alpha)^{-1} p_0] \right\} \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (1.16)$$

Принимая во внимание разложения в окрестности точки  $\alpha = 0$

$$G(\alpha) = 1 + O(\alpha^2), \quad K^+(\alpha) = \gamma^{1/2} [1 - i\alpha\pi^{-1}2\ln 2 + O(\alpha^2)]$$

$$X(\alpha) = \gamma^{-1/2} [1 - i\alpha d_0 + O(\alpha^2)], \quad \alpha \rightarrow 0$$

$$d_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{G'_0(\eta)}{G_0(\eta)} \frac{d\eta}{\eta} \quad (1.17)$$

получаем из (1.16)

$$\Psi^+(0) + \Psi^-(0) + (\lambda + 2d_0 + 4\pi^{-1}\ln 2)p_0 = 1 \quad (1.18)$$

Рассмотрим теперь условие равновесия стрингера (1.2). Учитывая (1.6), (1.9) и (1.10), вместо условия (1.2) имеем

$$\Phi_2^-(0) + \Phi_2^+(0) + p_0\lambda = 1 \quad (1.19)$$

Подстановка формул (1.15) в равенство (1.19) вследствие (1.17) приводит к соотношению (1.18). Таким образом, условие (1.16) аналитичности функций  $\Phi_1^\pm(\alpha)$  и условие равновесия (1.19) совпадают и приводят к равенству (1.18).

Функции  $\Phi_1^+(\alpha)$ ,  $\Phi_1^-(\alpha)$ , определенные в (1.15), в полуплоскостях  $C^+$ ,  $C^-$  соответственно имеют полюсы в точках  $i\beta_n$ ,  $-i\beta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Для их устранения необходимо и достаточно потребовать выполнения условий

$$\operatorname{res}_{\alpha = \pm i\beta_n} \{ e^{\pm i\alpha\lambda} G(\alpha) [K^\pm(\alpha) X^\pm(\alpha)]^{-2} [\Psi^\pm(\alpha) \pm (i\alpha)^{-1} p_0] + \Psi^\mp(\alpha) \} = 0$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

эквивалентных следующей бесконечной системе алгебраических уравнений Пуанкаре – Коха:

$$A_n^\pm = -\Delta_n e^{-\lambda\beta_n} \left( \pm \frac{p_0}{\beta_n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m^\mp}{\beta_n + \beta_m} \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\Delta_n = \frac{\gamma\beta_n}{2K_n^2 X_n^2}, \quad K_n = (\pi\gamma)^{1/2} \frac{\Gamma(1 + \pi^{-1}\beta_n)}{\Gamma(1/2 + \pi^{-1}\beta_n)} \quad X_n = \exp \left\{ \frac{\beta_n}{\pi} \int_0^\infty \ln G_0(x) \frac{dx}{x^2 + \beta_n^2} \right\}$$

(1.20)

которая, очевидно, приводит к связи  $A_n^+ = -A_n^- = A_n$ . Коэффициенты  $A_n$  удовлетворяют системе

$$A_n = \Delta_n e^{-\lambda\beta_n} \left( -\frac{p_0}{\beta_n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\beta_n + \beta_m} \right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

допускающей решение в терминах быстро сходящихся рекуррентных соотношений

$$A_n = e^{-\lambda\beta_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}, \quad a_{n0} = -\frac{\Delta_n p_0}{\beta_n} \quad a_{np} = \Delta_n \sum_{j=1}^p \frac{a_{j,p-j}}{\beta_n + \beta_j} e^{-\lambda\beta_j}$$

а также явное решение

$$a_{np} = -\Delta_n p_0 \left[ \frac{\Delta_p}{(\beta_n + \beta_p)\beta_p} + \frac{2}{\beta_n + \beta_1} \left( \frac{\Delta_1 e^{-\lambda\beta_1}}{2\beta_1} \right)^p + \sum_{m=1}^{p-2} \sum_{j_1=1}^{\sigma(0)-1} h_1 \sum_{j_2=1}^{\sigma(1)-1} h_2 \dots \sum_{j_m=1}^{\sigma(m-1)-1} \frac{h_m}{\beta_{\sigma(m)}} \frac{\Delta_{\sigma(m)}}{\beta_{j_m} + \beta_{\sigma(m)}} \right]$$

$$h_m = \frac{\Delta_{j_m}}{\beta_{j_m-1} + \beta_{j_m}} \exp(-\lambda\beta_{j_m}), \quad \sigma_m = p - j_1 - \dots - j_m, \quad \sigma(0) = p, \quad j_0 = n$$

Параметр  $\lambda$  (а значит, и  $a = \frac{1}{2}\lambda b$ ) находится из условия (1.18), которое преобразуется к виду

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\beta_n} + (\lambda + 2d_0 + 4\pi^{-1} \ln 2) p_0 = 1$$

Так как  $A_n = A_n(\lambda)$ , то последнее равенство является трансцендентным уравнением относительно  $\lambda$ .

