УДК 539.3

© 1993 г. Кузнецов С.В.

ЭФФЕКТИВНЫЕ ТЕНЗОРЫ УПРУГОСТИ ДИСПЕРСНЫХ КОМПОЗИТОВ

Для дисперсных статистически однородных упругих композитов на основе периодических фундаментальных решений получены аналитические формулы для корректирующего тензора и эффективного тензора упругости. Рассмотрен пример расчета.

Наиболее строгие результаты в механике композитов могут быть получены методом двухмасштабных асимптотических разложений [1–5]. Эффективный тензор упругости в этом методе, как правило, представляется в виде

$$\mathbf{C}_0 = \sum_{p=1}^{N} f_p \mathbf{C}_p + \mathbf{K}, \quad \sum_{p=1}^{N} f_p = 1 \tag{0.1}$$

где f_p – объемные доли компонент N-компонентного композита. $\mathbf{C}_p$ – соответствующие тензоры упругости. $\mathbf{K}$ – корректирующий тензор, или корректор. Сумма первых N слагаемых в правой части (0.1) дает эффективный тензор, получаемый гомогенизацией Фойгта. В дальнейшем будет рассматриваться случай двухкомпонентного композита, у которого $f_1 = f$, $f_2 = (1 - f)$, где f – объемная доля дисперсной компоненты.

Для определения корректирующего тензора в методе двухмасштабных асимптотических разложений требуется решить так называемую ячеечную проблему, т.е. построить периодическое решение уравнений теории упругости в ячейке.

Помимо разностных методов типа конечных элементов и конечных разностей, известны следующие (численные) способы решения ячеечной проблемы. Применялся [6–9] метод трансформирующих деформаций Эшелби при учете переменности поля трансформирующих деформаций в пределах включений. Одним из достоинств этого подхода является потенциальная возможность анализа композитов с анизотропными компонентами. Однако с вычислительной точки зрения он неудобен из-за необходимости решения системы трехмерных интегральных уравнений первого рода с тензорными плотностями – полями трансформирующих деформаций. С использованием периодического фундаментального решения для изотропной среды [10] методами мультипольных разложений получены [11, 12] численные значения эффективных характеристик дисперсно армированных композитов с изотропными компонентами. Применялось [13] аналогичное фундаментальное решение в сочетании с методом Галеркина для решения системы граничных интегральных уравнений на поверхности раздела компонент. Предлагалось [14] для первоначально изотропной пористой среды граничные условия на поверхности пор и периодические граничные условия на внешней поверхности ячейки удовлетворять путем решения системы интегральных уравнений первого рода с ядром представляющим собой фундаментальное решение Кельвина.

1. Основные операторы и символы. Рассматривается первоначально анизотропная однородная упругая среда, уравнения равновесия которой в R^3 имеют вид

$$\mathbf{A}(\partial_x)\mathbf{u} \equiv -\mathrm{div}\mathbf{C} \cdot\cdot (\nabla \mathbf{u}) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений; $\mathbf{C}$ – четырехвалентный строго эллиптичный тензор упругости. Предполагается, что исследуемая среда гиперупругая, что обеспечивает симметрию C по крайним парам индексов: $C^{ijmn} = C^{mnij}$.

Преобразование Фурье

$$g^{\vee}(\xi) = \int_{R^3} g(\mathbf{x}) \exp(-2\pi i \mathbf{x} \cdot \xi) dx$$

примененное к оператору $\mathbf{A}$, дает соответствующий символ

$$\mathbf{A}^{\vee}(\xi) = 4\pi^2 \xi \cdot \mathbf{C} \cdot \xi \tag{1.2}$$

Аналогичным образом определяется символ оператора напряжений на граничном многообразии с полем нормалей ν :

$$\mathbf{T}^{\vee}(\nu, \xi) = 2\pi i \underline{\nu} \cdot \mathbf{C} \cdot \xi \tag{1.3}$$

