ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, вып. 1, 1993

УДК 539.3

© 1993 г. Е.И. Михайловский, В.Н. Тарасов

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ОБОБЩЕННОЙ РЕАКЦИИ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

При достаточно общих исходных предположениях дается обоснование сходимости метода обобщенной реакции, предложенного [1] для решения контактных задач с неизвестной областью активного взаимодействия (со свободной границей). Приводится пример совместного цилиндрического изгиба двух прямоугольных пластин.

1. Предположим, что смещения u_1, u_2 двух упругих элементов конструкции (стержней, пластин, оболочек) при некоторых нагрузках приводят к контактному взаимодействию этих элементов. Считаем, что деформирование каждого из названных элементов описывается стационарными линейными уравнениями соответственно относительно функций u_1, u_2:

$$(L_i u_i)(P) = f_i(P), \quad P \in \Omega_i \subset R^{n_i}$$

$$(\Gamma_{i,j} u_i)(P) = 0, \quad P \in \partial\Omega_i, \quad j \in 1:r_i, \quad i = 1, 2 \tag{1.1}$$

Краевым задачам (1.1) отвечают некоторые операторы в $L_2(\Omega_i)$, $(i = 1, 2)$ или иных гильбертовых пространствах. Областями определения этих операторов являются линеалы функций, достаточное число раз непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих граничным условиям (1.1). Таким образом, решение задач (1.1) сводится к решению операторных уравнений

$$A_i u_i = f_i(P), \quad P \in \Omega_i, \quad i = 1, 2 \tag{1.2}$$

В большинстве случаев (и ниже это предполагается) краевые задачи являются самосопряженными в смысле Лагранжа, а операторы – положительно определенными на плотных множествах соответствующих гильбертовых пространств. Тогда операторы A_i могут быть расширены до самосопряженных. Считаем, что такое расширение выполнено.

Пусть зазор между тонкостенными элементами в области возможного контакта Ω_0 $(\Omega_0 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2)$ определяется функцией $\Delta(P)$, $P \in \Omega_0$. Тогда рассматриваемую контактную задачу можно сформулировать так

$$A_1 u_1 = f_1(P) - x(P) H(P), \quad P \in \Omega_1$$
$$A_2 u_2 = f_2(P) + x(P) H(P), \quad P \in \Omega_2 \tag{1.3}$$

$$x(P) \geqslant 0, \quad P \in \Omega_0$$
$$u_1(P) - u_2(P) - \Delta(P) \leqslant 0, \quad P \in \Omega_0 \tag{1.4}$$
$$x(P)\,[u_1(P) - u_2(P) - \Delta(P)] = 0, \quad P \in \Omega_0$$

Первое соотношение (1.4) – условие односторонности связи, второе – непроникновения, третье – условие дополняющей нежесткости: если $x > 0$, то $u_1 - u_2 - \Delta = 0$, а если $u_1 - u_2 - \Delta < 0$, то $x = 0$; $H(P) = 1$ при $P \in \Omega_0$, $H(P) = 0$ при $P \notin \Omega_0$.

Из уравнений (1.3) имеем

$$x(P) = \tfrac{1}{2}(A_2 u_2 - A_1 u_1 + f_1 - f_2)(P), \quad P \notin \Omega_0 \tag{1.5}$$

Условия (1.4) будут выполнены, если $x(P)$ удовлетворяет равенству

$$x(P) = [x - \alpha(u_2 - u_1 + \Delta)]_+(P), \quad \alpha > 0, \quad P \in \Omega_0 \tag{1.6}$$

(индексом плюс помечена положительная часть соответствующей функции: $\varphi_+ = \frac{1}{2} \times (\varphi + |\varphi|)$).

Действительно, непосредственно из (1.6) видно, что первое условие (1.4) выполнено. Предположим далее, что выражение в квадратных скобках неотрицательно. Тогда эти скобки можно опустить, и в результате придем к условию

$$u_1 - u_2 - \Delta = 0 \tag{1.7}$$

Если же выражение в квадратных скобках (1.6) отрицательно

$$x - \alpha(u_2 - u_1 + \Delta) < 0 \tag{1.8}$$

то

$$x = 0 \tag{1.9}$$

и из неравенства (1.8) следует условие

$$u_1 - u_2 - \Delta < 0 \tag{1.10}$$

Очевидно, что соотношения (1.7)– (1.10) обеспечивают выполнение условий (1.4).