Получим выражение для касательных контактных напряжений при  $|x| > a$  (если  $|x| < a$ , то  $\tau(x) = \mu p$ ). Вследствие (1.6) и (1.10) имеем

$$\tau(x) = T b^{-1} \chi(b^{-1}(x+a))$$

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{p_0}{i\alpha} + \frac{K^+(\alpha) X^+(\alpha)}{G(\alpha)} \left[ \Psi^-(\alpha) - \frac{p_0}{i\alpha} \right] \right\} e^{-i\alpha t} d\alpha, \quad t < 0 \quad (1.21)$$

$$\chi(\lambda + t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{p_0}{i\alpha} + \frac{K^-(\alpha) X^-(\alpha)}{G(\alpha)} \left[ \Psi^+(\alpha) + \frac{p_0}{i\alpha} \right] \right\} e^{-i\alpha t} d\alpha, \quad t > 0$$

Обозначим через  $\pm i\delta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) нули функции  $G(\alpha)$  в области  $C^{\pm}$ . Первый корень  $\delta_1$  веществен, а остальные комплексные:

$$\delta_{2m+j} = \frac{1}{2} [d_m - ic_m (-1)^j] \quad (m = 1, 2, \dots; j = 0, 1)$$

Числа  $z_m = c_m + id_m$  определяются итеративной формулой (1.14), в которой в качестве функции  $\varphi(z)$  следует взять следующую:

$$\varphi(z) = (1 + \frac{1}{2}\gamma z)^{-1} [-(1 + \gamma) \kappa^{-1} z^2 - (\kappa^2 + 1) \kappa^{-1} - (1 - \frac{1}{2}\gamma z) e^{-z}]$$

Пусть далее

$$K_n^0 = (\pi\gamma)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 + \pi^{-1}\delta_n)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \pi^{-1}\delta_n)}, \quad X_n^0 = \exp \left\{ \frac{\delta_n}{\pi} \int_0^{\infty} \ln G_0(x) \frac{dx}{x^2 + \delta_n^2} \right\}$$

$$G_n = \gamma e_n [\frac{1}{2} \kappa \sin 2\delta_n + \kappa \delta_n \cos 2\delta_n + 2\delta_n + 2\delta_n e_n (\frac{1}{2} \kappa \sin 2\delta_n + \delta_n)^2] \quad (1.22)$$

$$e_n = (\kappa^2 - \delta_n^2 - \kappa \sin^2 \delta_n)^{-1}$$

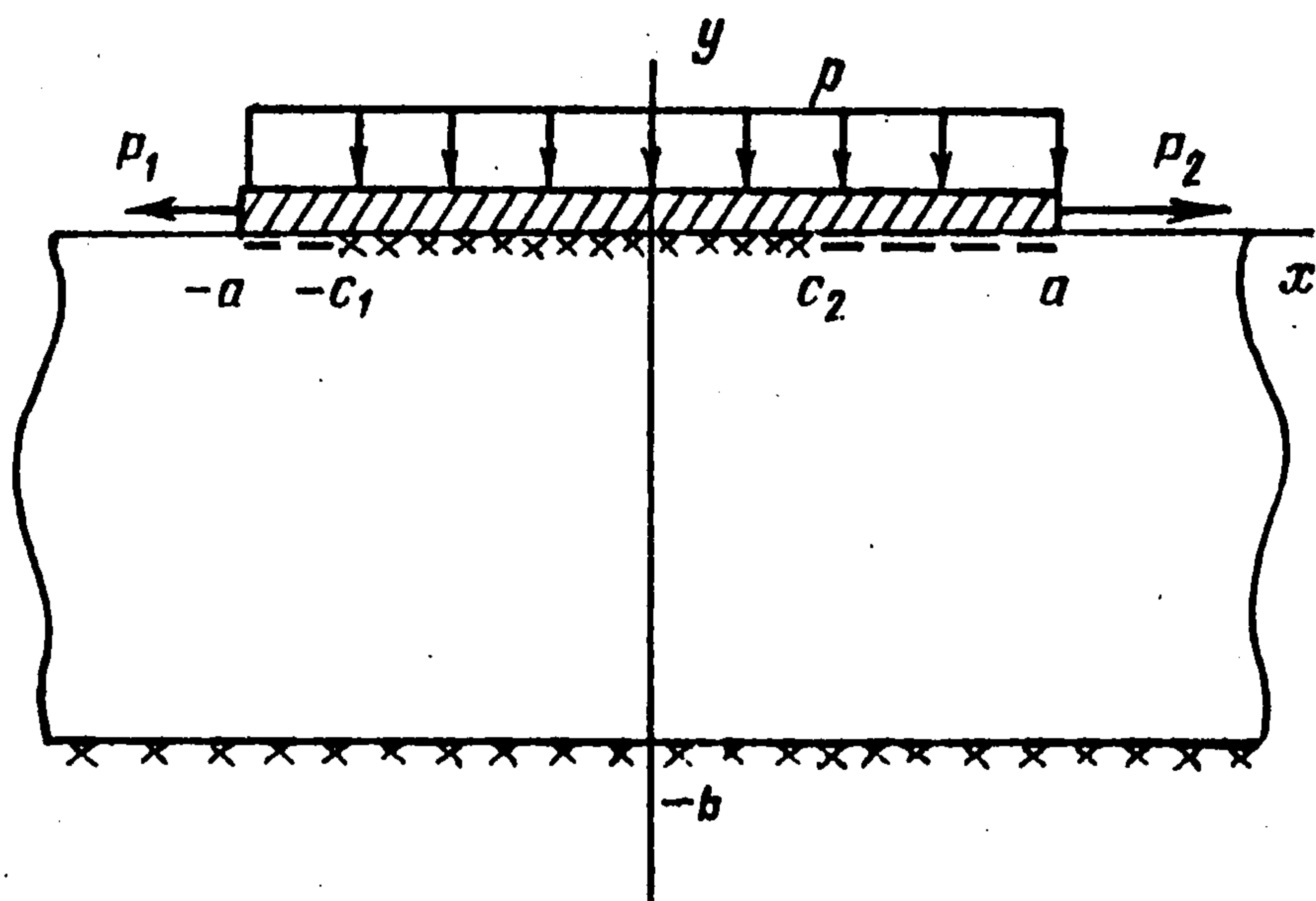
При помощи теории вычетов вычисляя интегралы (1.21), находим формулу для контактных напряжений

