

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. В.Г. Попов

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ,
СОДЕРЖАЩЕЙ ЖЕСТКОЕ КРЕСТООБРАЗНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ**

Рассматриваются колебания расположенного в неограниченной среде жесткого крестообразного симметричного включения, к которому приложен периодически меняющийся по времени крутящий момент (рассматривается случай плоской деформации). Используются разрывные решения плоской теории упругости (на заданной линии перемещения и напряжения терпят разрывы). Относительно неизвестных скачков получена система интегральных уравнений, которая решается методом механических квадратур. Исследуются зависимости амплитуды колебаний включения от частоты, концентрация упругих напряжений вблизи концов включения, волновое поле в дальней зоне.

1. Построим разрывное решение динамической задачи теории упругости в случае гармонических колебаний среды, находящейся в условиях плоской деформации. Разрывы имеются на отрезке $x = 0, -a_1 \leq y \leq a_1$, со скачками (временной множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опущен):

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= \chi_1(y), \quad \langle \tau_{xy} \rangle = \chi_2(y), \quad \langle u \rangle = \chi_3(y) \\ \langle v \rangle &= \chi_4(y), \quad \langle f \rangle = f(+0, y) - f(-0, y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Разрывным решением уравнений Ламе для гармонических колебаний в условиях плоской деформации, имеющим скачки (1.1) и удовлетворяющим условию излучения на бесконечности, являются функции

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \int_{-a_1}^{+a_1} \frac{\chi_1(\eta)}{\mu \kappa_2^2} \left[\left(\kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) r_1 - \frac{\partial^2 r_2}{\partial y^2} \right] d\eta + \int_{-a_1}^{+a_1} \frac{\chi_2(\eta)}{\mu \kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (r_2 - r_1) d\eta + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a_1}^{+a_1} \chi_3(\eta) r_1 d\eta + 2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a_1}^{+a_1} \frac{\chi_3(\eta)}{\kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (r_1 - r_2) d\eta + \\ &+ \int_{-a_1}^{+a_1} \frac{\chi_4(\eta)}{\kappa_2^2} \left[2 \left(\kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial r_1}{\partial y} - \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial r_2}{\partial y} \right] d\eta \quad (1.2) \\ v_1(x, y) &= \int_{-a_1}^{+a_1} \frac{\chi_1(\eta)}{\mu \kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (r_2 - r_1) d\eta + \int_{-a_1}^{+a_1} \frac{\chi_2(\eta)}{\mu \kappa_2^2} \left[-\frac{\partial^2 r_1}{\partial y^2} + \right. \\ &+ \left. \left(\kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) r_2 \right] d\eta + \int_{-a_1}^{+a_1} \frac{\chi_3(\eta)}{\kappa_2^2} \left[\left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial r_1}{\partial y} - 2 \left(\kappa_2^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial r_2}{\partial y} \right] d\eta + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a_1}^{+a_1} \chi_4(\eta) r_2 d\eta + 2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a_1}^{+a_1} \frac{\chi_4(\eta)}{\kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (r_2 - r_1) d\eta \end{aligned}$$

Здесь

$$\kappa_1^2 = \rho \omega^2 / (\lambda + 2\mu), \quad \kappa_2^2 = \rho \omega^2 / \mu$$

$$\begin{aligned} r_j &= r_j(\eta - y, x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\alpha x + i\beta(\eta - y))}{\alpha^2 + \beta^2 - \kappa_j^2} d\alpha d\beta = \\ &= -\frac{1}{4} i H_0^{(1)} \left[\kappa_j \sqrt{(\eta - y)^2 + x^2} \right], \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

$r_j(y, x)$ — решение уравнения Гельмгольца: $\Delta \varphi_j + \kappa_j^2 \varphi_j = \delta(x) \delta(y)$.

При построении разрывного решения была применена обобщенная схема метода интегральных преобразований [1].

