ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, вып. 1, 1993

УДК 531.36

© 1993 г. А.С. Сумбатов

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ СИСТЕМ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Показано, что в системах с трением, описываемым законом Амонтона–Кулона, существуют движения, в которых по истечении любого, сколь угодно большого промежутка времени происходит диссипация механической энергии трением.

"Во многих случаях движение системы с трением происходит таким образом, что работа сил трения все более и более уменьшается по абсолютной величине" ([1], с. 124). Это свойство Аппель назвал "стремлением материальных систем избегать трения" и пояснил его доказательством следующего утверждения.

Пусть рассматриваемая материальная система

а) подчинена некоторым связям, не зависящим от времени;

б) подвержена действию внутренних сил с потенциалом, который положителен или равен нулю во всех возможных положениях системы, причем в нуль обращается в особом положении, являющемся положением устойчивого равновесия системы под действием одних только внутренних сил;

в) содержит твердые тела или точки, скользящие с трением друг по другу или по неподвижным телам;

г) имеет силовую функцию внешних сил, которая остается меньше некоторого определенного предела при всех возможных положениях системы, при которых осуществляется по крайней мере одно касание, дающее трение.

Тогда *на промежутке времени, в котором в системе сохраняется хотя бы одно касание со скольжением, мощность сил трения имеет своим верхним пределом нуль.*

Принимая классический закон трения скольжения Амонтона–Кулона, отсюда заключаем, что в некоторых точках контакта с трением нормальные реакции стремятся к нулю (и система как бы пытается освободиться в этих точках от связей с трением). В остальных точках, в которых происходит трение, скорости скольжения уменьшаются по абсолютной величине, скольжения стремятся исчезнуть. Эти выводы остаются справедливыми, если принять общий закон трения: при скольжении твердого тела A по твердому телу B, рассматриваемому как неподвижное, сила трения $F > 0$ и направлена в сторону, противоположную скорости $\mathbf{V}$ точки касания, причем $F = 0$ только тогда, когда равна нулю нормальная реакция. Таким образом, мощность силы трения, равная $-F|\mathbf{V}|$, является существенно отрицательной величиной, обращающейся в нуль только тогда, когда равна нулю нормальная реакция или скорость скольжения.

Из приведенного выше утверждения, однако, нельзя заключить, что скольжения с трением прекратятся за конечное время, т.е. в системе, которая удовлетворяет весьма общим условиям *а–г*, невозможны асимптотические по времени исчезающие скольжения с трением или постоянное чередование качений и скольжений. Между тем вопрос об установлении в системе (пусть за большой, но конечный промежуток времени) режима чистого качения является принципиальным для обоснования корректности классической модели неголономных систем.

Именно в задаче о качении одного твердого тела по поверхности другого без скольжения методы аналитической механики позволяют составить замкнутую систему дифференциальных уравнений движения тел, совершенно не затрагивая вопроса о том, какие именно силы, возникающие в точке контакта тел, обеспечивают отсутствие относительного проскальзывания тел в этой точке. Такая система является идеальной по Лагранжу, и метод виртуальных перемещений дает уравнения движения тел в форме, которая не содержит явно сил реакций. Когда уравнения движения составлены, можно найти формулы для реакции связей, но определить по ним природу этих сил, разумеется, невозможно.

Кинематическое условие отсутствия проскальзывания в точке контакта двух тел выражается, в общем случае, неголономными уравнениями связей, а сама модель качения тела без скольжения является идеализацией: среди многообразия движений реальных тел наблюдается как качение, так и скольжение, которые чередуются на конечном отрезке времени наблюдения. Чтобы составить уравнения системы в режиме скольжения, необходимо явно задать силу реакции, развивающуюся в точке соприкосновения тел. Как правило, реакцию моделируют силой трения (сухого, вязкого, комбинированного) или силой криппа.