$$\tau(x) = \frac{T}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n^0 X_n^0}{G_n} \left( \frac{p_0}{\delta_n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\beta_m - \delta_n} \right) e^{\delta_n(a - |x|)/b}, \quad |x| > a$$

Вследствие теоремы тауберова типа из (1.15) вытекает непрерывность касательных напряжений  $\tau(x)$  в точках  $x = \pm a$ :  $\tau(\pm a) = \mu p$ .

2. Задача о давлении конечной накладке на упругий слой при наличии трения и сцепления. Рассмотрим плоскую деформацию упругого слоя  $\{-\infty < x < +\infty, -b < y < 0\}$  сцепленного с жестким основанием и усиленного конечным стрингером  $\{-a < x < a, 0 < y < h\}$  (фиг. 2). Упругие постоянные слоя и накладки те же, что и в разд. 1. Накладка вдавливается в слой при помощи нормальной равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $p$  и растягивается сосредоточенными на концах силами  $P_1$  и  $P_2$ . Площадка контакта разбивается на участок сцепления  $\{-c_1 < x < c_2, y = 0\}$  и два участка  $\{-a < x < -c_1, y = 0\}$  и  $\{c_2 < x < a, y = 0\}$ , на которых имеет место кулоново трение. Определим точки  $-c_1, c_2$  и контактные касательные напряжения  $\tau(x)$  на линии  $-c_1 < x < c_2$ .

Выражение для осевой деформации стрингера, соответствующее (1.1), в рассматри-



Фиг. 2.

ваемом случае имеет вид

$$\epsilon_x^0(x) = \frac{1 - \nu_0^2}{iE_0} \left[ \int_{-a}^x \tau(\xi) d\xi + P_1 \right] \quad (2.1)$$

Для равновесия стрингера необходимо потребовать выполнения условия

$$\int_{-a}^a \tau(x) dx = P_2 - P_1 \quad (2.2)$$

Решение задачи (1.3) для слоя в случае

$$\sigma_y = \begin{cases} 0, & |x| > a \\ -p, & |x| < a \end{cases}, \quad \tau_{xy} = \begin{cases} 0, & |x| > a \\ \tau(x), & |x| < a \end{cases}$$

вследствие (1.4) имеет вид

$$\epsilon_x(x, 0) = -\frac{2(1 - \nu^2)}{bE} \int_{-a}^a S\left(\frac{x - \xi}{b}\right) \tau(\xi) d\xi - \frac{(1 + \nu)p}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\alpha) e^{-i\alpha x/b} d\alpha \quad (2.3)$$

$$g_0(\alpha) = g_1(\alpha) \frac{e^{i\alpha\lambda_0} - e^{-i\alpha\lambda_0}}{i\alpha}, \quad g_1(\alpha) = \frac{\kappa\kappa \operatorname{sh}^2 \alpha - \alpha^2}{\kappa \operatorname{sh}^2 \alpha + \alpha^2 + \kappa_+^2}, \quad \lambda_0 = \frac{a}{b}$$

где  $S(t)$  — функция, определенная в (1.8). Подставляя выражения (2.1) и (2.3) в соотношение (1.5), выполняя замену переменных и вводя обозначения

$$t = x/b + \lambda_1, \quad \eta = \xi/b + \lambda_2, \quad \lambda_1 = c_1/b, \quad \lambda_2 = c_2/b \\ \chi(t) = b\tau(-c_1 + bt) \quad (2.4)$$

приходим к интегродифференциальному уравнению типа Прандтля

$$\int_{\lambda_1 - \lambda_0}^t \chi(\eta) d\eta + \gamma \int_{\lambda_1 - \lambda_0}^{\lambda_1 + \lambda_0} S(t - \eta) \chi(\eta) d\eta = -P_1 - \frac{\gamma_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\alpha) e^{i\alpha\lambda_1} e^{-i\alpha t} d\alpha \\ 0 < t < \lambda, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \gamma_0 = \frac{1}{2}pb\gamma(1 - \nu)^{-1} \quad (2.5)$$

где  $\gamma$  — параметр, определенный в (1.8).

