ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, вып. 1, 1993

УДК.535.552.24

© 1993 г. А.Э. Пуро

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ОПТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ

Рассматривается определение напряжений в прозрачном теле по результатам его сквозного просвечивания [1] в предположении слабой оптической анизотропии [2,3]. Боковая поверхность тела считается свободной от нагрузок. Измерения разности фаз и параметра изоклины [4] проводится в семействе параллельных плоскостей. При таком проведении исследований на основе экспериментальных данных и уравнений равновесия удается определить только компоненту тензора напряжений σ_{zz}, нормальную к плоскости просвечивания [5,6].

Нахождение остальных компонент связано с обратной задачей теории упругости, решение которой для случая напряжений, вызванных внешними нагрузками, рассмотрено ранее [5,7].

Определение внутренних напряжений, обусловленных дисторсией, является качественно более сложной проблемой. Для стекла она несколько облегчается тем фактом, что в большинстве случаев тензор остаточных деформаций в нем шаровой: $\epsilon_{xx}^0 = \epsilon_{yy}^0 = \epsilon_{zz}^0 = \alpha T_0$ и может характеризоваться одним параметром T_0 – эффективной температурой остаточных деформаций [8–10]. Решение обратной задачи термоупругости в случае плоской деформации ($\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$) позволяет восстановить напряжение полностью [11]. Частное ее решение для круглых образцов приводит к закону суммы [1, 10, 12], который предлагалось [13,14] использовать для нахождения напряжения в случае произвольного осесимметричного его распределения.

Ниже сформулирована краевая задача определения внутренних температурных напряжений в объеме по результатам его сплошного просвечивания в системе параллельных плоскостей. Для общих видов форм тела и напряжений задача не обладает единственностью решения и поэтому напряжение из решения этой задачи восстанавливается частично. В частности, в телах вращения с осесимметричным распределением температуры возможно плоское напряженное состояние, для определения которого необходимо проводить дополнительное просвечивание в меридиальной плоскости.

Заметим, что в современных оптических томографах одновременное просвечивание проводится в широком луче, обеспечивая измерение в достаточно выоском слое [15].

1. В случае слабой оптической анизотропии при просвечивании в плоскости x, y вдоль луча l можно измерить два лучевых интеграла [2,4]

$$A(m, \theta) = \int (m_i m_j \sigma_{ij} - \sigma_{zz})\, dl,\quad H(m, \theta) = \int m_i \sigma_{iz}\, dl,\quad i, j = x, y$$

По повторяющемуся индексу ведется суммирование, m_i – компонента единичного вектора, нормального к лучу l, $m_x = \cos\theta$, $m_y = \sin\theta$, m – расстояние от начала координат до прямой l.

Значение осевой компоненты напряжений σ_{zz} определяется из обращения линейной комбинации лучевых интегралов [5,7]

$$\int \sigma_{zz}\, dl = \frac{\partial}{\partial z} \int_m^{m_1} H(m', \theta, z)\, dm' - A(m, \theta, z) \tag{1.1}$$

Здесь m_1 – одна из крайних точек проекции контура сечения на ось m. Кроме того, из обращения лучевого интеграла

$$\int \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}\, dl = -\frac{\partial}{\partial m} H(m, \theta, z) + \sigma_{zz} \operatorname{ctg}\gamma \frac{d}{dm} \Gamma\Big|_{l_0}^{l_1} \tag{1.2}$$

определяется $\partial\sigma_{zz}/\partial z$. Здесь γ – угол между внешней нормалью n и осью z, Γ – длина дуги контура сечения, l_0, l_1 – точки входа и выхода луча соответственно, значения $\sigma_{zz}(l_1)$, $\sigma_{zz}(l_0)$ на концах луча выпуклого контура определяются при помощи касательного просвечивания в этих точках из значений лучевого интеграла $A(m, \theta)$ и граничных условий.

Таким образом, применение процедур обращения преобразования Радона (1.1), (1.2) позволяет определить значение компоненты σ_{zz} и ее частных производных по z в образце.