1. Примем, что со стороны опорного твердого тела на скользящее по нему другое тело действует сила сухого трения. Тогда в случае чистого качения, согласно закону Амонтона–Кулона, отношение тангенциальной и нормальной составляющих реакции, вычисленное из уравнений движения тела и уравнений связей, по модулю не должно превосходить коэффициент трения покоя. В противном случае качение без скольжения невозможно, и пользоваться неголономной моделью нельзя.

Соблюдения этого условия, однако, еще недостаточно для вывода о корректности моделирования системы с качением силами сухого трения: решения уравнений неголономной модели будут адекватны действительности только в случае, если любое малое скольжение, могущее возникнуть от неучитываемых причин, исчезнет за короткое время. В частности, в системе не должно быть исчезающих скольжений, в которых скорость скольжения может обращаться в нуль только в отдельных точках числовой полуоси $t \geqslant t_0$.

Достаточные условия отсутствия в механической системе с сухим трением исчезающих скольжений были даны Г.К. Пожарицким [2]. Условия эти громоздки. Поэтому, видимо, отсутствуют приложения теоретических результатов работы [2].

Оказывается, что скольжения бесконечной длительности или постоянное чередование скольжений и качений в системах с сухим трением вполне возможны. Ниже это проиллюстрировано на двух простейших примерах.

2. Рассмотрим материальную кривую, по которой может двигаться с трением тяжелая бусинка. Пусть при надлежащем выборе системы координат уравнение кривой имеет вид

$$y = -x^2/2$$

Бусинка может быть в равновесии, когда $-k \leqslant x \leqslant k$, где $0 < k < 1$ – коэффициент трения.

Составим уравнения движения бусинки к точке $D(-k, -k^2/2)$ слева. Натуральные уравнения

$$v^2/\rho = P_n - N, \quad dv/dt = P_\tau - kN$$

Здесь v – скорость бусинки по модулю, ρ – радиус кривизны, P_τ и P_n – проекции веса на касательную и нормаль, N – нормальное давление, оказываемое со стороны кривой на бусинку. Масса бусинки и ее вес приняты равными единице. Эти уравнения можно записать в виде

$$dx/dt = vr^{-1}, \quad dv/dt = [r^2(k-y') + ky''v^2]\, r^{-3}; \quad r = (1 + y'^2)^{1/2}$$

(штрих означает производную по x), откуда находим

$$du/dx = k - y' + 2ky''ur^{-2}, \quad u = v^2/2$$

Общее решение этого линейного уравнения имеет вид

$$u(x) = [u(-1) + \int_{-1}^{x} \frac{k-y'}{E(w)}\, dw]\, E(x), \quad E(x) = \exp\left\{ \int_{-1}^{x} \frac{2dy''}{r^2} dx \right\}$$

$$\text{При } u(-1) = \int_{-1}^{-k} \frac{k-y'}{E(w)}\, dw \text{ имеем } u(-k) = 0, \quad \frac{du}{dx}(-k) = 0$$

Следовательно, на этом решении

$$\lim_{x \to -k-1} \int^{x} \frac{r dx}{u(x)^{1/2}} = +\infty$$

т.е. при движении с указанными начальными условиями бусинка входит в точку D за бесконечное время.

3. Рассмотрим плоскопараллельное движение тяжелого неоднородного колеса по прямолинейному рельсу.

Уравнения движения. Уравнения качения колеса с проскальзыванием [2, 3] запишем в безразмерной форме

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} = P\omega^2 + Q, \quad \dot{v} = R\omega^2 + W \tag{3.1}$$

$$P = (\eta - 1) j/s, \quad Q = -j/s, \quad j = \xi + \eta\mu k, \quad \sigma = \rho/r$$

$$R = \xi + (\eta - 1)(j\eta + \lambda\mu k)/s, \quad W = -(j\eta + \lambda\mu k)/s$$

$$\xi = \sigma\sin\varphi, \quad \eta = 1 - \sigma\cos\varphi, \quad s = \lambda + \xi j, \quad \mu = \operatorname{sgn} v$$

$$\lambda = \kappa^2/r^2, \quad \omega = \Omega/l, \quad v = V/(rl), \quad \tau = lt, \quad l = (g/r)^{1/2}$$