Таким образом, вместо (1.3), (1.4) можно рассмотреть следующую систему:

$$A_1 u_1 = f_1 - x, \quad A_2 u_2 = f_2 + x, \quad x = [x - \alpha(u_2 - u_1 + \Delta)]_+ \tag{1.11}$$

Метод решения контактных задач механики с неизвестной областью активного взаимодействия $\Omega_0^* \subset \Omega_0$, основанный на использовании равенства (1.6) был назван авторами [1] методом обобщенной реакции.

Если предположить, что существуют и определены обратные операторы A_i^{-1}, то на основании (1.11) приходим к следующему уравнению относительно контактной реакции:

$$x = [x - \alpha \Phi'(x)]_+$$
$$(\Phi' \triangleq A_2^{-1}(f_2 + x) - A_1^{-1}(f_1 - x) + \Delta) \tag{1.12}$$

Будем считать, что A_i – положительно определенные операторы, заданные на едином для них вещественном гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ $(\Omega = \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_0)$, т.е.

$$\langle A_i u, u \rangle \geqslant \gamma_i^2 \|u\|^2, \quad i = 1, 2 \tag{1.13}$$

Напомним, что названные условия гарантируют самосопряженность обратных операторов A_1^{-1}, A_2^{-1}, причем

$$\|A_i^{-1}\| \leqslant 1/\gamma_i^2 \quad i = 1, 2 \tag{1.14}$$

Восстановим по $\Phi'(x)$ функционал. Имеем

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2}\langle A_1^{-1}(f_1 - x), f_1 - x\rangle + \tfrac{1}{2}\langle A_2^{-1}(f_2 + x), f_2 + x\rangle + \langle x, \Delta\rangle \tag{1.15}$$

Очевидно, что $\Phi(x) \geqslant 0$, если $x \in M\{x \geqslant 0\}$, и, следовательно, существует

$$\inf_{x \in M} \Phi(x) = \Phi_*$$

Функционал $\Phi(x)$ строго выпуклый.

Действительно, пусть $x' \neq x''$, а u_i', u_i'' – отвечающие этим реакциям решения уравнений (1.3), т.е. $u_i' \neq u_i''$ $(i = 1, 2)$. Тогда

$$\Phi\left(\frac{x' + x''}{2}\right) - \frac{1}{2}\Phi(x') - \frac{1}{2}\Phi(x'') =$$
$$= -\tfrac{1}{8}\langle A_1(u_1'' - u_1'), u_1'' - u_1'\rangle - \tfrac{1}{8}\langle A_2(u_2'' - u_2'), u_2'' - u_2'\rangle < 0 \tag{1.16}$$

Функционал $\Phi(x)$ можно записать в виде

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2}\langle Gx, x\rangle + \langle q, x\rangle + \varphi_0$$

$$G = A_1^{-1} + A_2^{-1}, \quad g = A_2^{-1}f_2 - A_1^{-1}f_1 + \Delta$$

$$\varphi_0 = \tfrac{1}{2}\langle A_1^{-1}f_1, f_1\rangle + \tfrac{1}{2}\langle A_2^{-1}f_2, f_2\rangle$$

Учитывая неравенства (1.14), находим

$$\langle Gx, x\rangle \leqslant \| G \| \, \| x \|^2 \leqslant \mu_0 \ \|x\|^2$$

$$(\mu_0 = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)/(\gamma_1^2 \gamma_2^2))$$

Образуем на основании (1.12) итерационную схему

$$x_{n+1} = [x_n - \alpha\,\Phi'(x_n)]_+ \triangleq \omega(x_n) \tag{1.17}$$

Можно показать, что $\{x_n\}$ – минимизирующая последовательность для $\Phi(x)$

Для этого сначала получим неравенство [2]

$$\langle \Phi'(x_n), x_{n+1} - x_n\rangle \leqslant -\alpha^{-1} \| x_{n+1} - x_n \|^2 \tag{1.18}$$