Используя символ $\mathbf{A}^{\vee}$ и определение фундаментального решения E уравнений (1.1), символ $\mathbf{E}^{\vee}$ можно представить в виде

$$\mathbf{E}^{\vee}(\xi) = \mathbf{A}_0^{\vee}(\xi)/\det\mathbf{A}^{\vee}(\xi) \tag{1.4}$$

где $\mathbf{A}^{\vee}_0$ – матрица алгебраических дополнений символа $\mathbf{A}^{\vee}$. Формула (1.4) показывает, что символ $\mathbf{E}^{\vee}$ строго эллиптичен и положительно однороден по ξ степени -2. В общем случае анизотропии известны лишь численные способы восстановления $\mathbf{E}$ по его символу [15], однако периодическое фундаментальное решение удается построить непосредственно по символу $\mathbf{E}^{\vee}$.

Для построения периодического фундаментального решения $\mathbf{E}_p$ рассмотрим среду с силовыми особенностями, периодически расположенными в узлах некоторой пространственной решетки Λ. Пусть $\mathbf{a}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ – линейно-независимые векторы главных периодов Λ, так что любой из узлов $\mathbf{m} \in \Lambda$ представим в виде $\mathbf{m} = \Sigma m_i \mathbf{a}_i$, где $m_i \in Z$ – целочисленные координаты узла $\mathbf{m}$ в периодическом базисе $(\mathbf{a}_i)$.

Введем в рассмотрение сопряженный базис $(\overset{*}{\mathbf{a}}_i)$, такой, что $\overset{*}{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{m} = m_i$. Ясно, что при взаимно ортогональных векторах основного базиса векторы сопряженного базиса ориентированы вдоль соответствующих векторов основного базиса. Решетка сопряженного базиса далее будет обозначаться Λ^*. При учете принятых обозначений периодическую дельта-функцию (δ_p), размещенную в узлах решетки Λ, можно разложить в ряд

$$\delta_p(\mathbf{x}) = V_Q^{-1} \sum_{\mathbf{m}^* \in \Lambda^*} \exp(-2\pi i \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{x}) \tag{1.5}$$

где V_Q – объем фундаментальной области (ячейки периодичности), образованной векторами основного периодического базиса: $V_Q = l_1 l_2 l_3 |\, \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 |$. Формулой (1.5) функция δ_p определена однозначно.

Подстановка периодического фундаментального решения $\mathbf{E}_p$ в уравнение (1.1) должна давать

$$\mathbf{A}(\partial_x)\mathbf{E}_p = \delta_p \mathbf{I} \tag{1.6}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица. Разыскивая $\mathbf{E}_p$ также в виде тригонометрического ряда, из (1.5), (1.6) получаем следующую формулу, по которой $\mathbf{E}_p$ вычисляется с точностью до постоянного тензора:

$$\mathbf{E}'_p(\mathbf{x}) = V_Q^{-1} \sum_{\mathbf{m}^* \in \Lambda_0^*} \mathbf{E}^{\vee}(\mathbf{m}^*) \exp(-2\pi i \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{x}) \tag{1.7}$$

где Λ_0^* – решетка сопряженного базиса без нулевого узла. Имеет место следующий результат [16]

Лемма 1. Ряд (1.7) сходится в L^1-топологии, определяя собой периодическое фундаментальное решение класса $\overline{L}^1(Q, R^3 \otimes R^3)$ где $\overline{L}^1$ – пространство интегрируемых функций с нулевым средним значением в Q. Кроме того,

$$\mathbf{E}'_p(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}), \; \mathbf{G} \in C^\infty(Q, R^3 \otimes R^3) \tag{1.8}$$

Заметим, что ряд (1.7) не является абсолютно сходящимся ни при каких $\mathbf{x} \in R^3$ [17].

