ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, вып. 1, 1993

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. Ю.Э. Сеницкий

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА

Рассматривается нестационарная связанная задача электроупругости о динамическом кручении конечного полого цилиндра из неоднородного пьезоэлектрического материала в случае, когда на его криволинейных поверхностях заданы зависящие произвольно от времени электрический потенциал или касательные напряжения. Применяется метод разложения по собственным вектор-функциям в форме структурного алгоритма конечных интегральных преобразований. Показано, что замкнутое решение может быть получено при степенном законе неоднородности электрических, упругих и инерционных характеристик материала. Полученные результаты справедливы для кристаллов тетрагональной симметрии 422 класса и гексагональной сингонии 622 класса.

Проблема интегрируемости уравнений теории упругости неоднородных изотропных и трансверсально изотропных тел достаточно полно исследована для случая статического нагружения [1–3]. При нестационарном взаимодействии силового и электрического полей эффективным представляется метод разложения по собственным вектор-функциям [4], с использованием которого, а также метода конечных разностей получены решения некоторых частных задач динамической электроупругости лишь для однородных тел [4–6].

1. Пусть полый круговой конечный цилиндр в цилиндрической системе координат (r, θ, z) занимает область Ω: $\{a \leqslant r \leqslant b,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant l\}$, представляет собой линейно-упругое анизотропное тело и выполнен из пьезоэлектрического неоднородного материала, физико-механические и электрические характеристики которого непрерывно изменяются вдоль радиуса r. Рассматривается случай, когда торцы цилиндра $(z = 0, l)$ свободны от напряжений и электрических зарядов, в то время как на внутренней и внешней криволинейных поверхностях $(r = a, b)$ действуют соответственно касательные напряжения $\sigma(z, t)$ и электрический потенциал $p(z, t)$. Такая формулировка обобщает физически реализуемые граничные условия, так как фактически задаются только $p(z, t)$ или $\sigma(z, t)$. Поскольку цилиндр совершает крутильные вынужденные колебания, то в начальный момент времени $(t = 0)$ считаются известными распределение тангенциальных перемещений $g_1(r, z)$ и их скоростей $g_2(r, z)$. Следует отметить, что компоненты тензора напряжений и вектора перемещений при этом не зависят от угловой координаты θ.

Математическая модель сформулированной задачи включает дифференциальные уравнения движения и электростатики сплошной пьезоэлектрической среды [4, 5, 7]

$$\frac{\partial}{\partial r}\tau_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{z\theta} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}v = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}D_r + \frac{\partial}{\partial z}D_z + \frac{1}{r}D_r = 0; \quad u = w = 0 \tag{1.1}$$

которые связаны уравнениями состояния

$$\tau_{r\theta}=c_{66}(\frac{\partial}{\partial r}v-\frac{1}{r}v),\quad \tau_{z\theta}=c_{44}\frac{\partial}{\partial z}v+e_{14}\frac{\partial}{\partial r}\Phi$$

$$D_r=e_{14}\frac{\partial}{\partial z}v+\epsilon_{11}\frac{\partial}{\partial r}\Phi,\quad D_z=-\epsilon_{33}\frac{\partial}{\partial z}\Phi \tag{1.2}$$

и дополняются граничными и начальными условиями.

Для рассматриваемой одномерной неоднородности механических и электрических характеристик среды справедливо представление

$$\rho=Sf(r),\quad c_{44}=C_{44}f(r),\quad c_{66}=C_{66}f(r),\quad e_{14}=E_{14}f(r),\quad \epsilon_{11}=E_{11}f(r),$$
$$\epsilon_{33}=E_{33}f(r) \tag{1.3}$$

В соотношениях (1.1)–(1.3) $\tau_{r\theta}(r, z, t)$, $\tau_{z\theta}(r, z, t)$ – компоненты тензора механических напряжений, $v(r, z, t)$ – тангенциальная компонента вектора перемещений, $D_r(r, z, t)$, $D_z(r, z, t)$ – компоненты вектора электрической индукции, $\Phi(r, z, t)$ – электрический потенциал, $c_{ii}(r)$, $\rho(r)$ – упругие характеристики и плотность материала (i = = 4, 6), $\epsilon_{kk}(r)$ – диэлектрические проницаемости (k = 1, 3), $e_{14}(r)$ – пьезомодуль цилиндра, C_{ii}, S, E_{kk}, E_{14} – соответствующие физико-механические и пьезоэлектрические характеристики однородной среды (свойства этих материальных постоянных подробно описаны [7]), $f(r)$ – произвольная безразмерная непрерывно-дифференцируемая функция неоднородности.