Задачу нахождения остальных компонент тензора напряжений по заданному в теле распределению σ_{zz} будем рассматривать в предположении, что дисторсии носят температурный характер, а поэтому будем исходить из соотношений Дюгамеля–Неймана [16]

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + (\lambda\epsilon_{kk} - \varphi)\delta_{ij}; \; i, j = x, y, z$$

Здесь $\varphi = 3K\alpha(T - T^0)$ учитывает как температурное влияние на напряжение, так и остаточные деформации, т.е., T – сумма эффективной остаточной деформации и действительной температуры образца.

Разыскиваемые напряжения представим в виде суммы решений первого и второго рода (нормального вращения) [17]

$$\begin{gathered}
\sigma_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi - \frac{\partial}{\partial z}\tau + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}N, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Phi - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)N \\
\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z}\tau - 2\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y} \\
\sigma_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}\tau + \frac{\partial^2 N}{\partial z\partial y}, \quad \sigma_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}\tau - \frac{\partial^2 N}{\partial z\partial x}
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Разрешающие функции τ, Φ, N определяются из уравнений

$$\Delta_4\tau = -\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} \tag{1.4}$$

$$\Delta_4\Phi = \nu\sigma_{zz} + (1 - \nu)\frac{\partial}{\partial z}\tau + (1 - 2\nu)\varphi \tag{1.5}$$

$$2\mu(1 - \nu)\frac{\partial w}{\partial z} = (1 - 2\nu)(\sigma_{zz} - \varphi) - \nu\Delta_+\Phi, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 2\tau - 2\mu w \tag{1.6}$$

$$\Delta N = 0 \tag{1.7}$$

((1.4), (1.5) – уравнения равновесия, (1.6) – соотношения Дюгамеля–Неймана).

Исключая из соотношений (1.5), (1.6) w и φ, получаем относительно τ и Φ систему двух разрешающих уравнений: (1.4) и

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi + \Delta_+\Phi = \sigma_{zz} - \frac{\partial\tau}{\partial z} \tag{1.8}$$

определяющих решения первого рода, и уравнения Лапласа (1.7) относительно потенциала нормального вращения N. Сразу же заметим, что для уравнения (1.8) можно указать частное решение

$$\Phi_1(x, y, z) = \Phi_0(x, y, 0) - \int_0^z \tau(x, y, t)\,dt \tag{1.9}$$

приводящее его к однородному. Функция $\Phi_0(x, y, 0)$ определяется из решения двумерной задачи

$$\Delta_+ \Phi_0(x, y, 0) = \sigma_{zz}(x, y, 0) \tag{1.10}$$

В случае плоской деформации соотношение (1.10) выражает известный закон суммы и совместно с краевыми условиями полностью определяет напряжения [11].

Краевая задача относительно уравнений (1.4), (1.7), (1.8) на свободной от нагрузок поверхности замыкается тремя краевыми условиями $n_i \sigma_{ij} = 0$ (n_i – составляющие вектора внешней нормали).

В заключение общей постановки задачи остановимся на вопросе однозначности ее решения, т.е. возможности существования температурных напряжений, при которых $\sigma_{zz} = 0$. Необходимое условие относительно температуры для таких состояний

$$\Delta\varphi = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \tau \tag{1.11}$$

получается путем вычисления оператора Лапласа от обеих частей уравнения (1.5) при учете соотношения (1.8). Как следует из уравнения (1.4), τ – гармоническая функция переменных x, y. Если τ зависит только от z, то из (1.3) следует, что соотношение (1.11) выражает необходимое условие существования плоского напряженного состояния ($\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$). Для последнего вида распределения напряжений условие (1.11) было получено ранее [16] и также приведены конкретные примеры плоского напряженного состояния, обусловленного температурой для некоторых форм тела. Возможность существования таких решений для произвольной формы тела является довольно сложной задачей и в литературе, по-видимому, не рассматривалась.

Таким образом, в силу неоднозначности решения сформулированной выше задачи просвечивание тела в системе параллельных плоскостей не позволяет определить напряженное состояние полностью.