Обозначим через Ω несвязную область, занятую периодически расположенными дисперсными включениями, пусть χ_Ω – характеристическая функция этой области. Упругие свойства двухкомпонентной гетерогенной среды могут быть представлены в виде

$$\mathbf{C}_1\chi_\Omega(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_2\chi_{C\Omega}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}\chi_{C\Omega}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in R^3, C\Omega=R^3\setminus\Omega, \quad \mathbf{C}=\mathbf{C}_2-\mathbf{C}_1 \tag{1.9}$$

где индекс 1 относится к дисперсным включениям, а 2 – к матрице. Правая часть формулы (1.9) показывает, что для приближенного определения эффективного тензора $\mathbf{C}_0$ достаточно определить эффективный тензор пористой среды с тензором упругости $\mathbf{C}$ и порами, занимающими область Ω:

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_1 + (1-f)\mathbf{C} + \mathbf{K} \tag{1.10}$$

где $\mathbf{K}$ – корректирующий тензор пористой среды. В дальнейшем будем полагать, что тензор $\mathbf{C} = \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1$ строго эллиптичен. Для определения тензора $\mathbf{K}$ воспользуемся методом двухмасштабных асимптотических разложений.

2. **Асимптотические разложения.** Представим поле перемещений в периодической пористой среде в виде асимптотического ряда

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{Y}) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathbf{u}_n(\mathbf{x},\mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}=\mathbf{x}/\lambda \tag{2.1}$$

где $\mathbf{Y}$ – "быстрые" переменные, характеризующие осцилляции поля $\mathbf{u}$.

Переход к переменным $\mathbf{x}$, $\mathbf{Y}$ в (1.1) дает [5]

$$\mathbf{A}(\partial_x,\partial_Y) \equiv \lambda^{-2}\mathbf{A}_1(\partial_Y) + \lambda^{-1}\mathbf{A}_2(\partial_x,\partial_Y) + \lambda^0\mathbf{A}_3(\partial_x) \tag{2.2}$$

$$\mathbf{A}_1(\partial_Y) \equiv -\nabla_Y\cdot\mathbf{C}(\mathbf{Y})\cdot\nabla_Y, \quad \mathbf{A}_2(\partial_x,\partial_Y) \equiv -\nabla_x\cdot\mathbf{C}(\mathbf{Y})\cdot\nabla_Y - \nabla_Y\cdot\mathbf{C}(\mathbf{Y})\cdot\nabla_x$$

$$\mathbf{A}_3(\partial_x) \equiv -\nabla_x\cdot\mathbf{C}(\mathbf{Y})\cdot\nabla_x, \quad \mathbf{C}(\mathbf{Y}) = \begin{cases}\mathbf{C}, & \mathbf{Y}\in Q\setminus\Omega\\ 0, & \mathbf{Y}\in\Omega\end{cases}$$

В выражениях (2.2) и далее переменные $\mathbf{x}$ и $\mathbf{Y}$ считаются независимыми.

Подстановка асимптотического ряда (2.1) в (2.2) дает

$$\mathbf{A}_1(\partial_Y)\mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{A}_1(\partial_Y)\mathbf{u}_1 = -\mathbf{A}_2(\partial_x,\partial_Y)\mathbf{u}_0 \tag{2.3}$$

$$\mathbf{A}_1(\partial_Y)\mathbf{u}_2 = -\mathbf{A}_2(\partial_x,\partial_Y)\mathbf{u}_1 - \mathbf{A}_3(\partial_x)\mathbf{u}_0, \ldots$$

Первые три уравнения (3.3), соответствующие λ^{-2}, λ^{-1}, λ^0, представляют наибольший интерес в связи с отысканием эффективных характеристик пористой среды. Необходимость в остальных уравнениях возникает лишь при анализе поведения микроструктурных полей вблизи границ или же в областях больших градиентов (по $\mathbf{x}$).

Обозначим через W подпространство в $H^1(Q\setminus\Omega, R^3 \otimes R^3)$ такое, что условие $\Phi\in W$ эквивалентно периодичности Φ и $\mathbf{T}(\upsilon_Y, \partial_Y)\Phi|_{\partial\Omega} = 0$, где $\mathbf{T}$ – оператор напряжений на $\partial\Omega$ с вектором единичной внешней нормали υ направленным из $Q\setminus\Omega$.