Здесь фазовые переменные φ, Ω, V – соответственно угол поворота, угловая скорость колеса и линейная скорость его точки, соприкасающейся с рельсом. Параметры: r – геометрический радиус колеса, κ – центральный радиус инерции, ρ – смещение центра масс, g – ускорение свободного падения, k – коэффициент трения. Точка означает дифференцирование по безразмерному времени τ.

Функции ξ, η представляют координаты центра масс C колеса относительно поступательно движущихся взаимно ортогональных осей Pxy (P – точка контакта колеса с рельсом, ось Py направлена вертикально вверх), φ – угол между нисходящей вертикалью и отрезком, соединяющим геометрический центр O колеса с точкой C.

В случае чистого качения уравнения движения колеса имеют вид

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} = H(\omega^2 + 1); \quad H = -\xi(\xi^2 + \eta^2 + \lambda)^{-1/2} \tag{3.2}$$

Рассматриваемая механическая система имеет переменную структуру: режимы качения и скольжения могут чередоваться, а при большой угловой скорости возможен отрыв колеса от рельса.

Условия смены режимов движения. Для дальнейшего необходимо восстановить условия взаимопереходов скольжения и качения. Кстати, заметим, что

$$(P\omega^2 + Q)\,|_{v=0} \neq H(\omega^2 + 1)$$

–факт, типичный для систем с сухим трением.

Если в некоторый момент времени $v = 0$, то в дальнейшем осуществится качение при условиях, что в данный момент времени выполняются неравенства

$$\left| \frac{[\omega^2(\xi^2 + \lambda) + \nu\eta]\,\xi}{\omega^2\xi^2\eta + \nu(\eta^2 + \kappa^2)} \right| < k \tag{3.3}$$

$s > 0$ и связь напряжена, т.е.

$$\omega^2\xi^2\eta + \nu(\eta^2 + \kappa^2) < 0 \quad (\nu = \omega^2(\eta - 1) - 1) \tag{3.4}$$

Условия перехода качения в скольжение в общем случае плоскопараллельного движения твердого тела по произвольной кривой с сухим трением содержатся в работе [4], в которой дана также изящная геометрическая интерпретация этих условий. Неравенства (3.3) и $s > 0$ (см. ниже) конкретизируют их для рассматриваемой системы.

Условие (3.4) можно получить следующим образом. Освободим колесо от связи, заменив ее действие реакцией. Теорема о движении центра масс C в проекции на ось Py дает $m\ddot{y}_C = N - mg$, откуда вытекает, что при натяжении связи $\ddot{y}_C + g > 0$. Но когда связь напряжена, имеем $y_C = r - \rho\cos\varphi$. Следовательно, искомое условие принимает вид

$$\sigma(\dot{\omega}\sin\varphi + \omega^2\cos\varphi) + 1 > 0.$$

Подставив в него выражение для $\dot{\omega}$ из уравнений (3.2), получим неравенство (3.4). Подстановкой $\dot{\omega}$ из (3.1) получим условие натяжения связи в режиме скольжения

$$\nu < 0 \tag{3.5}$$

Учитывая условия (3.4), неравенство (3.3) запишем в виде

$$|I| + Jk < 0; \quad I = [\omega^2 \frac{m+\lambda}{\eta} - \eta]\,\xi, \quad J = \omega^2 m - \lambda - \eta^2 \tag{3.6}$$