Рассмотрим разрывное решение, терпящее на отрезке $y = 0, -a_2 \leq x \leq a_2$ скачки:

$$\begin{aligned} [\sigma_y] &= \varphi_1(x), \quad [\tau_{yx}] = \varphi_2(x), \quad [v] = \varphi_3(x), \quad [u] = \varphi_4(x) \\ [f] &= f(x, +0) - f(x, -0), \quad -a_2 \leq x \leq a_2 \end{aligned}$$

Обозначим его $u_2(x, y)$ и $v_2(x, y)$. Тогда оно может быть построено по формулам (1.2), если $\chi_j(x)$ заменить на $\varphi_j(x)$, переменные x и y поменять местами. При этом формула для u_1 перейдет в формулу для v_2 , а формула для v_1 — в формулу для u_2 .

Построенные разрывные решения могут быть эффективно применены для сведения к интегральным уравнениям динамических задач теории упругости для сред, содержащих дефекты типа трещин и тонких жестких включений.

2. Рассмотрим следующую задачу. Пусть в упругой среде расположено тонкое жесткое крестообразное включение, лежащее на двух пересекающихся в начале координат отрезках

$$x = 0, \quad -a_1 \leq y \leq a_1, \quad y = 0, \quad -a_2 \leq x \leq a_2$$

к которому приложен периодически изменяющийся по времени момент $Me^{-i\omega t}$. Включение будем моделировать отрезками прямых, на которых терпят разрыв напряжения

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= \chi_1(y), \quad \langle \tau_{xy} \rangle = \chi_2(y), \quad -a_1 \leq y \leq a_1 \\ [\sigma_y] &= \varphi_1(x), \quad [\tau_{yx}] = \varphi_2(x), \quad -a_2 \leq x \leq a_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

а перемещения удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} u(\pm 0, y) &= \gamma y, \quad v(\pm 0, y) = 0, \quad -a_1 \leq y \leq a_1 \\ v(x, \pm 0) &= \gamma x, \quad u(x, \pm 0) = 0, \quad -a_2 \leq x \leq a_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

где γ — угол поворота включения под действием приложенного момента.

В силу симметрии можно показать, что касательные напряжения в области контакта включения со средой отсутствуют, т.е. $\chi_2(y) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$, а скачки $\chi_1(y)$ и $\varphi_1(x)$ являются нечетными. При этом равенство нулю соответствующих перемещений в (2.2) выполняется автоматически.

Решение поставленной задачи будем разыскивать в виде суммы двух разрывных решений

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2 \quad (2.3)$$

построенных по формулам (1.2), где надо положить $\chi_j(y) = 0$, $\varphi_j(x) = 0$, $j = 2, 3, 4$. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{-a_1}^{+a_1} \frac{\chi_1(\eta)}{\mu k_2^2} \left[\left(k_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) r_1(\eta - y, x) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} r_2(\eta - y, x) \right] d\eta + \\ &+ \int_{-a_2}^{+a_2} \frac{\varphi_1(\eta)}{\mu k_2^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} r_2(\eta - x, y) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} r_1(\eta - x, y) \right] d\eta \\ v(x, y) &= \int_{-a_1}^{+a_1} \frac{\chi_1(\eta)}{\mu k_2^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} r_2(\eta - y, x) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} r_1(\eta - y, x) \right] d\eta + \\ &+ \int_{-a_2}^{+a_2} \frac{\varphi_1(\eta)}{\mu k_2^2} \left[\left(k_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_1(\eta - x, y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} r_2(\eta - x, y) \right] d\eta \end{aligned} \quad (2.4)$$

Функция $u(x, y)$ нечетна по переменной y , а $v(x, y)$ — по переменной x .

Для определения неизвестных скачков $\chi_1(\eta)$ и $\varphi_1(\eta)$ из оставшихся условий (2.1) могут быть получены интегральные уравнения. Удобнее воспользоваться не самими условиями (2.2), а эквивалентными, полученными из них применением операции диф-