Лемма 2. Для разрешимости (modR^3) уравнения $\mathbf{A}_1(\partial_Y)\Phi = \mathbf{F}$, $\Phi\in W$, $\mathbf{F}\in H^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы среднее "значение" $\mathbf{F}$ в $Q\setminus\Omega$ равнялось нулю.

Доказательство. Второе неравенство Корна, доказательство которого в силу (1.8) методами интегральных уравнений сводится к непериодическому случаю, обеспечивает коэрцитивность билинейной формы

$$\mathbf{a}_1(\Phi,\Psi) = \int_{Q\setminus\Omega}\nabla_Y\Phi\cdot\cdot\,\mathbf{C}\cdot\cdot\,\nabla_Y\Psi dY$$

в W/R^3. Необходимость рассмотрения фактор-пространства W/R^3 обусловлена существованием нетривиальных периодических решений уравнения sym $(\nabla\Phi) = 0$. Причем в отличие от непериодического случая такими решениями являются только аффинные смещения. Далее остается заметить, что при $\Phi\in W$

$$\int_{Q\setminus\Omega}\mathbf{A}_1(\partial_Y)\Phi dY = 0$$

Следствия 1°. Единственным периодическим решением первого уравнения (2.3) в $Q\backslash\Omega$ является решение вида $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$.

2°. Общее решение второго уравнения (2.3) в $Q\backslash\Omega$ имеет вид

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{Y}) = \mathbf{H}(\mathbf{Y}) \cdot\cdot\, \epsilon_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1^{\sim}(\mathbf{x}), \quad \epsilon_0 = \mathrm{sym}(\nabla \mathbf{u}_0) \tag{2.4}$$

где $\mathbf{H}$ — тензорное поле третьего ранга, представляющее собой решение уравнения $\mathbf{A}_1\mathbf{H} = 0$ в $Q\backslash\Omega$, и $\mathbf{TH}|_{\partial\Omega} = -\upsilon \cdot \mathbf{C}$.

3°. Для разрешимости третьего уравнения (2.3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{Q\backslash\Omega} \mathbf{A}_3(\partial_x)\mathbf{u}_0 dY + \int_{Q\backslash\Omega} \mathbf{A}_2(\partial_x, \partial_Y)\mathbf{u}_1 dY = 0 \tag{2.5}$$

Из (2.4) следует

$$\int_{Q\backslash\Omega} \mathbf{A}_2(\partial_x, \partial_Y)\mathbf{u}_1 dY = -\mathrm{div}_x \int_{Q\backslash\Omega} \mathbf{C} \cdot\cdot \nabla_Y \mathbf{H}(\mathbf{Y}) dY \cdot\cdot\, \epsilon_0 \tag{2.6}$$

При получении этого выражения учитывалось, что слагаемое $\mathbf{u}_1^{\sim}$ не входит в третье уравнение (2.3). Принимая во внимание (2.6), из (2.5) получаем

$$(1-f)\,\mathrm{div}_x \mathbf{C} \cdot\cdot\, \epsilon_0(\mathbf{x}) + \mathrm{div}_x \mathbf{K} \cdot\cdot\, \epsilon_0(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.7}$$

$$\mathbf{K} = -V_Q^{-1} \int_{\partial\Omega} \mathbf{C} \cdot\cdot\, \upsilon_Y \otimes \mathbf{H}(\mathbf{Y}) dY$$

где f — объемный коэффициент пористости. Здесь и в дальнейшем $\partial\Omega$ рассматривается как ориентируемое многообразие с ориентацией, индуцированной из области $Q\backslash\Omega$.

Уравнение (2.7) представляет собой искомое уравнение равновесия гомогенизированной среды. Из (2.7) следует, что эффективный тензор упругости пористой среды имеет вид

$$\mathbf{C}_0' = (1-f)\mathbf{C} + \mathbf{K} \tag{2.8}$$

Первое слагаемое в правой части (2.8) соответствует гомогенизации Фойхта.