Так как на участках  $-a < x < -c_1$  и  $c_2 < x < a$  выполняются условия кулонова трения,



Выберем коэффициенты  $A_n^\pm$  так, чтобы функции  $\Psi^+(\alpha)$ ,  $\Psi^-(\alpha)$  устранили полюсы правых частей равенств (2.10). Тогда ( $n=1, 2, \dots$ )

$$\operatorname{res}_{\alpha=-i\beta_n} \{ [K^-(\alpha)X^-(\alpha)]^{-1} e^{-i\alpha(\lambda_0-\lambda_1)} [(i\alpha)^{-1}\sigma G(\alpha) + \gamma_0 g_1(\alpha)] - \Psi^+(\alpha) \} = 0$$

$$\operatorname{res}_{\alpha=i\beta_n} \{ [K^+(\alpha)X^+(\alpha)]^{-1} e^{i\alpha(\lambda_0-\lambda_2)} [-(i\alpha)^{-1}\sigma G(\alpha) + \gamma_0 g_1(\alpha)] - \Psi^-(\alpha) \} = 0$$

откуда находим явные формулы для  $A_n^\pm$ .

$$A_n^+ = e^{-\beta_n(\lambda_0-\lambda_1)} q_n, \quad A_n^- = e^{-\beta_n(\lambda_0-\lambda_2)} q_n$$

$$q_n = \frac{1}{2K_n X_n} \left( \gamma\sigma + \gamma_0 \frac{\kappa\kappa_- \sin^2 \beta_n - \beta_n^2}{\frac{1}{2}\kappa \sin 2\beta_n + \beta_n} \right)$$

Величины  $K_n, X_n$  определены в (1.20).

Пусть выбор коэффициентов  $B_n^\pm$  обеспечивает применимость принципа непрерывности. Тогда по теореме Лиувилля вследствие ограниченности напряжений  $\tau(x)$  в точках  $x = -c_1$  и  $x = c_2$  из (2.10) и (2.9) находим решение задачи (2.8)

$$\Phi_1^+(\alpha) = \frac{\omega_1(\alpha)}{K^+(\alpha)X^+(\alpha)} + \frac{e^{i\alpha\lambda}\omega_2(\alpha)}{K^-(\alpha)X^-(\alpha)} + \frac{\sigma(1+e^{i\alpha\lambda})}{i\alpha}, \quad \Phi_1^-(\alpha) = e^{-i\alpha\lambda}\Phi_1^+(\alpha) \quad (2.11)$$

$$\Phi_2^+(\alpha) = -(i\alpha)^{-1} \{ K^+(\alpha)X^+(\alpha)\omega_2(\alpha) + e^{i\alpha(\lambda_0-\lambda_2)} [(i\alpha)^{-1}\sigma G(\alpha) - \gamma_0 g_1(\alpha) + P_1 - P_2] - P_1 \}$$

$$\Phi_2^-(\alpha) = -(i\alpha)^{-1} \{ K^-(\alpha)X^-(\alpha)\omega_1(\alpha) + e^{-i\alpha(\lambda_0-\lambda_1)} [(i\alpha)^{-1}\sigma G(\alpha) + \gamma_0 g_1(\alpha)] + P_1 \}$$

$$\omega_1(\alpha) = -(i\alpha)^{-1}\sigma + \Omega^-(\alpha) + \Psi^+(\alpha), \quad \omega_2(\alpha) = -(i\alpha)^{-1}\sigma + \Omega^+(\alpha) + \Psi^-(\alpha)$$

Функции  $\Phi_2^+(\alpha)$ ,  $\Phi_2^-(\alpha)$  аналитичны в точке  $\alpha = 0$  тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\{ K^+(\alpha)X^+(\alpha)\omega_2(\alpha) + e^{i\alpha(\lambda_0-\lambda_2)} [(i\alpha)^{-1}\sigma G(\alpha) - \gamma_0 g_1(\alpha) + P_1 - P_2] - P_1 \}_{\alpha=0} = 0 \quad (2.12)$$

$$\{ K^-(\alpha)X^-(\alpha)\omega_1(\alpha) + e^{-i\alpha(\lambda_0-\lambda_1)} [(i\alpha)^{-1}\sigma G(\alpha) + \gamma_0 g_1(\alpha)] + P_1 \}_{\alpha=0} = 0$$