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$\Psi(z) = \tfrac{1}{2} \| z - (x_n - \alpha\,\Phi'(x_n)) \|^2, \quad z \in M$$

Очевидно, что

$$\arg\min_{z\in M} \Psi(z) = [x_n - \alpha\,\Phi'(x_n)]_+ = x_{n+1}$$

Поэтому необходимое и достаточное условие минимума $\Psi(z)$ на элементе x_{n+1} можно записать в виде неравенства

$$\langle \Psi'(x_{n+1}), \quad z - x_{n+1}\rangle \geqslant 0, \quad \forall z \in M \tag{1.19}$$

Полагая здесь $z = x_n$ и учитывая, что

$$\Psi'(x_{n+1}) = x_{n+1} - x_n + \alpha\,\Phi'(x_n)$$

придем к неравенству (1.18).

Используя формулу конечных приращений, можно записать

$$\Phi(x_{n+1}) = \Phi(x_n) + \langle \Phi'(x_n), \quad x_{n+1} - x_n\rangle +$$
$$+ \theta \langle G(x_{n+1} - x_n), \quad x_{n+1} - x_n\rangle, \quad \theta \in (0, 1) \tag{1.20}$$

Отсюда при учете оценок (1.16), (1.18) находим

$$\Phi(x_{n+1}) \leqslant \Phi(x_n) + (\mu_0 - \alpha^{-1}) \| x_{n+1} - x_n \|^2. \tag{1.21}$$

Из (1.21) видно, что при достаточно малых α ($\alpha < 1/\mu_0$) последовательность $\{\Phi(x_n)\}$ убывает, но $\Phi(x) \geqslant 0$, поэтому при $n \to \infty$

$$\| x_{n+1} - x_n \| \to 0, \quad \Phi(x_n) \to \Phi_x \geqslant \Phi_*$$
$$\langle G(x_{n+1} - x_n), \quad x_{n+1} - x_n\rangle \to 0 \tag{1.22}$$

(Заметим, что из условий (1.22) не следует сходимость последовательности $\{x_n\}$ в $L_2(\Omega)$.)

Наконец, на основании (1.20) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \langle \Phi'(x_n), \ x_{n+1} - x_n\rangle = 0 \tag{1.23}$$

Рассмотрим теперь наряду с $\{x_n\}$ последовательность $\{y_n\}$, такую, что

$$y_{n+1} = [y_n - \alpha\,\Phi(y_n)]_+, \quad \Phi(y_0) \leqslant \Phi_* + \epsilon \tag{1.24}$$

где ϵ – любое сколь угодно малое положительное число.

Покажем, что расстояние между элементами x_n и y_n равномерно ограничено некоторым числом R_0. Имеем

$$\| x_{n+1} - y_{n+1} \|^2 = \| \omega(x_n) - x_n - \omega(y_n) + y_n + x_n - y_n \|^2 =$$
$$= \| \omega(x_n) - x_n - \omega(y_n) + y_n \|^2 + \| x_n - y_n \|^2 + 2\langle \omega(x_n) - x_n - \omega(y_n) + y_n, \quad x_n - y_n\rangle \tag{1.25}$$

Так как расстояние между проекциями элементов на выпуклое множество (M) не превосходит расстояния между проектируемыми элементами, то

$$\| \omega (x_n) - \omega (y_n) \| \leq \| x_n - \alpha \Phi'(x_n) - y_n + \alpha \Phi'(y_n) \|$$

Отсюда получаем (I – тождественный оператор)

$$\langle \omega (x_n) - \omega (y_n), \quad x_n - y_n \rangle \leq \| I - \alpha G \| \, \| x_n - y_n \|^2$$

и, следовательно, при достаточно малых α

$$\langle \omega (x_n) - x_n - \omega (y_n) + y_n, \ x_n - y_n \rangle \leq$$
$$\leq (\| I - \alpha G \| - 1) \| x_n - y_n \|^2 \leq 0.$$