В результате подстановки равенств (1.2), (1.3) в уравнения (1.1) получаем систему уравнений динамического кручения неоднородного пьезоэлектрического цилиндра при взаимодействии сопряженных силового и электрического полей, а также краевые условия

$$C_{66}[\frac{\partial^2}{\partial r^2}v+F(r)\frac{\partial}{\partial r}v-\frac{1}{r}F(r)v]+C_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}v+E_{14}\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\Phi-S\ddot{v}=0$$

$$E_{14}\frac{\partial}{\partial z}[\frac{\partial}{\partial r}v+F(r)v]-E_{11}[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi+F(r)\frac{\partial}{\partial r}\Phi]-E_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi=0 \tag{1.4}$$

$$C_{44}\frac{\partial}{\partial z}v+E_{14}\frac{\partial}{\partial r}\Phi=0,\quad \Phi=0,\quad z=0,l \tag{1.5}$$

$$C_{66}(\frac{\partial}{\partial r}v-\frac{1}{r}v)=\sigma^*(z,t),\quad \Phi=0,\quad r=a$$

$$\frac{\partial}{\partial r}v-\frac{1}{r}v=0,\quad \Phi=p(z,t),\quad r=b \tag{1.6}$$

$$v=g_1(r,z),\quad \dot{v}=g_2(r,z),\quad t=0,\quad F(r)=f'(r)/f(r)+r^{-1},\quad \sigma^*=\sigma/f(a) \tag{1.7}$$

Штрих означает дифференцирование по r, точка – по t.

2. Решение рассматриваемой начально-краевой задачи (1.4)–(1.7) осуществляем методом интегральных преобразований. Применяем сначала конечные косинус и синус преобразования Фурье по переменной z при учете граничных условий (1.5). Затем полученную в пространстве изображений краевую задачу относительно трансформант $v_c(r, n, t)$, $\Phi_s(r, n, t)$ приводит к стандартной форме. Для этого вводится представление.

$$v_c(r,n,t)=h_c(r)\sigma_c(n,t)+V_c(r,n,t)$$
$$\Phi_s(r,n,t)=h_s(r)p_s(n,t)+\varphi_s(r,n,t);\ \{h_c(r),h_s(r)\}\in C_2[a,b] \tag{2.1}$$

В результате подстановки выражений (2.1) в уравнения и краевые условия при учете соотношений

$$h_c''(r) + F(r)h_c'(r) - [r^{-1}F(r) + \epsilon^{-1}\alpha_n^2]\, h_c(r) = 0$$

$$h_s''(r) + F(r)h_s'(r) - \chi^{-1}\alpha_n^2 h_s(r) = 0 \qquad (2.2)$$

$$h_c'(a) - a^{-1}h_c(a) = C_{66}^{-1}, \quad h_s(a) = 0, \quad h_c'(b) - b^{-1}h_c(b) = 0, \quad h_s(b) = 1 \qquad (2.3)$$

приводим преобразованную краевую задачу к стандартной форме

$$C_{66}[\frac{\partial^2 V_c}{\partial r^2} + F(r)\frac{\partial V_c}{\partial c} - \frac{1}{r}F(r)V_c] - C_{44}\alpha_n^2 V_c + E_{14}\alpha_n\frac{\partial \varphi_s}{\partial r} - SV_c^{\bullet\bullet} = P_c(r, n, t)$$

$$E_{11}[\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial r^2} + F(r)\frac{\partial \varphi_s}{\partial r}] - E_{33}\alpha_n^2\varphi_s + E_{14}\alpha_n[\frac{\partial V_c}{\partial r} + F(r)V_c] = Q_s(r, n, t) \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial V_c}{\partial r} - \frac{1}{r}V_c = 0, \quad \varphi_s = 0, \quad r = a, b \qquad (2.5)$$

$$V_c = G_{1c}(r, n), \quad V_c^{\bullet} = G_{2c}(r, n), \quad t = 0 \qquad (2.6)$$