$$m = \eta^2 + \eta(\lambda + \sigma^2 - 1) - \lambda$$

Дальнейший анализ будет проведен при некоторых вполне естественных ограничениях на параметры. Примем, что центр масс расположен в круге колеса (т.е. $\sigma < 1$), квадрат безразмерного центрального радиуса инерции $\lambda > {}^1/_4$ (при этом условии часто встречающаяся дальше функция $i = \sigma^2 - \sigma\cos\varphi + \lambda > 0\ \forall\varphi$), коэффициент трения $0 < k < 1$, значения параметров λ, σ, k обеспечивают выполнение условия $s(\varphi) > 0$ при любом $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и $\mu = \pm 1$. Известно [4], что если $s < 0$, то в системе возможны возникновение ударных реакций и, в случае удерживающей связи, неоднозначность решений (парадокс Пенлеве). Раскроем знак модуля в неравенстве (3.6) при $\xi \geqslant 0$, т.е. при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Когда $\pi < \varphi < 2\pi$, картина полностью симметрична.

В указанном промежутке изменения угла φ функция $m(\varphi)$ имеет единственный нуль $0 < \varphi^* < \pi/2$, поскольку $m(0) < 0$, $m(\pi/2) > 0$, $\eta > 0$. Коэффициент при ω^2 в выражении для I положителен. Следовательно,

$$I < 0 \text{ при } \omega^2 < \bar{\omega}^2, \quad I > 0 \text{ при } \omega^2 > \bar{\omega}^2; \quad \bar{\omega}^2 = \eta^2/(m+\lambda)$$

Имеем

$$I + Jk = s_+(R_+\omega^2 + W_+), \quad -I + Jk = -s_-(R_-\omega^2 + W_-) \tag{3.7}$$

Индексами плюс и минус отмечены значения соответствующих выражений при $\mu = 1$ и $\mu = -1$.

Установим промежутки знакопостоянства функции

$$F_+(\xi) = \frac{-W_+}{R_+} = \frac{j_+\eta + \lambda\eta k}{j_+ m + \lambda\xi}$$

Ее числитель не обращается в нуль ($\xi > 0$). Знаменатель $Z(\varphi)$ имеет точно один нуль $\varphi' \in (0, \varphi^*)$. Действительно,

$$Z(0) = m(0)\,k < 0, \quad Z(\varphi^*) = \lambda\sigma\sin\varphi^*/(1 - \sigma\cos\varphi^*) > 0$$

$$dZ/d\varphi = j_+\xi + (1 - \eta + \xi k)\,i > 0, \quad \varphi \in (0, \varphi^*)$$

$$Z(\varphi) > 0 \quad \text{при} \quad \varphi^* < \varphi \leqslant \pi$$

Итак, $I + Jk < 0$ при $0 < \varphi < \varphi'$ и любых значениях ω^2. При $\pi \geqslant \varphi > \varphi'$

$$I + Jk > 0, \quad \text{если} \quad \omega^2 > F_+(\xi),$$

$$I + Jk < 0, \quad \text{если} \quad \omega^2 < F_+(\xi)$$

Исследуем аналогично функцию

$$F_-(\xi) = \frac{-W_-}{R_-} = \frac{j_-\eta - \lambda k}{\lambda k + j_- i}$$

Нули ее числителя N соответствуют точкам пересечения ветви гиперболы $\xi = (\eta + \lambda/\eta)\, k$ и окружности $\xi^2 + (\eta - 1)^2 = \sigma^2$. Возможное число точек пересечения равняется двум. Случай касания не рассматриваем как нетипичный. Очевидно, что при условии

$$\sigma < 2k\sqrt{\lambda} \tag{3.8}$$

кривые не пересекаются. Обозначим нули функции N через $\varphi_1 < \varphi_2$.

Знаменатель $D(\varphi) > 0\ \forall\ \varphi \in [0, \bar{\varphi}]$, где $\bar{\varphi} < \pi$ – угол, для которого $j = 0$. С другой стороны,

$$D(\pi) = -m(\pi)\, k < 0, \quad dD/d\varphi = \xi j_- + (1 - \eta)\, i < 0, \quad \varphi \in (\bar{\varphi}, \pi)$$

Следовательно, существует единственный нуль φ'' функции D в промежутке $(\bar{\varphi},\pi)$, причем, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi'' < \pi$, так как $N < 0$ в указанном промежутке.