Поэтому на основании (1.25) приходим к неравенству

$$\| x_{n+1} - y_{n+1} \|^2 \leq 2 \| x_{n+1} - x_n \|^2 +$$

$$+ 2 \| y_{n+1} - y_n \|^2 + \| x_n - y_n \|^2$$

Отсюда имеем

$$\| x_{n+1} - y_{n+1} \|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} \| x_{k+1} - x_k \|^2 +$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^{n} \| y_{k+1} - y_k \|^2 + \| x_0 - y_0 \|^2 \leq R_0^2 \qquad (1.26)$$

$$R_0^2 = \frac{2 \alpha_0}{1 - \alpha_0 \mu_0} (\Phi (x_0) + \Phi (y_0) - 2 \Phi_*) + \| x_0 - y_0 \|^2$$

Здесь принято во внимание, что (см. (1.21))

$$\sum_{k=0}^{n} \| x_{k+1} - x_k \|^2 \leq \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0 \mu_0} (\Phi (x_0) - \Phi_*)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \| y_{k+1} - y_k \|^2 \leq \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0 \mu_0} (\Phi (y_0) - \Phi_*)$$

$(\alpha_0 < 1/\mu_0)$

Вернемся к вариационному неравенству (1.19). Полагая в нем $z = y_n$ и производя элементарные преобразования, получим

$$\alpha \langle \Phi'(x_n), \ y_n - x_n \rangle \geq \alpha \langle \Phi'(x_n), \ x_{n+1} - x_n \rangle +$$
$$+ \langle x_{n+1} - x_n, \ x_n - y_n \rangle + \| x_{n+1} - x_n \|^2$$

Учитывая соотношения (1.22), (1.23) и (1.26), убеждаемся, что

$$\lim_{n \to \infty} \langle \Phi'(x_n), \ y_n - x_n \rangle \geq 0 \qquad (1.27)$$

В силу выпуклости функционала $\Phi (x)$ имеем

$$\Phi (y_n) \geq \Phi (x_n) + \langle \Phi'(x_n), \ y_n - x_n \rangle$$

Переходя в этом неравенстве к пределу и учитывая (1.27), получим

$$\lim_{n \to \infty} \Phi (y_n) \triangleq \Phi_y \geq \Phi_x$$

Окончательно получаем

$$\Phi_* \leq \Phi_x \leq \Phi_y \leq \Phi (y_0) \leq \Phi_* + \epsilon$$

т.е. $\{ x_n \}$ – минимизирующая последовательность для функционала $\Phi (x)$ при любом $x_0 \in M$.

2. Рассмотренная в разд. 1 контактная задача допускает следующую энергетическую формулировку:

$$J(u_1, u_2) \to \min_{u_1 - u_2 - \Delta \leqslant 0}$$

$$J(u_1, u_2) = ½ \langle A_1 u_1, u_1 \rangle + ½ \langle A_2 u_2, u_2 \rangle - \\ - \langle f_1, u_1 \rangle - \langle f_2, u_2 \rangle \tag{2.1}$$

Используя последовательность реакций, генерируемую схемой (1.17), можно построить последовательности для перемещений по формулам

$$u_1^{(n)} = A_1^{-1}(f_1 - x_n), \quad u_2^{(n)} = A_2^{-1}(f_2 + x_n) \tag{2.2}$$

Покажем, что последовательности $\{u_i^{(n)}\}$ ($i = 1, 2$) сходятся к решению задачи (2.1). Прежде всего имеем (см. (1.16))

$$\Phi\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) - \frac{1}{2}\Phi(x_n) - \frac{1}{2}\Phi(x_m) \leqslant$$

$$\leqslant -1/_8\, \gamma_1^2 \, \| u_1^{(n)} - u_1^{(m)} \|^2 - 1/_8\, \gamma_2^2 \, \| u_2^{(n)} - u_2^{(m)} \|^2 \tag{2.3}$$

Отсюда следует, что существуют

$$\lim_{n \to \infty} u_i^{(n)} \triangleq u_i^*, \quad i = 1, 2 \tag{2.4}$$

Вводя лагранжиан

$$\Lambda(u_1, u_2, x) = J(u_1, u_2) + \langle x, u_1 - u_2 - \Delta \rangle, \quad x \in M,$$