Учитывая формулы (1.17), равенства (2.12) перепишем в виде

$$\lambda_1 = d_* - \sigma^{-1}(P_1 + A_*^+ - B_*^-)$$

$$\lambda_2 = d_* - \sigma^{-1}(P_2 + A_*^- - B_*^+)$$

$$d_* = d_0 + \frac{2}{\pi} \ln 2 + \lambda_0, \quad A_*^\pm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^\pm}{\beta_n}, \quad B_*^\pm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n^\pm}{\delta_n} \quad (2.13)$$

Равенства (2.13) обеспечивают не только аналитичность функций  $\Phi_2^\pm(\alpha)$ , но и представляют нелинейную систему для определения параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Из системы (2.13) следует и условие равновесия (2.2).

Действительно, учитывая соотношения (2.4), (2.7) и (1.10), условие (2.2) запишем в виде

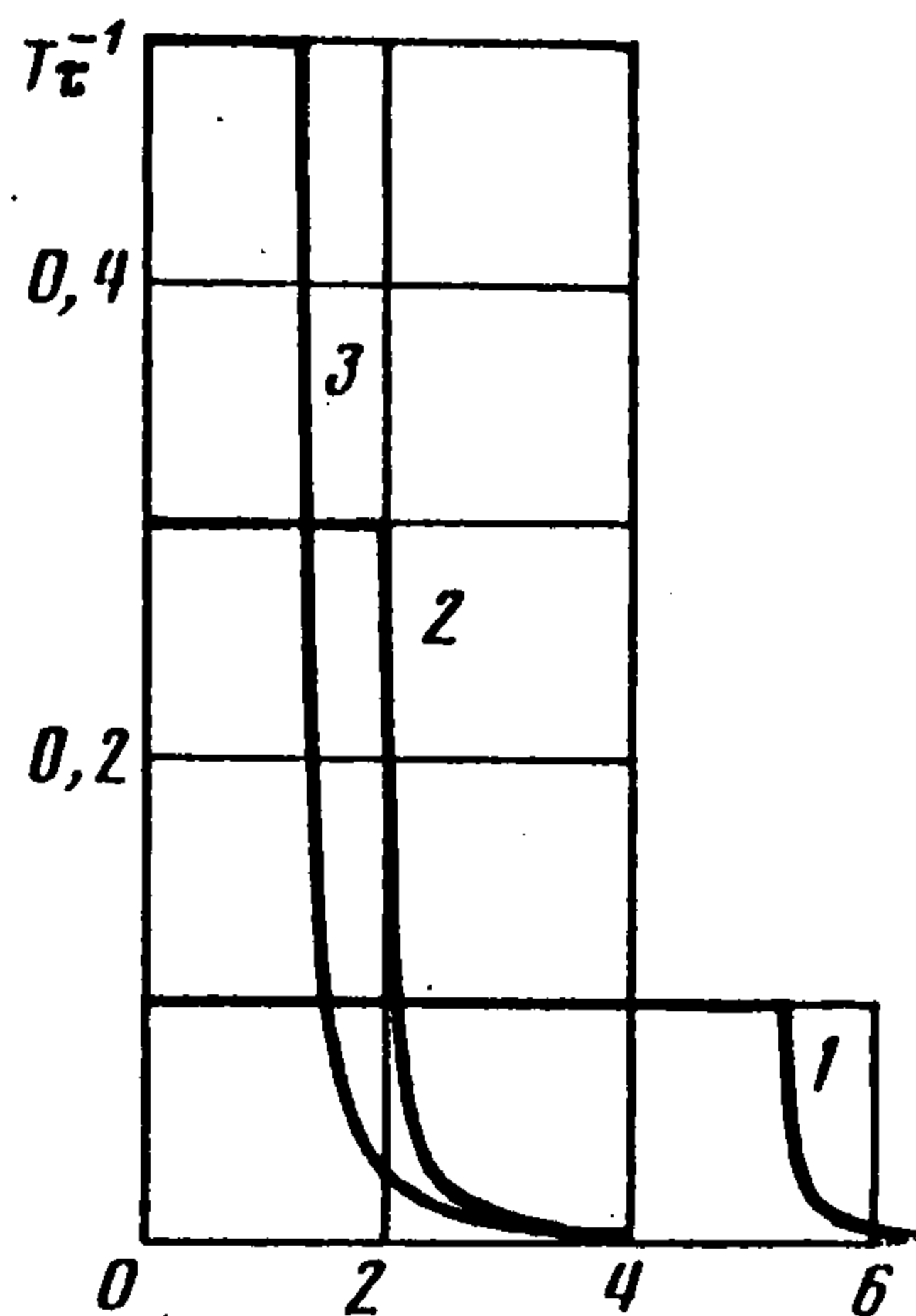
$$\{ \Phi_1^+(\alpha) - (i\alpha)^{-1}\sigma [1 - e^{i\alpha(\lambda_1-\lambda_0)} - e^{i\alpha(\lambda_1+\lambda_0)} + e^{i\alpha\lambda}] \}_{\alpha=0} = P_2 - P_1$$