2. Продемонстрируем перечисленные особенности обратной задачи термоупругости оптической томографии на примере определения осесимметричных напряжений в телах вращения. Ограничиваясь решениями первого рода ($N = 0$), запишем напряжения в цилиндрической системе координат

$$\sigma_{\rho\rho} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\Phi - \frac{\partial\tau}{\partial z}, \quad \sigma_{\rho z} = \frac{\partial\tau}{\partial\rho} \tag{2.1}$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi\right], \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} - \frac{\partial\tau}{\partial z}, \quad \sigma_{\varphi z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}$$

Из условия осесимметричности задачи следует, что τ и Φ не зависят от угла φ, а $\sigma_{\rho\varphi} = \sigma_{\varphi z} = 0$. Разрешающее уравнение упрощается:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi + \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\Phi = \sigma_{zz} - \frac{\partial\tau}{\partial z} \tag{2.2}$$

Выражая значение $\rho\sigma_{\rho\rho}$ через $\partial\Phi/\partial\rho$ и $\partial\tau/\partial z$, дифференцированием равенств (2.2) по ρ сформулируем краевую задачу относительно компоненты $\sigma_{\rho\rho}$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sigma_{\rho\rho})\right] + \frac{\partial^2\rho\sigma_{\rho\rho}}{\partial z^2} = \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial z^2} - 3\frac{\partial\sigma_{\rho z}}{\partial z} - \rho\frac{\partial^3}{\partial z^3}[\tau_1 + \tau_0(z)], \quad \tau_1 = \int \sigma_{\rho z}(t, z)\,dt \tag{2.3}$$

($\tau(z)$ – указанная выше произвольная функция).

Таким образом, проблема восстановления в объеме значений $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ по известным σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ сводится к решению краевой задачи, определяемой уравнением в частных производных (2.3) и краевыми условиями на свободной боковой поверхности $\rho = R(z)$

$$\sigma_{\rho\rho} = [dz\, R(z)/dz]^2 \sigma_{zz}' \tag{2.4}$$

Значения σ_{zz} и $\sigma_{z\rho}$ при этом связаны уравнением (1.4), а компонента σ_{zz} удовлетворяет условию статики – сохранению главного вектора силы в сечении

$$\int_0^{R(z)} \sigma_{zz}(\rho, z)\, \rho\, d\rho = 0$$

Компоненты σ_{zz}, $\sigma_{\rho z}$ восстанавливаются по исходным данным измерений при помощи инверсии интегралов Абеля

$$2\int_m^R \frac{\sigma_{zz}(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - m^2}}\, \rho d\rho = \frac{\partial}{\partial z} \int_m^R H(n, z)\, dn - A(m, z)$$

$$2m \int_m^R \frac{\sigma_{\rho z}(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - m^2}}\, d\rho = H(m)$$

Общее исследование краевой задачи начнем с рассмотрения однородного уравнения, приравнивая в (2.3) правую часть нулю. Оно является стандартным уравнением математической физики, получающимся при решении уравнения Лапласа относительно угловой гармоники $\sigma(\rho, z) \cos\varphi = \rho\sigma_\rho(\rho, z) \cos\varphi$. Такое уравнение, в частности, возникает при кручении вокруг оси тел вращения. Различные методы его решения достаточно подробно разработаны в задачах кручения валов с переменным сечением и анализом возникающих при этом концентраций напряжений.

Присутствие в правой части уравнения (2.3) произвольной функции $\tau_0(z)$ свидетельствует о том, что в телах вращения возможно плоское напряженное состояние, неопределяемое рассматриваемым способом просвечивания. Не разбирая всех способов решения краевой задачи (2.3), (2.4), остановимся на методе сращиваемых асимптотических разложений. Проще всего асимптотическое решение получается для удлиненных частей тела с медленно меняющейся формой. В этом случае главный член асимптотического разложения находится из решения плоской задачи, т.е. в левой части уравнения (2.3) производная по z приравнивается нулю. Решение этого уравнения выражается в виде суммы

$$\sigma_{\rho\rho} = \sigma_0(z) + \sigma^*_{\rho\rho} \tag{2.5}$$

частного решения уравнения (2.3)

$$\rho\sigma^*_{\rho\rho}(\rho, z) = -\int_0^z \sigma_{\rho z}(\rho, t)\, dt - \rho \frac{\partial}{\partial z} \tau_1 + \frac{1}{\rho} \int_0^\rho t\, \sigma_{zz}(t, 0)\, dt \tag{2.6}$$

медленно изменяющейся функции $\sigma_0(z)$, определяемой из граничного условия (2.4). В свете трехмерной постановки задачи $\sigma_0(z)$ соответствует произвольной функции $\tau_0(z)$, входящей в (2.3), а формула (2.5) дает одно из возможных решений трехмерной задачи.