задачу (2.1) можно переформулировать так:

$$\sup_{x \in M} \Lambda(u_1, u_2, x) \to \min_{u_1, u_2} \tag{2.5}$$

Пусть $\{x_n\}$ – минимизирующая последовательность для $\Phi(x)$, а $\{M_n\}$ – последовательность слабо компактных множеств

$$M_n = \{x \in L_2(\Omega) : 0 \leqslant x \leqslant d_n\} \tag{2.6}$$

$$d_n \to \infty \text{ при } n \to \infty$$

таких, что $x_n \in M_n$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\max_{x \in M_n} \Lambda(u_1, u_2, x) \to \min_{u_1, u_2} \tag{2.7}$$

Учитывая, что функционал $\Lambda(u_1, u_2, x)$ является выпуклым по u_1, u_2, линейным по x и что M_n – слабо компактное множество, можно перейти от (2.7) к двойственной задаче [3]

$$\min_{u_1, u_2} \Lambda(u_1, u_2, x) \to \max_{x \in M_n} \tag{2.8}$$

Задача минимизации в (2.8) при фиксированном x эквивалентна решению двух уравнений в (1.11). При этом

$$\Lambda(u_1, u_2, x) = -\Phi(x)$$

и задача (2.8) принимает вид

$$\Phi(x) \to \min_{x \in M_n}$$

Пусть

$$\arg\min_{x\in M_n} \Phi(x) = x_n^*$$

Тогда при учете условий построения последовательности $\{M_n\}$ имеем

$$\Phi(x_n) \geqslant \Phi(x_n^*) \geqslant \Phi_*$$

т.е. $\{x_n^*\}$ – минимизирующая последовательность для $\Phi(x)$.

Далее, вводя обозначения

$$u_{1,n} \triangleq A_1^{-1}(f_1 - x_n^*), \quad u_{2,n} \triangleq A_2^{-1}(f_2 + x_n^*) \tag{2.9}$$

и учитывая, что точка $(u_{1,n}, u_{2,n}, x_n^*)$ – седловая для функционала $\Lambda(u_1, u_2, x)$ на множестве $(L_2 \times L_2 \times M_n)(\Omega)$, можно записать

$$\Lambda(u_{1,n}, u_{2,n}, x) \leqslant \Lambda(u_{1,n}, u_{2,n}, x_n^*) \leqslant \Lambda(u_1, u_2, x_n^*) \tag{2.10}$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{n\to\infty} u_{i,n} = \lim_{n\to\infty} u_i^{(n)} = u_i^* \tag{2.11}$$

Рассмотрим комбинированную последовательность

$$\{\widetilde{x}_n\} \triangleq \{x_n, x_n^*\}$$

Очевидно, что $\Phi(\widetilde{x}_n) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi_*$, и, следовательно, существуют пределы:

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{u}_{i,n} = \widetilde{u}_i^*, \quad i = 1, 2$$

$$\widetilde{u}_{1,n} = A_1^{-1}(f_1 - \widetilde{x}_n), \quad \widetilde{u}_{2,n} = A_2^{-1}(f_2 + \widetilde{x}_n)$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} u_{i,n} = \lim_{n\to\infty} u_i^{(n)} = \widetilde{u}_i^*$$

что доказывает (2.11).

Покажем далее, что функции u_i^* $(i = 1, 2)$ удовлетворяют ограничениям задачи (2.1). Допустим противное. Пусть существует множество ненулевой меры $\Omega' \subset \Omega$, такое, что

$$u_1^* - u_2^* - \Delta > 0 \text{ на } \Omega' \tag{2.12}$$

Введем обозначение

$$K \triangleq \int_{\Omega'} (u_1^* - u_2^* - \Delta)\, d\Omega > 0 \tag{2.13}$$

Тогда на основании (2.4) при достаточно больших n выполняется неравенство

$$K_n = \int_{\Omega'} (u_1^{(n)} - u_2^{(n)} - \Delta)\, d\Omega > \frac{1}{2} K \tag{2.14}$$