Итак, если N не обращается в нуль, то $-I + Jk < 0$ при $0 < \varphi < \varphi''$ и любых значениях ω^2. В случае $N(\varphi_1) = N(\varphi_2) = 0$ данное неравенство выполняется в промежутке $(0, \varphi_1) \cup (\varphi_2, \varphi'')$ и любых значениях ω^2.

Можно проверить, что

$$\bar{\omega}^2 < F_-(\xi), \quad \pi > \varphi > \varphi''; \quad \bar{\omega}^2 < F_+(\xi), \quad \pi > \varphi > \varphi'$$

$$F_+(\xi) < (\eta - 1)^{-1}, \quad \pi > \varphi > \pi/2$$

Подведем итог исследования условий возникновения скольжения колеса. Предположим, что в данный момент времени $v = 0$.

а) Если удаление центра масс колеса от его геометрического центра невелико, так что выполняется неравенство (3.8), то при $\omega^2 < \bar{\omega}^2$, а также при $\omega^2 > \bar{\omega}^2$, но $\varphi \in [0, \varphi']$, качение колеса сохранится. При $\varphi' < \varphi \leqslant \pi$ и $\omega^2 < \bar{\omega}^2 < F_+$ скольжение также не возникнет, но когда $\omega^2 > F_+$, оно начнется с $v > 0$ (в силу соотношений (3.1), (3.7) $\operatorname{sgn} v = \operatorname{sgn} I$). Причем, если $\pi/2 < \varphi < \pi$. должно выполняться условие (3.5) натяжения связи;

б) Пусть $\omega^2 < \bar{\omega}^2$. Если функция F_- обращается в нуль в двух точках интервала $(0, \varphi'')$, что имеет место для колеса с достаточно большим смещением центра масс, то качение сохранится, когда $\varphi \in [0, \varphi_1] \cup [\varphi_2, \pi]$. В промежутке $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ обязательно начнется скольжение с $v < 0$. При $\omega^2 > \bar{\omega}^2$ условия перехода качения в скольжение остаются такими же, как в случае а.

Любопытно, что в случае б и достаточно малом по абсолютной величине значении угловой скорости условие непроскальзывания в принципе не может быть реализовано силой сухого трения.

Анализ неравенств проведен при условии $\xi > 0$. Заменой ξ на $-\xi$ получим картину, симметричную рассмотренной. Следует лишь учесть, что $F_-(\xi) = F_+(-\xi)$.

Стабильность качения. Корректность моделирования силы взаимодействия между колесом и рельсом силой сухого трения, в частности, означает, что, если в силу каких-либо неучтенных причин в начальных условиях, выбираемых для качения, скорость скольжения v отлична от нуля, но мала по абсолютной величине, то начавшееся скольжение исчезнет, перейдет в качение за короткий промежуток времени. Такое требование вполне естественно и вытекает из соображений о существовании пределов точности измерений у физических приборов и приближенности, грубости отражения реальных процессов природы математическими моделями.

Рассматриваем колесо с малым смещением центра масс (условие (3.8) выполнено).

Пусть в начальный момент времени $v = 0$. Скольжение не возникнет, если

$$\varphi \in [-\varphi', \varphi'] \quad \text{или} \quad \omega^2 < F - \epsilon \tag{3.9}$$

$$F = \begin{cases} F_+(\xi), & \text{если } \varphi' < \varphi \leqslant \pi \\ F_-(\xi), & \text{если } \pi < \varphi < 2\pi - \varphi' \end{cases}$$

где постоянная $\epsilon > 0$ выбрана так, что $F - \epsilon > 0$.