Таким образом, осесимметричное напряженное состояние в телах вращения путем просвечивания в системе плоскостей, ортогональных оси вращения, в общем случае однозначно не определяется. Использование закона суммы для определения напряжений физически обоснованно для участков с плавным изменением поверхности и напряжений вдоль оси вращения и соответствует нулевому приближению асимптотического решения. Более точное асимптотическое решение определяется формулами (2.5), (2.6). При несоблюдении указанных выше условий для полного определения напряжений необходимо проводить дополнительное просвечивание в меридиальной плоскости. Можно показать, что в этом случае внутренние напряжения определяются полностью на основе только уравнений равновесия, без привлечения соотношений Дюгамеля–Неймана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абен Х.К.* Интегральная фотоупругость. Таллинн: Валгус, 1975. 218с.
2. *Aben H.K., Josepson J.I., Kell K.J.E.* The case of weak birefringence in integrated photoelasticity // Optics and lasers in engineering. 1989. N. 11. N 3. P. 145–157.
3. *Келл К.-Ю.Э., Пуро А.Э.* Приближение очень слабой оптической анизотропии в теории интегральной фотоупругости // Оптика и спектроскопия. 1991. Т. 70. Вып. 2. С. 390–399.
4. *Aben H., Idnurm S., Puro A.* Integrated photoelasticity in case of weak birefringence // Изв. АН ЭССР. Сер. Физика. Математика. 1990. Т. 39. Вып. 3. С. 268–275.
5. *Пуро А.Э.* Томография при слабой оптической анизотропии // Тез. докл. 4-го. Всесоюз. симпоз. по вычислительной томографии. Ташкент, 1989. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. Т. 1. С. 36–37.
6. *Шарафутдинов В.А.* О методе интегральной фотоупругости в случае слабой оптической анизотропии // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 2. С. 350–353.

7. *Пуро А.Э.* Интегральная фотоупругость линейнодеформируемых цилиндрических образцов // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 41–48.
8. *Бартенев Г.М.* Строение и механические свойства неорганических стекол. М.: Стройиздат, 1966. 216с.
9. *Gardon R.* Thermal tempering of glass // Glass : Science and technology V. 5. Elasticity and strength in glasses. New York: Acad. Press, 1980. P. 146–213.
10. *Chu P.L., Whitbred T.* Measurement of stresses in optical fiber and preform//Appl. Optics. 1982. V. 21. № 23. P. 4241–4245.
11. *Пуро А.Э.* Определение закалочных напряжений в призматических образцах методом интегральной фотоупругости // ПМТФ. 1991. № 4. С. 179–182.
12. *O'Rourkl R.C.* Three-dimensional photoelasticity // J. Appl Phys. 1951. V. 22. № 7. P. 872–878.
13. *Aben H.* Tomographie optique des champs de contraints // Rev. Franq. Mec. 1989. № 1. P. 121–131.
14. *Godbole P.B., Chaudhari U.M., Bhave S.K.* A new integrated photoelasticity method for axisymmetric stress distribution // Exp. Mech. 1987. V. 27. № 1. P. 31–36.
15. *Kihara T.* Automatic whole-field measurement of photoelasticity using linear polarized incident light// Proc. 9th Intern. conf. on Experimental Mech. Copenhagen. Denmark, 1990. V. 2. P. 821–827.
16. *Боли Б., Уэйнер Д.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517с.
17. *Пуро А.Э.* Разделение уравнений теории упругости неоднородных тел // Известия АН ЭССР. Физика. Математика. 1989. Т. 38. Вып. 4. С. 372–378.

Таллинн

Поступила в редакцию
13.V.1991