Далее, используя левое неравенство (2.10) и учитывая второе соотношение (2.1), имеем

$$\Lambda(u_{1n}, u_{2n}, x_n^*) \geqslant -\langle f_1, u_{1,n}\rangle - \langle f_2, u_{2,n}\rangle + \int_{\Omega} x\,(u_{1,n} - u_{2,n} - \Delta)\, d\Omega$$

Последнее неравенство справедливо при любых $x \in M_n$. Полагая

$$x(P) = \begin{cases} d_n, & P \in \Omega' \\ 0, & P \notin \Omega' \end{cases}$$

получаем

$$\Lambda(u_{1,n}, u_{2,n}, x_n^*) = -\Phi(x_n^*) \geqslant$$

$$\geqslant c_n + \tfrac{1}{2} d_n K \underset{n\to\infty}{\to} \infty \qquad (2.15)$$

$$c_n \underset{n\to\infty}{\to} -\langle f_1, u_1^* \rangle - \langle f_2, u_2^* \rangle > -\infty$$

Очевидно, что соотношение (2.15) противоречит условию $\Phi(x) \geqslant 0$, и, следовательно, предположение (2.12) несостоятельно, т.е.

$$u_1^* - u_2^* - \Delta \leqslant 0 \text{ п.в. на } \Omega \qquad (2.16)$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n^*, u_{1,n} - u_{2,n} - \Delta \rangle = 0 \qquad (2.17)$$

Из левого неравенства (2.10) имеем

$$\langle x, u_{1,n} - u_{2,n} - \Delta \rangle \leqslant \langle x_n^*, u_{1,n} - u_{2,n} - \Delta \rangle$$

$$\forall x \in M_n$$

Отсюда следует, что

$$\langle x_n^*, u_{1,n} - u_{2,n} - \Delta \rangle \geqslant 0 \qquad (2.18)$$

так как в противном случае при $x = 0$ получаем противоречие. Предположим, что существует последовательность n_k, такая, что

$$\langle x_{n_k}^*, u_{1,n_k} - u_{2,n_k} - \Delta \rangle \geqslant a_0 > 0$$

Используя правое неравенство (2.10) и полагая в нем $u_1 = u_1^*$, $u_2 = u_2^*$, при учете (2.16) получаем

$$J(u_{1,n_k}, u_{2,n_k}) + a_0 \leqslant J(u_1^*, u_2^*)$$

Переходя здесь к пределу, получим противоречие с тем, что $a_0 > 0$.

Пусть $\bar{u}_i$ $(i = 1, 2)$ – геометрически допустимые перемещения, т.е. такие, что для них выполняется, в частности, условие $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 - \Delta \leqslant 0$. На основании правого неравенства (2.10) имеем

$$J(u_{1,n}, u_{2,n}) + \langle x_n^*, u_{1,n} - u_{2,n} - \Delta \rangle \leqslant$$

$$\leqslant J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) + \langle x_n^*, \bar{u}_1 - \bar{u}_2 - \Delta \rangle \leqslant J(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$$

Переходя здесь к пределу и учитывая (2.11), (2.17), получаем

$$J(u_1^*, u_2^*) \leqslant J(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$$

для любых $\bar{u}_i \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющих второму неравенству (1.4).

Замечание 1. Итерационная схема (1.17) может быть получена, если формально (не используя слабо компактные множества M_n) заменить (2.5) двойственной задачей

$$\min_{u_1, u_2} \Lambda(u_1, u_2, x) \to \sup_{x\in M}$$

перейти от нее к задаче минимизации

$$\Phi(x) \to \inf_{x\in M}$$

и к этой задаче применить метод проекции градиента. При этом множитель Лагранжа может быть интерпретирован как контактная реакция. Скалярный параметр α, регулирующий шаг градиентного спуска, не сказывается на значениях u_1, u_2, определяемых на основании итерационной схемы

$$A_1 u_1^{(n+1)} = f_1 - \tfrac{1}{2}\,[A_2 u_2^{(n)} - A_1 u_1^{(n)} - f_2 + f_1 - \alpha\,(u_2^{(n)} - u_1^{(n)} + \Delta)]_+$$

$$A_2 u_2^{(n+1)} = f_2 + \tfrac{1}{2}\,[A_2 u_2^{(n)} - A_1 u_1^{(n)} - f_2 + f_1 - \alpha\,(u_2^{(n)} - u_1^{(n)} + \Delta)]_+$$