Здесь

$$P_c(r, n, t) = Sh_c(r)\sigma_c^{\bullet\bullet}(n, t) - E_{14}\alpha_n h_s'(r)p_s(n, t),$$

$$Q_s(r, n, t) = -E_{14}\alpha_n \sigma_c(n, t)[h_c'(r) + F(r)h_c(r)] \qquad (2.7)$$

$$\{V_c(r, n, t), \sigma_c(n, t), g_{1c}(r, n), g_{2c}(r, n)\} = \int_0^l \{v(r, z, t), \sigma^*(z, t), g_1(r, z), g_2(r, z)\}\cos\alpha_n z\,dz$$

$$\{\Phi_s(r, n, t), p_s(n, t)\} = \int_0^l \{\Phi(r, z, t), p(z, t)\}\sin\alpha_n z\,dz; \quad \alpha_n = n\pi l^{-1}$$

$$G_{1c}(r, n) = g_{1c}(r, n) - h_c(r)\sigma_c(n, 0), \quad G_{2c}(r, n) = g_{2c}(r, n) - h_c(r)\sigma_c^{\bullet}(n, 0)$$

$$\epsilon = C_{66}/C_{44}, \quad \chi = E_{11}/E_{33}$$

К краевой задаче (2.4)–(2.6) применяем теперь вырожденное конечное интегральное преобразование (КИП) по переменной r, т.е. преобразование вида [8][1]

$$q(\lambda_{in}, n, t) = \int_a^b m(r)V_c(r, n, t)K_1(\lambda_{in}, r)dr \qquad (2.8)$$

$$\{V_c(r, n, t), \varphi_s(r, n, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} q(\lambda_{in}, n, t)\{K_1(\lambda_{in}, r), K_2(\lambda_{in}, r)\}\,\|K_{in}\|^{-2} \qquad (2.9)$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_a^b m(r)K_1^2(\lambda_{in}, r)dr$$

Здесь λ_{in} ($i = 1, 2, \ldots$) – положительные параметры, образующие счетное множество, $\|K_{in}\|$ – норма вектор-функции ядра вырожденного преобразования.

Для рассматриваемой системы уравнений (2.4) весовая функция определяется следующей квадратурой [9]:

$$m(r) = \exp[\int F(r)dr] \qquad (2.10)$$

Особенность введенного КИП состоит в том, что его трансформанта (2.8) и формула обращения (2.9), представленная в векторной форме, содержат различное число

[1] См. также *Синицкий Ю.Э.* Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во СГУ, 1985. 176 с.

компонент вектор-функции ядра $\mathbf{K}(\lambda_{in}, r)$. Разложения (2.9) справедливы при выполнении соотношения ортогональности [4]

$$\int_a^b m(r) K_1(\lambda_{in}, r) K_1(\lambda_{jn}, r)\, dr = \delta_i^j \, \|K_{in}\|^2 \tag{2.11}$$

где δ_i^j – символ Кронекера.

Было показано [10], что при условии ограниченности трансформант $q(\lambda_{in}, n, t)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ обеспечивается единственность представлений и сходимость в метрике пространства L_2 разложений, определяемых формулами обращения (2.9).

В соответствии со структурным алгоритмом метода КИП [8] умножаем первое уравнение (2.4) и начальные условия (2.6) на $m(r)K_1(\lambda_{in}, r)$, а второе уравнение – на $m(r)K_2(\lambda_{in}, r)$, интегрируем по промежутку [а, в] и складываем. Интегрируя затем по частям и удовлетворяя условиям

$$\{ C_{66} m(r)[(\partial V_c/\partial r)K_1 - V_c K_1'] + E_{14}\alpha_n m(r)(\varphi_s K_1 - V_c K_2) + E_{11} m(r)[(\partial\varphi_s/\partial r)K_2 - \varphi_s K_2'] \} \Big|_a^b = 0 \tag{2.12}$$

$$\int_b^a m(r)[V_c L(K_1, K_2) + \varphi_s M(K_1, K_2)]\, dr = -\lambda_{in}^2 C_{66} \int_a^b m(r) V_c K_1\, dr \tag{2.13}$$