дифференцирования:

$$u'_y(\pm 0, y) = \gamma, \quad -a_1 \leq y \leq a_1, \quad v'_x(x, \pm 0) = \gamma, \quad -a_2 \leq x \leq a_2 \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) в (2.5), приходим к системе двух интегральных уравнений, после приведения к отрезку $[-1, 1]$ имеющий вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} g_1(\tau) \left[\frac{1 + \xi^2}{\tau - t} + R(\tau - t) + iS(\tau - t) \right] d\tau + \\ & + \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-1}^{+1} g_2(\tau) \left[-(1 - \xi^2)P(\epsilon\tau, t) + Q(\epsilon\tau, t) + iG(\epsilon\tau, t) \right] d\tau = -1 \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} g_1(\tau) \left[-(1 - \xi^2)P(\tau, \epsilon t) + Q(\tau, \epsilon t) + iG(\tau, \epsilon t) \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} g_2(\tau) \left[\frac{1 + \xi}{\tau - t} + \epsilon R(\epsilon(\tau - t)) + i\epsilon S(\epsilon(\tau - t)) \right] d\tau = -1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь

$$g_1(\tau) = \frac{\chi_1(a_1\tau)}{\mu\gamma}, \quad g_2(\tau) = \frac{\varphi_1(a_2\tau)}{\mu\gamma}, \quad P(\tau, t) = \frac{\tau(\tau^2 - t^2)}{(\tau^2 + t^2)^2}$$

$$\epsilon = \frac{a_2}{a_1}, \quad \xi^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}, \quad R(z) = R_1(z) + R_2(z)$$

$$R_1(z) = 2\xi^3 \left(c_0 + \ln \frac{\xi\kappa_0 |z|}{2} \right) \Sigma_\alpha(\xi z) - \frac{\xi^3}{2} \Sigma_\beta(\xi z)$$

$$R_2(z) = \left(c_0 + \ln \frac{\kappa_0 |z|}{2} \right) \left[-2 \Sigma_\alpha(z) + 4 \Sigma_\beta(z) \right] - 2 \Sigma_\lambda(z) + \Sigma_\delta(z)$$

$$S(z) = \pi \left[-2 \Sigma_\alpha(z) - \xi^3 \Sigma_\alpha(\xi z) + \Sigma_\beta(z) \right]$$

$$Q(x, y) = Q_1(x, y) + Q_2(x, y)$$

$$Q_1(x, y) = 2\xi^3 \left(c_0 + \ln \frac{\xi\kappa_0 p}{2} \right) \left[A_1(x, y) \Sigma_\alpha(\xi p) + A_2(x, y) \Sigma_\beta(\xi p) \right] +$$

$$+ \xi^3 \left[-A_2(x, y) \Sigma_\lambda(\xi p) + A_1(x, y) \Sigma_\delta(\xi p) \right]$$

$$Q_2(x, y) = -2 \left(c_0 + \ln \frac{\kappa_0 p}{2} \right) \left[A_1(x, y) \Sigma_\alpha(p) + A_2(x, y) \Sigma_\beta(p) \right] +$$

$$+ A_2(x, y) \Sigma_\lambda(p) - A_1(x, y) \Sigma_\delta(p)$$

$$G(x, y) = \pi \left\{ -\xi^3 \left[A_1(x, y) \Sigma_\alpha(\xi p) + A_2(x, y) \Sigma_\beta(\xi p) \right] - \right. \\ \left. - A_1(x, y) \Sigma_\alpha(p) + A_2(x, y) \Sigma_\beta(p) \right\}$$

$$\Sigma_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^{2k-1}, \quad p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$A_1(x, y) = \frac{x(x^2 - 3y^2)}{p^3}, \quad A_2(x, y) = \frac{4xy^2}{p^3}$$

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{k+1}, \quad \beta_k = \frac{(1)^k \kappa_0^{2k}}{k! (k-1)! 2^{2k}}, \quad \lambda_k = \beta_k \left(2h_{k-1} + \frac{1}{k} \right)$$

$$\delta_k = \frac{\beta_k}{k} \left[4h_k - \frac{1}{k+1} \left(2h_k + \frac{1}{k+1} \right) \right], \quad h_0 = 1, \quad h_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}$$

$$\kappa_0 = \kappa_2 a_1, \quad c_0 = 0,5772157$$

(ν — коэффициент Пуассона).