Полная механическая энергия колеса сохраняется в режиме качения. Следовательно,

$$\frac{1}{2}(\lambda + \xi^2 + \eta^2)\omega^2 + \eta = h$$

В промежутке $(\varphi', 2\pi - \varphi')$ из условия (3.9) находим

$$h < \frac{1}{2}(\lambda + \xi^2 + \eta^2)(F - \epsilon) + \eta$$

Правая часть этого неравенства положительная при $\epsilon \ll 1$ функция φ, причем она неограниченна на концах указанного промежутка. Существует минимум $h(\epsilon)$ данной функции.

Предположим, в начальный момент $h < h(\epsilon)$ и условие (3.9) выполнено. Тогда скольжение никогда не возникнет. Можно доказать, что при наличии скольжения в начальный момент времени оно прекратится за конечное время.

Достаточно рассмотреть случай $\xi > 0$. Пусть $v > 0$. Имеем при $0 < \varphi < \varphi'$

$$\dot{v} = R_+\omega^2 + W_+ < W_+ < -m_1 < 0, \quad m_1 = \min\left(\frac{j_+\eta + \lambda k}{s_+}\right)$$

Эта оценка сверху отрицательным числом по непрерывности сохранится в полуинтервале $[\varphi', \varphi' + \delta_1]$, если $\delta_1 > 0$ достаточно мало. При $\varphi' + \delta_1 < \varphi < \pi$:

$$\dot{v} = R_+(\omega^2 - \dot{F}_+) < -\epsilon R_+ < -\epsilon m_2 < 0, \quad m_2 = \min\left(\frac{j_+ m(\varphi) + \lambda\xi}{s_+\eta}\right)$$

Пусть $v < 0$. Имеем при $0 < \varphi < \varphi''$

$$\dot{v} = R_-\omega^2 + W_- > W_- > k(\eta - \sqrt{\lambda})^2/s_-$$

в силу (3.8). Оценка справедлива в малом полуинтервале $[\varphi'', \varphi'' + \delta_2]$, $\delta_2 > 0$. При $\varphi'' + \delta_2 < \varphi < \pi$

$$\dot{v} = R_-(\omega^2 - F_-) > -\epsilon R_- > 0$$

поскольку $F_+ < F_-$, $R_- < 0$ в указанном промежутке.

Итак, начавшееся скольжение действительно прекратится за конечное время.

Движения с постоянным чередованием качений и скольжений. Обозначим $h(0) = h_*$. Пусть в начальный момент времени $\varphi = v = 0$, $\omega > 0$ и постоянная $h = h_0 > h_*$. Если $\omega^2 < F$, то колесо покатится без скольжения до тех пор, пока изображающая на плоскости (h, φ) движение системы точка, двигаясь сначала по прямой $h = h_0$, не пересечет при $\varphi = \varphi_0$ график функции

$$G(\varphi) = \frac{1}{2}(\lambda + \xi^2 + \eta^2)F + \eta$$

Эта функция четна по φ и достигает наименьшего значения $h_* > 0$ в двух точках $\varphi' < \varphi_m < \pi$ и $2\pi - \varphi_m$.

При $\varphi > \varphi_0$ начнется скольжение, так как из неравенства $h_0 > G$ следует, что $\omega^2 > F$. График функции F на плоскости (ω^2, φ) качественно повторяет график $G(\varphi)$.

Пока $\varphi \leqslant \varphi_0$, изображающая точка движется вдоль интегральной кривой уравнения

$$d\omega^2/d\varphi = 2H(\omega^2 + 1) \tag{3.10}$$

при $\varphi > \varphi_0$ – уравнения

$$d\omega^2/d\varphi = 2(P_+\omega^2 + Q_+)$$

пока скольжение не закончится. В случае $h_0 = h_*$ соответствующая интегральная кривая Г уравнения (3.10) касается графика $F(\varphi)$ в точке φ_m, которая, вообще говоря, не является точкой минимума этой функции. В общем случае в точке $\varphi = \varphi_m$ кривизны кривых Г и F различны, т.е.

$$\left.\frac{d^2(\omega^2 - F)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi m} = \left.(4H^2(\omega^2 + 1) + 2(\omega^2 + 1)\frac{dH}{d\varphi} - \frac{d^2F}{d\varphi^2})\right|_{\varphi m} \neq 0. \tag{3.11}$$

а кривизна кривой G не равна нулю.