первое из которых представляет равенство нулю билинейной формы на концах интервала, а второе – операционное свойство, получаем счетную систему задач Коши для трансформанты $q(\lambda_{in}, n, t)$:

$$q^{\bullet\bullet}(\lambda_{in}, n, t) + \omega_{in}^2 q(\lambda_{in}, n, t) = -S^{-1} N(\lambda_{in}, n, t), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

$$q(\lambda_{in}, n, 0) = G_1(\lambda_{in}, n), \quad q^{\bullet}(\lambda_{in}, n, t)|_{t=0} = G_2(\lambda_{in}, n), \quad t = 0$$

Здесь ω_{in} – круговые частоты крутильных колебаний цилиндра

$$G_1(\lambda_{in}, n) = \int_a^b m(r) G_{1c}(r, n) K_1(\lambda_{in}, r)\, dr, \quad G_2(\lambda_{in}, n) = \int_a^b m(r) G_{2c}(r, n) K_1(\lambda_{in}, r)\, dr$$

$$N(\lambda_{in}, n, t) = \int_a^b m(r)[P_c(r, n, t) K_1(\lambda_{in}, r) + Q_s(r, n, t) K_2(\lambda_{in}, r)]\, dr, \quad \omega_{in} = \lambda_{in}(C_{66}/S)^{1/2}$$

$$L(K_1, K_2) = C_{66}[K_1'' + F(r)K_1' - r^{-1}F(r)K_1] - C_{44}\alpha_n^2 K_1 - E_{14}\alpha_n K_2'$$

$$M(K_1, K_2) = E_{11}[K_2'' + F(r)K_2'] - E_{33}\alpha_n^2 K_2 - E_{14}\alpha_n[K_1' + F(r)K_1]$$

Из уравнения (2.14) определяется трансформанта КИП

$$q(\lambda_{in}, n, t) = G_1(\lambda_{in}, n)\cos\omega_{in} t + \omega_{in}^{-1} G_2(\lambda_{in}, n)\sin\omega_{in} t - (S\omega_{in})^{-1} \int_0^t N(\lambda_{in}, n, \tau)\sin\omega_{in}(t - \tau)\, d\tau \tag{2.15}$$

3. Возвращаемся к соотношениям (2.12), (2.13) которые совместно с граничными условиями (2.5) позволяют сформулировать однородную краевую задачу для компонентов K_1, K_2 ядра преобразования. Из (2.13) следует такая система уравнений

$$L(K_1, K_2) + \lambda_{in}^2 C_{66} K_1 = 0, \quad M(K_1, K_2) = 0 \tag{3.1}$$

Равенства (2.12) и (2.5) приводят к соответствующим условиям

$$K_1'(\lambda_{in}, r) - r^{-1} K_1(\lambda_{in}, r) = 0, \quad K_2(\lambda_{in}, r) = 0, \quad r = a, b \tag{3.2}$$

Замечаем, что собственные функции краевой задачи (3.1), (3.2) удовлетворяют соотношению ортогональности (2.11) и, следовательно, краевая задача (3.1), (3.2) является самосопряженной.

Рассмотрим вопрос об интегрируемости системы (3.1), так как с ним связана возможность построения замкнутого решения исследуемой задачи. Дифференцируя второе уравнение (3.1) и принимая во внимание операторное равенство

$$[K'_k + F(r)K_k]' = K''_k + F(r)K'_k - r^{-1}F(r)K_k, \quad k = 1, 2 \tag{3.3}$$

заключаем, что система (3.1) эквивалентна такому разрешающему уравнению четвертого порядка:

$$\epsilon\chi\nabla_F^4 K_1(\lambda_{in}, r) - \alpha_n^2 B_{in}\nabla_F^2 K_1(\lambda_{in}, r) + \alpha_n^4 A_{in} K_1(\lambda_{in}, r) = 0 \tag{3.4}$$

$$\nabla_F^2 = \frac{d^2}{dr^2} + F(r)\frac{d}{dr} - r^{-1}F(r)$$

$$B_{in} = \chi A_{in} + \epsilon + \eta, \quad A_{in} = 1 - \gamma_h^{-2}\lambda_{in}^2, \quad \gamma_h^2 = \alpha_n^2\epsilon^{-1}, \quad \eta = E_{14}^2(E_{33}C_{44})^{-1} \tag{3.5}$$