3. Рассмотрим контактную задачу для двух параллельных прямоугольных пластин, закрепленных и нагруженных так, что форма их изгиба является цилиндрической. Для определенности считаем, что на двух противоположных кромках пластины (расстояние между которыми равно l) выполняются условия шарнирного опирания. Предполагаем также, что верхняя пластина находится под действием нормальной нагрузки $q(\xi)$, а нижняя испытывает лишь давление $x(\xi)$ со стороны верхней пластины, когда прогиб последней превосходит величину первоначального зазора между пластинами $\Delta = \text{const}$. Такую контактную задачу можно сформулировать в виде

$$\begin{aligned} &d_0 w_1^{IV} = q(\xi) - x(\xi), \quad \xi \in (0, l) \\ &w_1(0,\eta) = w_1(l,\eta) = w''_{1,\xi\xi}(0,\eta) = w''_{1,\xi\xi}(l,\eta) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &d_0 w_2^{IV} = x(\xi), \quad \xi \in (0, l) \\ &w_2(0,\eta) = w_2(l,\eta) = w''_{2,\xi\xi}(0,\eta) = w''_{2,\xi\xi}(l,\eta) = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$x(\xi) \geqslant 0, \quad \xi \in (0, l) \tag{3.3}$$

$$w_1(\xi,\eta) \leqslant w_2(\xi,\eta) + \Delta \tag{3.4}$$

$$x(\xi)\,[w_1(\xi,\eta) - w_2(\xi,\eta) - \Delta] = 0 \tag{3.5}$$

(d_0 – цилиндрическая жесткость пластин). Функция Грина для краевых задач (3.1), (3.2) имеет вид

$$G(\xi, t) = A\,(\xi - t)_+^3 + \varphi(t)\,\xi^3 + \psi(t)\,\xi \tag{3.6}$$

$$A = \frac{1}{6 d_0}, \quad \varphi(t) = -\frac{l-t}{6 d_0 l}, \quad \psi(t) = \frac{t\,(l-t)\,(2l-t)}{6 d_0 l}$$

Применим способ расчленения исходной краевой задачи на более простые, предполагая, что воздействие верхней пластины на нижнюю описывается функцией вида

$$\begin{aligned} &x(\xi) = R_1 \delta(\xi - \xi_1) + R_2 \delta(\xi - (l - \xi_2)) + x_0(\xi) \\ &\xi \in [\xi_1, l - \xi_2] \end{aligned} \tag{3.7}$$

($\delta(\cdot)$ – дельта-функция). Учитывая, что

$$w_1(\xi,\eta) = w_2(\xi,\eta), \quad \xi \in [\xi_1, l - \xi_2] \tag{3.8}$$

находим

$$x_0(\xi) = \tfrac{1}{2} q(\xi)\,[H(\xi - \xi_1) - H(\xi - (l - \xi_2))] \tag{3.9}$$

($H(\cdot)$ – функция Хевисайда). Прогибы пластин на основании соотношений (3.6)–(3.9) определяются по формулам

$$\begin{aligned} w_1(\xi,\eta) = &\int_0^l G(\xi,t)\,q(t)\,dt - \int_{\xi_1}^{l-\xi_2} G(\xi,t)\,q(t)\,dt - \\ &- R_1 G(\xi,\xi_1) - R_2 G(\xi, l - \xi_2) \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$w_2(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\int_{\xi_1}^{l-\xi_2} G(\xi, \xi_1 - t)\,q(t)\,dt + R_1 G(\xi,\xi_1) + R_2 G(\xi, l - \xi_2)$$

Используя (3.8), (3.10), находим

$$\int_0^{\xi_1} t q(t)\,dt = 2 R_1 \xi_1, \qquad \int_0^{\xi_2} t q(l-t)\,dt = 2 R_2 \xi_2 \tag{3.11}$$

$$\int_0^{\xi_1} (\xi_1^2 - t^2)\,t q(t) = 6 d_0 \Delta, \qquad i = 1, 2 \tag{3.12}$$

Проанализировав уравнения (3.12), убеждаемся, что каждое из них может иметь лишь одно решение, т.е. область контакта всегда односвязна. Далее из уравнений (3.7) выявляется интересное свойство рассматриваемой краевой задачи: если в результате некоторого (не зависящего от η) нагружения верхней пластины реализовалась область контакта, то расположение и протяженность этой области по ξ, а также значения сосредоточенных реакций, не зависят от интенсивности нагрузки в пределах зоны контакта.