которое вследствие (2.11) и (1.17) эквивалентно следующему:

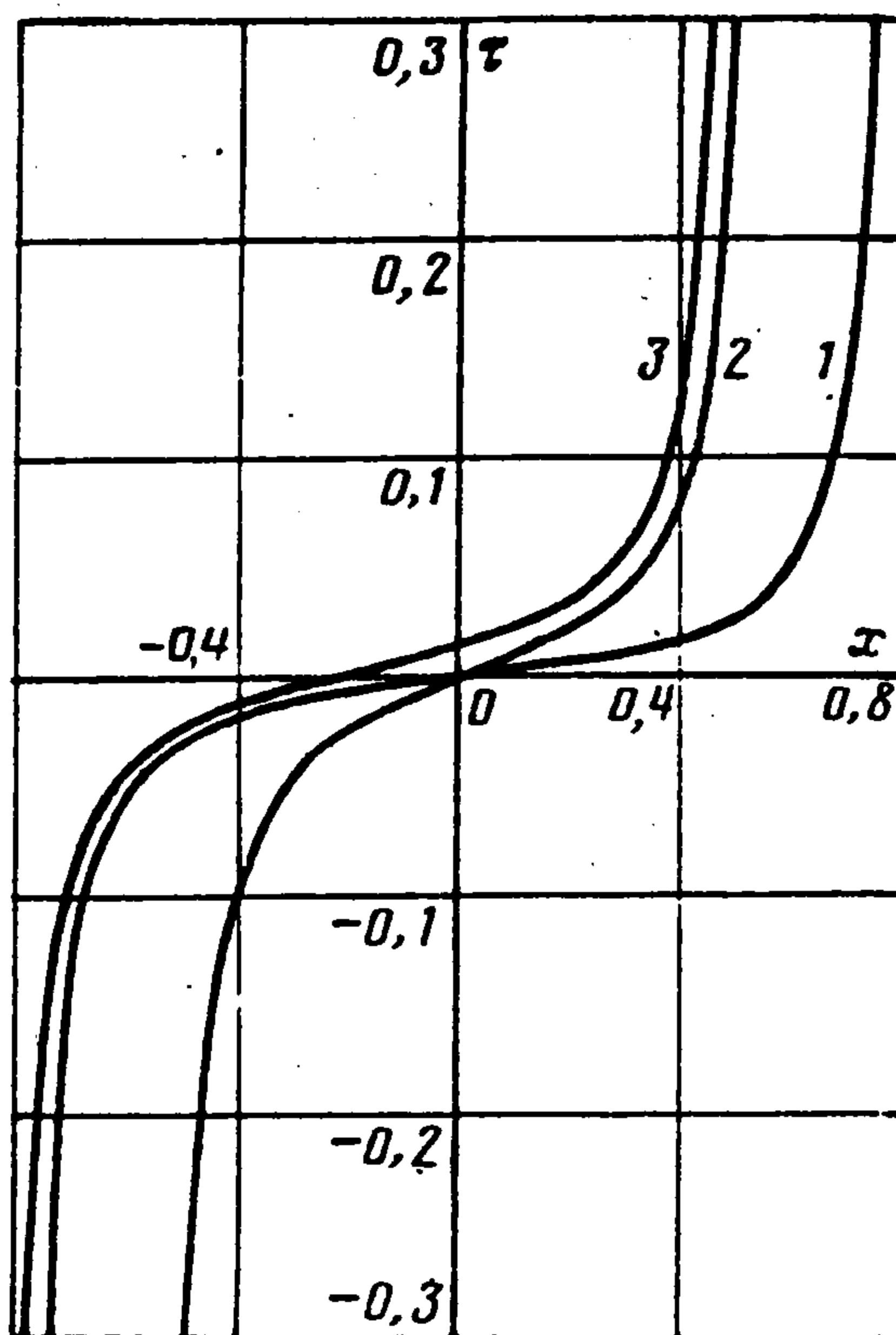
$$A_*^+ - A_*^- + B_*^+ - B_*^- + \sigma(\lambda_1 - \lambda_2) = P_2 - P_1$$

а это равенство получается из (2.13), если вычесть из первого уравнения (2.13) второе.