Вводим порождающее уравнение

$$\nabla_F^2 K_1(\lambda_{in}, r) = -\xi_{in}^2 K_1(\lambda_{in}, r) \tag{3.6}$$

и определяем из (3.4)

$$(\xi_{in}^2)_{1,2} = \alpha_n^2[-B_{in} \pm (2\chi\epsilon)^{-1}(B_{in}^2 - 4\chi\epsilon A_{in})^{1/2}]$$

Возвращаясь к равенствам (3.3), (1.8), находим

$$F(r) = (m+1)r^{-1}, \quad f(r) = r^m \tag{3.7}$$

Здесь m – произвольная вещественная постоянная.

Учитывая выражения (3.7) и сделав замену переменных по формулам

$$K_{1N}(\lambda_{in}, r) = r^{-m/2} W_N(x), \quad x = \xi_{in} r, \quad N = 1, 2. \tag{3.8}$$

приводим (3.6) к уравнению Бесселя относительно $W_N(x)$.

Если учесть линейность дифференциального уравнения (3.4), а также зависимости (3.8), то его общее решение теперь можно представить следующим образом:

$$K_1(\lambda_{in}, r) = \sum_{N=1}^{2} K_{1N}(\lambda_{in}, r) = r^{-m/2}\sum_{N=1}^{2}[A_{inN}J_{m/2+1}(\xi_{inN}r) +$$
$$+ B_{inN}Y_{m/2+1}(\xi_{inN}r)] \tag{3.9}$$

где $J_{m/2+1}(\ldots)$, $Y_{m/2+1}(\ldots)$ – цилиндрические функции первого и второго рода, A_{inN}, B_{inN} – произвольные постоянные интегрирования.

Располагая соотношениями (3.6), (3.9), из первого уравнения системы (3.1) определяем вторую компоненту ядра преобразования

$$K_2(\lambda_{in}, r) = \frac{C_{44}}{E_{14}\alpha_n} r^{-m/2}\sum_{N=1}^{2}\beta_{inN}\xi_{inN}^{-1}[A_{inN}J_{m/2}(\xi_{inN}r) + B_{inN}Y_{m/2}(\xi_{inN}r)] \tag{3.10}$$

$$\beta_{inN} = \epsilon\xi_{inN}^2 + \alpha_n^2 A_{inN}, \quad N = 1, 2$$

Весовая функция КИП вычисляется по формулам (2.10), (3.7)

$$m(r) = r^{m+1} \tag{3.11}$$

а квадрат нормы соответственно – по выражениям (2.9), (3.9)–(3.11).

В результате подстановки выражений (3.9), (3.10) в равенства (3.2) формируется однородная система алгебраических уравнений относительно A_{inN}, B_{inN}. Из условия нетривиальности ее решения получаем трансцендентное уравнение для определения собственных значений λ_{in} и находим A_{inN}, B_{inN}:

$$D(\lambda_{in}) = \det a_{sk} = 0, \quad s, k = 1, 2, 3, 4 \tag{3.12}$$

$$B_{in2} = D_4 = \det a_{sk}, \quad s, k = 1, 2, 3, \quad A_{inN} = D_N, \quad B_{in1} = D_3 \tag{3.13}$$

Определители D_1, D_2, D_3 следуют из D_4 заменой соответственно первого, второго третьего столбцов на colon $\{a_{14} \; a_{24} \; a_{34}\}$.

В равенствах (3.12), (3.13) введены обозначения:

$$a_{sk} = \beta_{ink}\, \xi_{ink}^{-1} J_{m/2}(\xi_{ink} r), \qquad s, k = 1, 2, \qquad r = a, b \text{ при } s = 1, 2$$

$$a_{sk} = \beta_{in,k-2}\, \xi_{in,k-2}^{-1} Y_{m/2}(\xi_{in,k-2} r), \quad s = 1, 2, \quad k = 3, 4, \qquad r = a, b \text{ при } s = 1, 2$$

$$a_{sk} = \xi_{ink} J_{m/2+2}(\xi_{ink} r), \quad s = 3,4, \quad k = 1, 2, \quad r = a, b \text{ при } s = 3, 4$$

$$a_{sk} = \xi_{in,k-2} Y_{m/2+2}(\xi_{in,k-2} r), \quad s, k = 3, 4, \quad r = a, b \text{ при } s = 3, 4$$