Таким образом, решение контактной задачи сводится к реализации весьма простого алгоритма: 1) найти корни ξ_1, ξ_2 уравнений (3.12); 2) определить сосредоточенные реакции R_1, R_2 из уравнений (3.11); 3) вычислить функции w_1, w_2 по формулам (3.10).

Рассмотрим частный случай $q(\xi) = q_0 = \text{const}$. Из уравнений (3.12), (3.11) последовательно находим

$$\xi_1 = \xi_2 = \sqrt{24\,\Delta\, d_0/q_0} \triangleq \xi_0, \qquad R_1 = R_2 = {}^1\!/_4\, q_0\, \xi_0 \tag{3.13}$$

При этом условие реализации зоны контакта имеет вид

$$q_0 > 384\,\Delta\, d_0/l^4$$

При учете формул (3.13) из соотношений (3.10) получаем

$$w_i(\xi,\eta) = \frac{q_0}{24\, d_0} \times \begin{cases} U_i(\xi), & \xi < \xi_0 \\ V_i(\xi), & \xi_0 < \xi < {}^1\!/_2\, l \end{cases} \tag{3.14}$$

$$U_1 = \xi^4 - (l + \xi_0)\,\xi^3 + ({}^1\!/_2\, l^3 + \xi_0^3)\,\xi$$

$$U_2 = \xi_0^4 - (l - \xi_0)\,\xi^3 + ({}^1\!/_2\, l^3 - \xi_0^3)\,\xi$$

$$V_1 = V_2 = {}^1\!/_2\,\xi^4 - l\,\xi^3 + {}^1\!/_2\, l^3\xi + {}^1\!/_2\,\xi_0^4$$

Замечание 2. Рассмотренного выше примера достаточно, чтобы убедиться, что последовательность $\{x_n\}$ (см. (1.17)), вообще говоря, не сходится в $L_2(\Omega)$. Однако, как показано в разд. 2, получаемые с использованием $\{x_n\}$ последовательности $\{u_i^{(n)}\}$ (см. (2.2)) сходятся к решению контактной задачи в среднем. При этом операторная форма изложения не позволила показать, что в конкретных задачах последовательности $\{u_i^{(n)}\}$ сходятся к решению с некоторым числом своих производных. Например, для рассматриваемой в разд. 3 системы из двух цилиндрически изгибаемых пластин имеет место соотношение (см. (1.16))

$$\Phi\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) - \frac{1}{2}\,\Phi(x_n) - \frac{1}{2}\,\Phi(x_m) =$$

$$= -\frac{1}{8}\, d_0 a \left\{ \left\| \frac{d^2}{d\xi^2}\,(w_1^{(n)} - w_1^{(m)}) \right\|^2 + \left\| \frac{d^2}{d\xi^2}\,(w_2^{(n)} - w_2^{(m)}) \right\|^2 \right\}$$

(a – ширина пластины). Отсюда следует, что последовательности $\{d^2 w_i^{(n)}/d\xi^2\}$ сходятся в среднем, а $\{w_i^{(n)}\}$, $\{dw_i^{(n)}/d\xi\}$ сходятся равномерно по ξ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайловский Е.И., Тарасов В.Н.* Контактные задачи для гибких элементов конструкций // Проблемы нелинейной теории упругости. Калинин: Изд-е Калинин. политех. ин-та, 1989. С. 100–108.
2. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Приближенные методы решения экстремальных задач. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 180 с.
3. *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 383 с.

Сыктывкар

Поступила в редакцию
29.IV.1991