3. **Определение корректора.** Формула Сомильяны для $Q\backslash\Omega$ дает (в этом разделе по-прежнему рассматривается пористая среда с тензором упругости $\mathbf{C}$):

$$(1/2\mathbf{I} + \mathbf{S})\mathbf{H}(\mathbf{Y}') = \int_{\partial\Omega} \mathbf{E}_p'(\mathbf{Y}' - \mathbf{Y}'') \otimes \upsilon_{Y''} \cdot\cdot\, \mathbf{C} dY'' + \mathbf{H}_a, \quad \mathbf{Y}' \in \partial\Omega$$

$$\mathbf{H}_a = V_Q^{-1} \int_{Q\backslash\Omega} \mathbf{H}(\mathbf{Y}) dY \tag{3.1}$$

где $\mathbf{S}$ — матричный сингулярный оператор, получаемый сужением потенциала двойного слоя на несущую поверхность $\partial\Omega$. Необходимость введения $\mathbf{H}_a$ в правую часть (3.1) связана с тем обстоятельством, что формулой (1.7) тензор $\mathbf{E}_p'$ определен с точностью до постоянного тензора.

Лемма 3. Если область Ω центрально симметрична относительно начала координат, то

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \mathbf{E}_p'(\mathbf{Y}' - \mathbf{Y}'') \otimes \upsilon_{Y''} \cdot\cdot\, \mathbf{C} dY' dY'' = 0 \tag{3.2}$$

Доказательство. В силу (1.7) условие (3.2) эквивалентно равенству

$$2\pi i V_Q^{-1} \sum_{\mathbf{m}^* \in \Lambda_0^*} \mathbf{E}^{\vee}(\mathbf{m}^*) \otimes \mathbf{m}^* \cdot\cdot\, \mathbf{C}\chi^{\vee}_{\partial\Omega}(\mathbf{m}^*)\, \chi^{\vee}_{\Omega}(\mathbf{m}^*) = 0 \tag{3.3}$$

где $\chi_{\partial\Omega}$, χ_Ω — характеристические функции соответственно $\partial\Omega$ и Ω. Для доказательства равенства (3.3) достаточно заметить, что рассматриваемые характеристические функции, так же как и их Фурье-изображения, четны, четным является и символ $\mathbf{E}^{\vee}$.

Определение. Спектром оператора $\mathbf{S}$ будем называть множество тех λ, при которых оператор $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{S}$ необратим в классе непрерывных операторов, действующих в подходящем функциональном пространстве.

Это определение совпадает с принятым в спектральной теории и незначительно отличается от определения спектра в теории интегральных уравнений. Анализ периодических решений второй краевой задачи с заданными на $\partial\Omega$ поверхностными напряжениями, показывает, что точки $|\lambda| = ½$ лежат за пределами спектрального круга оператора $\mathbf{S}$, действующего в соболевских пространствах $\overline{H^s}(\partial\Omega, R^3)$ $s > 0$ функций с нулевым средним значением на $\partial\Omega$. Однако в пространствах H^s спектральная окружность уже содержит точку $\lambda = \frac{1}{2}$, с соответствующим спектральным пространством, состоящим из "жестких" смещений контура.

Из формулы Сомильяны, леммы 3 и последующих замечаний вытекает

Лемма 4. В условиях леммы 3 ряд Неймана

$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{S})^{-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-2\mathbf{S})^n \tag{3.4}$$

абсолютно сходится в операторной топологии $(\overline{H^s}, \overline{H^s})$, $s \geqslant 0$.

В формулировке леммы $(-2\mathbf{S})^n$ – матричный интегральный оператор, представляющий собой композицию n сингулярных интегральных операторов $(-2\mathbf{S})$. Скорость сходимости этого ряда можно оценивать через мажоранту $p = \|2\mathbf{S}\|_s$. Если $p < 1$, то ряд (3.4) сходится быстрее геометрического ряда со знаменателем p.