Для определения неизвестной постоянной необходимо воспользоваться уравнением движения включения как твердого тела

$$e^{-i\omega t}M = e^{-i\omega t}M_r + J_z \epsilon_0, \quad M_r = \int_{-a_1}^{+a_1} y \chi_1(y) dy + \int_{-a_2}^{+a_2} x \varphi_1(x) dx$$

где J_z — момент инерции включения, ϵ_0 — угловое ускорение, M_r — момент упругих сил реакции. Уравнение движения преобразуем к виду

$$M_* = \gamma \left[\int_{-1}^{+1} t g_1(t) dt + \epsilon^2 \int_{-1}^{+1} t g_2(t) dt \right] - \gamma \kappa_0^2 \beta \quad (2.7)$$

$$M_* = \frac{M}{\mu a_1^2}, \quad \beta = \frac{2m_1}{3\rho a_1^2} (1 + \epsilon^2)$$

где m_1 — масса части включения, лежащей на отрезке $[-1, 1]$, ρ — плотность упругой среды.

Решение системы интегральных уравнений (2.6) строим численно методом механических квадратур [2, 3], при нечетности функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$. Для этого представим неизвестные функции в виде

$$g_i(t) = (1 - t^2)^{-1/2} \psi_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (2.8)$$

а $\psi_i(t)$ аппроксимируем нечетными интерполяционными многочленами степени $2n - 1$, построенными по узлам: $t_l = \cos x_l$, $x_l = (2l - 1)\pi/(4n)$, $l = 1, 2, \dots, 2n$

Эти многочлены имеют вид [4]

$$\psi_i(t) = L_{2n-1}^{(i)}(t) = \frac{2}{n} \sum_{l=1}^n \psi_i(t_l) \sum_{m=1}^n \cos(2m-1)x_l T_{2m-1}(t) \quad (2.9)$$

где $T_{2m-1}(t)$ — многочлен Чебышева.

Тогда для сингулярных интегральных операторов в (2.6) могут быть получены следующие квадратурные формулы:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{g_i(\tau)}{\tau - t_j} d\tau = 2\pi \sum_{l=1}^n A_{jl} \psi_j(t_l), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

$$A_{jl} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \frac{\cos(2m-1)x_l \sin(2m-1)x_j}{\sin x_l}$$

$$\int_{-1}^{+1} g_i(\tau) P_i(\tau, t_j) d\tau = 2\pi \sum_{l=1}^n B_{jl}^{(i)} \psi_i(t_l) \quad (2.11)$$

$$P_1(\tau, t) = P(\epsilon\tau, t), \quad P_2(\tau, t) = P(\tau, \epsilon t)$$

$$B_{jl}^{(i)} = \frac{p_{ij}^{-3}}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m q_{ij}^{2m-1} b_m^{(i)} \cos(2m-1)x_l$$

$$p_{1j} = \sqrt{\epsilon^2 + t_j^2}, \quad p_{2j} = \sqrt{1 + \epsilon^2 t_j^2}$$

$$q_{1j} = \epsilon(p_{1j} + t_j)^{-1}, \quad q_{2j} = (p_{2j} + t_j)^{-1}$$

$$b_m^{(1)} = (2m-1)t_j p_{1j} - \epsilon^2, \quad b_m^{(2)} = (2m-1)\epsilon t_j p_{2j} - 1$$

Заменяя сингулярные интегралы в (2.6) квадратурными формулами (2.10), (2.11), а регулярные — квадратурной формулой Гаусса [4] и приравнявая левые и правые части при $t = t_j$, ($j = 1, 2, \dots, n$), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\psi_i(t_l)$, ($i = 1, 2, l = 1, 2, \dots, n$)

$$\sum_{l=1}^n \left[2(1 + \xi^2) A_{jl} + \frac{R_{jl}^{(1)} + iS_{jl}^{(1)}}{2n} \right] \psi_1(t_k) + \sum_{l=1}^n \left[-2(1 - \xi^2) B_{jl}^{(2)} + \frac{Q(\epsilon t_l, t_j) + iG(\epsilon t_l, t_j)}{n} \right] \psi_2(t_l) = -4 \quad (2.12)$$

$$\sum_{l=1}^n [-2(1 - \xi^2) B_{jl}^{(1)} + \frac{Q_{lj}^{(1)} + iG_{lj}^{(1)}}{n}] \psi_1(t_l) + \sum_{l=1}^n [2(1 + \xi^2) A_{jl} + \epsilon \frac{R_{jl}^{(2)} + iS_{jl}^{(2)}}{2n}] \psi_2(t_l) = -4$$