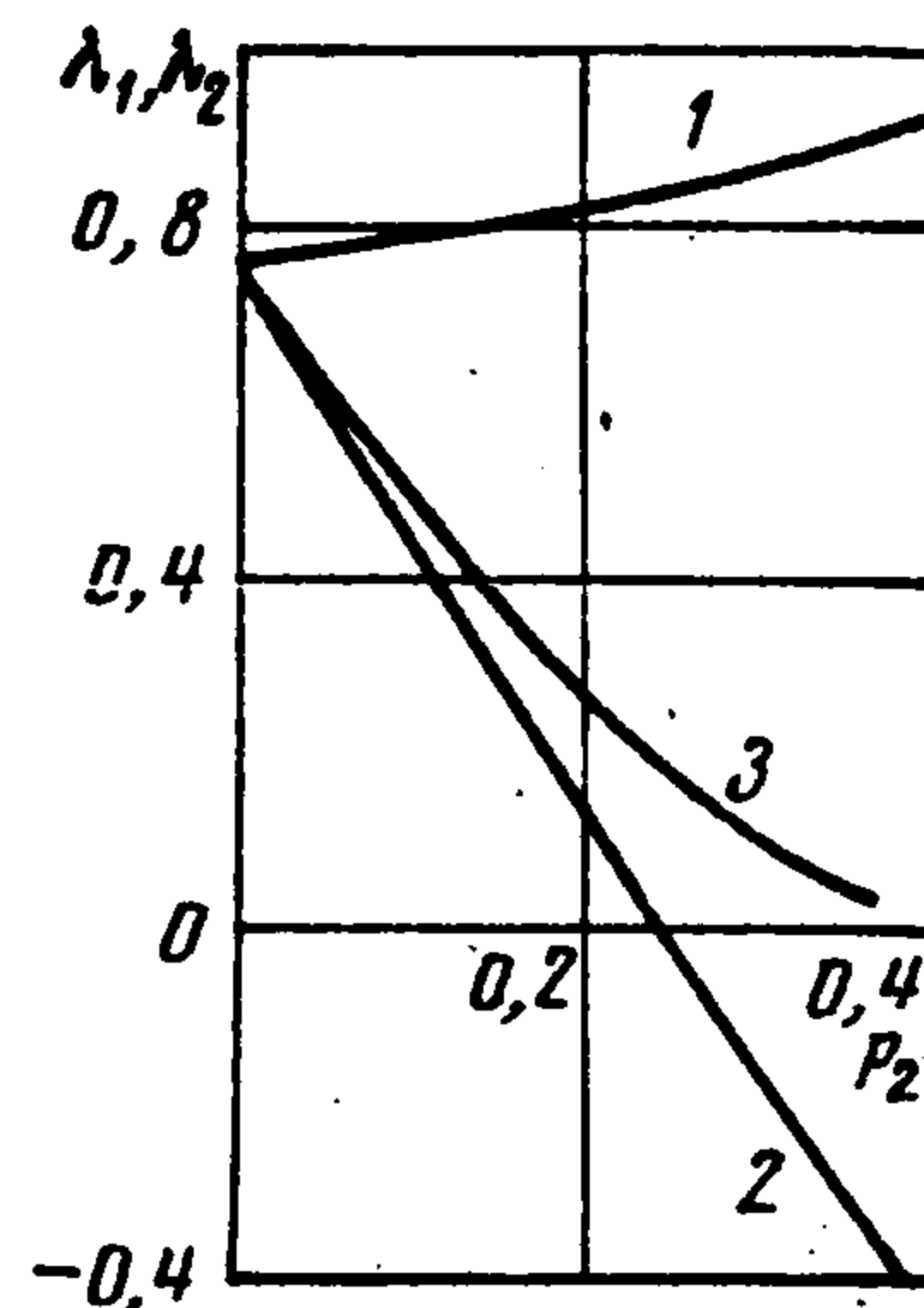
Осуществим теперь выбор коэффициентов  $B_n^\pm$ . Потребовав аналитичности функций  $\Phi_1^\pm(\alpha)$  в точках  $\alpha = \pm i\delta_n \in C^\pm$ , приходим к бесконечной системе алгебраических урав-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

внений Пуанкаре—Коха

$$B_n^\pm = e^{-\delta_n \lambda} \Delta_n^0 \left( f_n^\pm + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m^\mp}{\delta_n + \delta_m} \right) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.14)$$

$$\Delta_n^0 = \frac{(K_n^0 X_n^0)^2}{G_n}, \quad f_n^\pm = \frac{\sigma}{\delta_n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m^\pm}{\delta_n - \delta_m}$$

Числа  $K_n^0, X_n^0, G_n$  определены в (1.22). Система (2.14) допускает эффективное решение в терминах рекуррентных соотношений

$$B_n^\pm = e^{-\delta_n \lambda} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}^\pm, \quad b_{n0}^\pm = \Delta_n^0 f_n^\pm$$

$$b_{np}^\pm = \Delta_n^0 \sum_{j=1}^p \frac{e^{-\lambda \delta_j}}{\delta_n + \delta_j} b_{j, p-j}^\mp$$

Получим формулы для контактных напряжений

$$\tau(x) = \frac{1}{b} \chi\left(\frac{x}{b} + \lambda_1\right), \quad \chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1^+(\alpha) e^{-i\alpha t} d\alpha \quad (2.15)$$