4. Заключительным этапом исследования является определение функций $h_c(r), h_s(r)$ входящих в представление (2.1). Воспользуемся уравнениями (2.2) и равенством (3.7). Общие их интегралы записываются в модифицированных функциях Бесселя $I_\nu(\ldots), K_\nu(\ldots)$. С учетом граничных условий (2.3) получаем

$$h_c(r) = \frac{1}{\gamma_n C_{66}} \left(\frac{a}{r}\right)^{m/2} \frac{K_{m/2+2}(\gamma_n b) I_{m/2+1}(\gamma_n r) + I_{m/2+2}(\gamma_n b) K_{m/2+1}(\gamma_n r)}{I_{m/2+2}(\gamma_n a) K_{m/2+2}(\gamma_n b) - I_{m/2+2}(\gamma_n b) K_{m/2+2}(\gamma_n a)} \tag{4.1}$$

$$h_s(r) = \left(\frac{b}{r}\right)^{m/2} \frac{I_0(\mu_n a) K_0(\mu_n r) - K_0(\mu_n a) I_0(\mu_n r)}{I_0(\mu_n a) K_0(\mu_n b) - I_0(\mu_n b) K_0(\mu_n a)}$$

$$\mu_n = m^2/4 + \zeta^2, \quad \zeta^2 = \alpha_n^2 \chi^{-1}$$

Применяя к выражениям (2.15) и (2.1) последовательно формулы обращения вырожденного КИП (2.9) и конечного преобразования Фурье, получаем такие разложения для функций тангенциальных перемещений и электрического потенциала цилиндра

$$v(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \cos\alpha_n z \left[h_c(r)\sigma_c(n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} q(\lambda_{in}, n, t) K_1(\lambda_{in} r) \|K_{in}\|^{-2}\right] \tag{4.2}$$

$$\Phi(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\alpha_n z \left[h_s(r) p_s(n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} q(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in} r) \|K_{in}\|^{-2}\right]$$

$$\Omega_n = \begin{cases} l/2 & \text{при} \quad n \neq 0 \\ l & \text{при} \quad n = 0 \end{cases}$$

Равенства (4.2) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.4) и краевым условиям (1.5)–(1.7), т.е. представляют замкнутое решение рассматриваемой задачи при степенном законе (3.7) изменения вдоль радиуса физико-механических и электрических характеристик цилиндра. Выражения (4.2) построены для произвольных воздействий, поэтому, принимая в качестве $\sigma(z, t)$, $p(z, t)$ различные функциональные зависимости и вычисляя трансформанты (2.7), (2.15), могут быть получены соответствующие частные результаты. В случае, когда $m = 0$ решение (4.2) справедливо для однородного пьезоэлектрического цилиндра. Следует отметить, что уравнения (1.4) при $m = 0$, $F(r) = r^{-1}$ представляют записанную в цилиндрических координатах систему (3.43), (3.44) [7] для случая антиплоской деформации, и кристаллов 422, 622 классов ([7], табл. 3.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
2. *Плевако В.П.* К теории упругости неоднородных сред. // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 853–860.
3. *Пуро А.Э.* О построении общих решений теории упругости неоднородных тел. // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 1039–1045.
4. *Жарий О.Ю.* Метод разложения по собственным функциям в задачах динамической электроупругости. // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 109–115.
5. *Жарий О.Ю., Улитко А.Ф.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн. Киев: Вища. шк., 1989. 184 с.
6. *Мельник В.Н., Москальков М.Н.* О связанных электроупругих нестационарных колебаниях пьезокерамического цилиндра с радиальной поляризацией. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 11. С. 1755–1756.
7. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
8. *Сеницкий Ю.Э.* Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики. // Изв. вузов. Математика. 1991. № 4. С. 57–63.
9. *Сеницкий Ю.Э.* О некоторых тождествах, используемых при решении краевых задач методом конечных интегральных преобразований. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 9. С. 1636–1638.
10. *Сеницкий Ю.Э.* Сходимость и единственность представлений, определяемых формулой обращения многокомпонентного обобщенного конечного интегрального преобразования. // Изв. вузов. Математика. 1991. № 9. С. 53–56.

Самара

Поступила в редакцию
22.1.1992