$$R_{lj}^{(i)} = R[\gamma_i(t_l - t_j)] - R[\gamma_i(t_l + t_j)], \quad S_{lj}^{(i)} = S[\gamma_i(t_l - t_j)] - S[\gamma_i(t_l + t_j)]$$

$$i = 1, 2, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \epsilon$$

$$Q_{lj}^{(1)} = Q(\epsilon t_l, t_j), \quad Q_{lj}^{(2)} = Q(t_l, \epsilon t_j), \quad G_{lj}^{(1)} = G(\epsilon t_l, t_j), \quad G_{lj}^{(2)} = G(t_l, \epsilon t_j)$$

Условие (2.7) для определения γ примет вид

$$M_* = \gamma \frac{\pi}{n} \sum_{l=1}^n t_l [\psi_1(t_l) + \epsilon^2 \psi_2(t_l)] - \gamma \kappa_0^2 \beta \quad (2.13)$$

Решив систему (2.12), (2.13) по формулам (2.9), (2.8), построим приближенное решение системы интегральных уравнений (2.6).

3. Для описания концентрации упругих напряжений вблизи включения введем рассмотрение коэффициент интенсивности напряжений (КИН) [5]

$$K^{II}(a_1) = \lim_{y \rightarrow a_1 + 0} \sqrt{2(y - a_1)} \tau_{xy}(0, y), \quad K^{II}(a_2) = \lim_{y \rightarrow a_2 + 0} \sqrt{2(x - a_2)} \tau_{yx}(x, 0)$$

Через найденное приближенное решение системы интегральных уравнений КИН выражаются следующими формулами:

$$K^{II}(a_j) = \mu \sqrt{a_j} k_j, \quad k_j = -\frac{\xi^2 \gamma}{n} \sum_{l=1}^n \psi_j(t_l) \frac{(-1)^l}{\sin x_l}, \quad j = 1, 2 \quad (3.1)$$

Для описания волнового поля вдали от включения получим асимптотические формулы для перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$. В (2.4) перейдем к полярным координатам: $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$ и устремим $R \rightarrow \infty$. Используя асимптотические разложения для функций Ганкеля, а также приближенное решение системы интегральных уравнений (2.6), найдем

$$u_*(R, \theta) = E_1 f_1(\theta) + E_2 f_2(\theta) + O(R_0^{-3/2})$$

$$v_*(R, \theta) = -E_1 p_1(\theta) + E_2 p_2(\theta) + O(R_0^{-3/2}) \quad (3.2)$$

$$E_1 = \xi^{3/2} \eta \exp[i\xi(R_0 - \frac{\pi}{4})], \quad E_2 = \eta \exp[i(R_0 - \frac{\pi}{4})], \quad \eta = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi R_0}}$$