Подставляя (2.11) в (2.15) и используя теорему Коши, находим

$$\tau(x) = \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_n^0 X_n^0} [B_n^- e^{\delta_n(x+c_1)/b} - B_n^+ e^{\delta_n(-x+c_2)/b}], \quad -c_1 < x < c_2 \quad (2.16)$$

В случае, если  $P_1 = P_2$ , то

$$c_1 = c_2 = c, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda$$

$$f_n^\pm = f_n = \frac{\sigma}{\delta_n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\delta_n - \delta_m}, \quad A_m^\pm = A_m$$

и бесконечная система (2.14) относительно  $B_m^+ = B_m^- = B_m$  упрощается:

$$B_n = e^{-\delta_n \lambda \Delta_n^0} \left( f_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{\delta_n + \delta_m} \right)$$

а формула (2.16) для контактных напряжений преобразуется к виду

$$\tau(x) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{K_n^0 X_n^0} e^{\frac{1}{2} \lambda \delta_n \operatorname{sh} \frac{\delta_n x}{b}}, \quad -c < x < c \quad (2.17)$$

Анализ формул (2.16) и (2.17) вследствие (2.6) приводит к непрерывности касательных напряжений  $\tau(x)$  в точках  $x = -c_1$  и  $x = c_2$  и ограниченности на концах накладки  $x = \pm a$ .

3. Численные расчеты. Численный анализ показал существование и единственность решения нелинейного уравнения (1.18), определяющего величину  $\lambda$ , для всех реальных значений параметров задачи о бесконечной накладке, причем в области сцепления неравенство  $|\tau_{xy}(x, 0)| < \mu |\sigma_y(x, 0)|$  имеет место. На фиг. 3 изображены графики контактных напряжений  $T^{-1} \tau(x)$  при  $\nu_0 = \nu = 0,3$ ,  $E_0/E = 2$ ,  $b = 1$ ,  $h = 0,01$ ,  $p = 1$  для различных коэффициентов трения:  $\mu = 0,1$  (кривая 1),  $\mu = 0,3$  (2) и  $\mu = 0,5$  (3). Ниже представлены зависимости параметра  $\lambda = 2a/b$  от  $\mu$  при тех же значениях параметров задачи:

$\mu$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\lambda$	10,62	5,62	3,95	3,12	2,62	2,28	2,04	1,87	1,73

от  $E_0/E$  при  $\mu = 0,3$  (остальные параметры те же):

$E_0/E$	0,1	1	2	5	10	100
$\lambda$	4,20	4,07	3,95	3,66	3,27	1,32

и от  $b$  при  $\mu = 0,3$ ,  $E_0/E = 2$ :

$b$	1	2	3	4	5	7	10	15	20
$\lambda$	3,95	2,40	1,89	1,63	1,48	1,31	1,18	1,08	1,03

Расчеты проведены и для задачи о растяжении конечной накладки. На фиг. 4 изображены графики контактных напряжений  $\tau(x)$  при  $\nu_0 = \nu = 0,3$ ,  $E_0/E = 2$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $h = 0,01$ ,  $p = 1$ ,  $\mu = 0,3$  для  $P_1 = P_2 = 0$  (в этом случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,7656$  и не зависят от величины  $p$ ) – кривая 1, для  $P_1 = P_2 = 0,1$  ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,4945$ ) – кривая 2, для  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = 0,1$  ( $\lambda_1 = 0,7926$ ,  $\lambda_2 = 0,4592$ ) – кривая 3. На фиг. 5 представлены графики зависимости  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  от  $P_2$  при  $P_1 = 0$  (кривые 1 и 2 соответственно) и график  $\lambda_1 = \lambda_2$  от  $P_1 = P_2$  (кривая 3). При расчетах принимались те же значения параметров задачи, что и для построения графика на фиг. 4.

Нелинейная система (2.13) в случае  $P_1 = P_2$  всегда имеет решение  $\lambda_1 = \lambda_2$  и притом единственное. Если же  $P_1 \neq P_2$ , то при произвольном  $P_1$  величина  $P_2$  должна удовлетворять условию  $P_2^* < P_2 < P_2^{**}$ . В частности, при тех же значениях параметров  $\nu$ ,  $\nu_0$ ,  $E_0/E$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $h$ ,  $\mu$ ,  $p$ , которые принимались при построении графиков на фиг. 4, 5, если  $P_1 = 0$ , то система (2.13) разрешима тогда и только тогда, когда  $0 \leq P_2 \leq 0,475$ . При  $P_2 \approx 0,475$  имеем  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = -0,65$ , а при  $P_2 > 0,475$  не существует значения  $\lambda_1 \in (0, 1)$ , удовлетворяющего системе (2.13).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen // Ingr. Arch. 1932. Bd. 3. H. 2.
2. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 632–646.
3. Антипов Ю.А., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1005–1017.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике // М.: Наука, 1979. 320 с.
5. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости // Л.: Наука, 1967.