При малых значениях $\Delta h = h_0 - h_*$ движение колеса в режиме скольжения разбивается на два участка. На участке "разгона" скорость v монотонно возрастает от нулевого значения до

$$v_{max} = \frac{1}{2}c(\varphi_0)(\varphi_{01} - \varphi_0)^2 + \ldots, \quad c(\varphi) = \frac{d}{d\varphi}(\frac{R_+(\omega^2 - F)}{\omega})$$

На участке "торможения" скорость v уменьшается от v_{max} до нуля, причем

$$-v_{max} = \frac{1}{2}c(\varphi_{01})(\varphi_{02} - \varphi_{01})^2 + \ldots$$

Здесь $\varphi_{01} > \varphi_0$ – значение φ, при котором изображающая точка выходит из области, ограниченной кривой F (согласно третьему уравнению системы (3.1), $v_{max} = v(\varphi_{01})$), φ_{02} – угол начала нового качения, многоточием обозначены члены более высокого порядка малости в разложениях Тейлора.

Заметим, что переход качения в скольжение осуществляется плавно, при обратном переходе рвется ускорение $\dot{v}$ ("мягкий" удар).

В силу (3.11), малости Δh и непрерывности функций $\omega(\varphi)$, $G(\varphi)$ и $F(\varphi)$ величины $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_0$ и $\varphi_m - \varphi_0$ – эквивалентные бесконечно малые ($\Delta\varphi \sim \varphi_m - \varphi_0$), причем

$$\Delta h \sim (\Delta\varphi)^2 \tag{3.12}$$

(оценку (3.12) можно получить, заменив в малой окрестности точки $\varphi = \varphi_m$ на плоскости (h, φ) кривую G соприкасающейся параболой).

В режиме скольжения полная механическая энергия колеса (с точностью до коэффициента пропорциональности и аддитивной постоянной)

$$E = \frac{1}{2}[(v - \omega\eta)^2 + (\xi^2 + \lambda)\omega^2] + \eta$$

Мощность работы силы трения $\dot{E} = v\mu\lambda kv/s < 0$.

Так как $c(\varphi_m)|_Г = 0$, то $c(\varphi_{01}) \sim \Delta\varphi$, $c(\varphi_{02}) \sim \Delta\varphi$. Следовательно, $v_{max} \sim (\Delta\varphi)^3$, убыль энергии за одни цикл скольжения

$$\Delta E \sim (\Delta\varphi)^4 \tag{3.13}$$

Из оценок (3.12) и (3.13) следует, что после окончания скольжения полная механическая энергия колеса $h_1 > h_*$. Поэтому независимо от того, будет ли дальнейшее движение колеса вращательным или либрационным, снова начнется кратковременное скольжение вблизи точек $\varphi = 2\pi - \varphi_m$ и $\varphi = \varphi_m$. После i-го скольжения энергия $h_i > h_*$ (монотонно убывающая последовательность $\{ h_i \}$ имеет своим пределом число h_*). Режимы качения и скольжения колеса будут постоянно чередоваться. При этом длительность скольжений уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. *Пожарицкий Г.К.* Исчезающие скольжения механических систем с сухим трением // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 558–563.
3. *Сумбатов А.С.* О движении систем с сухим трением // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1986. С. 63–76.
4. *Болотов Е.А.* О движении материальной плоской фигуры, стесненной связями с трением // Матем. сб. 1906. Т. 25. № 4. С. 562–708.

Москва

Поступила в редакцию
27.VII. 1992