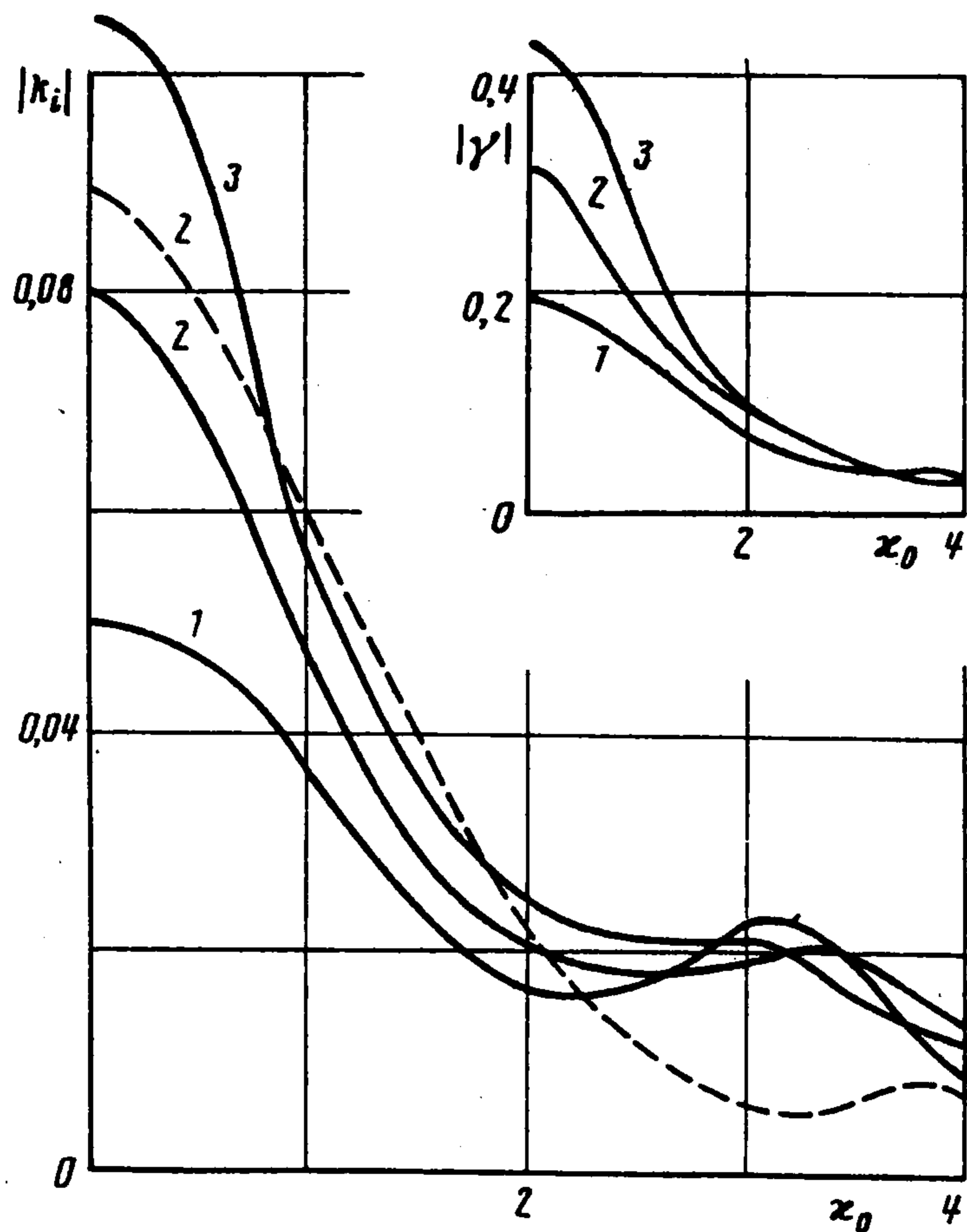
$$f_k(\theta) = \sigma_{k1} \cos^2 \theta - \epsilon \sigma_{k2} \sin \theta \cos \theta, \quad p_k(\theta) = \sigma_{k1} \sin \theta \cos \theta - \epsilon \sigma_{k2} \sin^2 \theta$$

$$\sigma_{kj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} g_j(\tau) \exp(-ib_k \kappa_0 \cos \theta) d\tau, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, 2$$

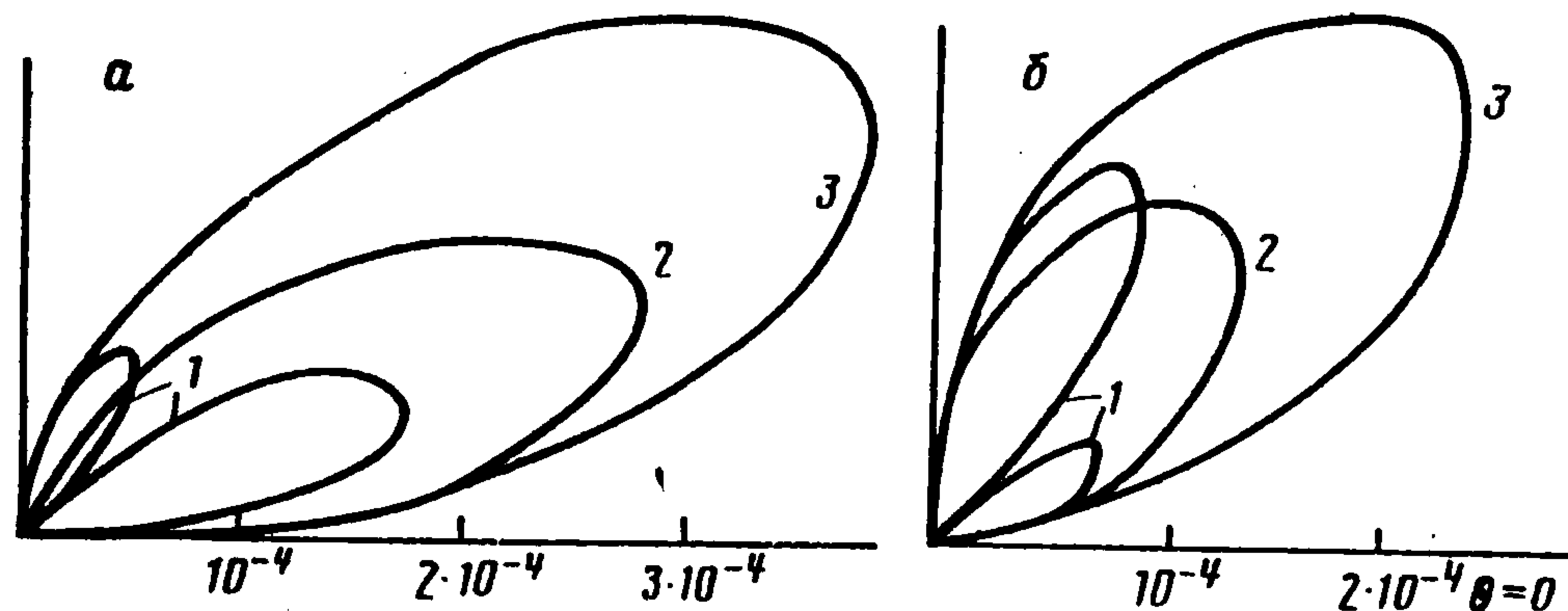
$$b_1 = \epsilon, \quad b_2 = 1, \quad u_*(R, \theta) = a_1^{-1} u(R \cos \theta, R \sin \theta), \quad v_*(R, \theta) = a_1^{-1} v(R \cos \theta, R \sin \theta)$$

При помощи построенного приближенного решения по формулам (2.13), (3.1) исследовались зависимости максимальной амплитуды колебаний включения $|\gamma|$ и максимальных абсолютных значений КИН $|k_1|$, $|k_2|$ от параметра h_0 при $\nu = 0,25$, $M_* = 1$, $\beta = 2$. Эти зависимости показаны на фиг. 1. Кривая 1 соответствует равностороннему крестообразному включению (при этом $k_1 = k_2$), кривая 2 – соотношению между длинами сторон $\epsilon = 0,5$, кривая 3 – случаю одного прямолинейного включения ($\epsilon = 0$). Сплошной кривой показано изменение $|k_1|$, штриховой – $|k_2|$. Видно, что с ростом κ_0 , величина $|\gamma|$ убывает до некоторого значения, а затем она стабилизируется, причем все три кривые практически совпадают.

С ростом κ_0 КИН до определенного момента монотонно убывают, а затем начинают осциллировать. Для низких частот колебаний (т.е. для малых κ_0) наибольшая концентрация напряжений вблизи прямолинейного включения, затем с ростом κ_0 все кривые сближаются, взаимно пересекаясь между собой.



Фиг. 1



Фиг. 2

Исследовано также волновое поле вдали от центра включения. На фиг. 2, а, б приведены зависимости максимальных абсолютных значений перемещений $|u_*|$ и $|v_*|$ от полярного угла $0 < \theta < \pi/2$ при $R_0 = 1000$, $\kappa_0 = 3$. Обозначения те же, что и на фиг. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Об одном способе решения задач механики для областей с разрезами или тонкими включениями. // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 122–135.
2. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. 303 с.
3. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 253 с.
4. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
5. Евтушенко А.А., Паук В.И. Влияние неоднородности материала на распределение напряжений вблизи тонкого упругого включения. // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 651–657.

Одесса

Поступила в редакцию
12.VI. 1990