Подставляя выражения (3.1), (3.4) в выражение для корректора (2.7) и преобразуя поверхностные интегралы по $\partial\Omega$ в объемные, получим

$$\mathbf{K} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^{n+1}(2\pi)^{2n+2}V_Q^{-n-2} \times \Big(\sum_{\mu^*\in\Pi_n}\chi^{\vee}_{\Omega}(\mu_0^*)\chi^{\vee}_{\Omega}(\mu_1^*-\mu_0^*)\ldots$$

$$\ldots\chi^{\vee}_{\Omega}(\mu_n^*-\mu_{n-1}^*)\chi^{\vee}_{\Omega}(-\mu_n^*)\times\mathbf{C}\cdot\cdot\mu_0^*\otimes\mathbf{E}^{\vee}(\mu_0^*)\otimes\mu_0^*\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mu_n^*\otimes\mathbf{E}^{\vee}(\mu_n^*)\otimes\mu_n^*\cdot\cdot\mathbf{C}\Big), \tag{3.5}$$

$$\mu_p^*\in\Lambda_0^*,\ p=0,\ldots,n,\ \Pi_n = \prod_{p=0}^{n}\Lambda_0^*$$

Выражение (3.5) представляет собой искомую формулу для корректирующего тензора. Принимая во внимание альтернирующие знаки у членов ряда по n и ограничиваясь первым членом, отвечающим $n=0$, получим приближение снизу для корректора:

$$\mathbf{K}_l = -8\pi^2 V_Q^{-2}\sum_{\mathbf{m}^*\in\Lambda_0^*}|\chi^{\vee}_{\Omega}|^2\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{m}^*\otimes\mathbf{E}^{\vee}(\mathbf{m}^*)\otimes\mathbf{m}^*\cdot\cdot\mathbf{C} \tag{3.6}$$

Аналогичным образом, если ограничиться первыми двумя членами ряда по n, из (3.5), легко может быть получена верхняя оценка для корректирующего тензора

$$\mathbf{K}_u = -8\pi^2 V_Q^{-2}\sum_{\mathbf{m}^*\in\Lambda_0^*}|\chi^{\vee}_{\Omega}|^2\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{m}^*\otimes\mathbf{E}^{\vee}(\mathbf{m}^*)\otimes\mathbf{m}^*\cdot\cdot\mathbf{C}+$$

$$+4(2\pi)^4V_Q^{-3}\sum_{\mathbf{m}_0^*\in\Lambda_0^*}\ \sum_{\mathbf{m}_1^*\in\Lambda_0^*}\chi^{\vee}_{\Omega}(\mathbf{m}_0^*)\chi^{\vee}_{\Omega}(-\mathbf{m}_1^*)\chi^{\vee}_{\Omega}(\mathbf{m}_1^*-\mathbf{m}_0^*)\times$$

$$\times\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{m}_0^*\otimes\mathbf{E}^{\vee}(\mathbf{m}_0^*)\otimes\mathbf{m}_0^*\cdot\cdot\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{m}_1^*\otimes\mathbf{E}^{\vee}(\mathbf{m}_1^*)\otimes\mathbf{m}_1^*\cdot\cdot\mathbf{C}\leqslant$$

$$\leqslant-8\pi^2V_Q^{-2}\sum_{\mathbf{m}^*\in\Lambda_0^*}|\chi^{\vee}_{\Omega}|^2\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{m}^*\otimes\mathbf{E}\,(\mathbf{m}^*)\otimes\mathbf{m}^*\cdot\cdot\mathbf{C}+$$

$$+4(2\pi)^4V_Q^{-2}f\sum_{\mathbf{m}^*\in\Lambda_0^*}|\chi^{\vee}_{\Omega}(\mathbf{m}^*)|^2\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{m}^*\otimes\mathbf{E}^{\vee}(\mathbf{m}^*)\otimes\mathbf{m}^*\cdot\cdot\mathbf{C}=$$

$$=-8\pi^2V_Q^{-2}(1-2f)\sum_{\mathbf{m}^*\in\Lambda_0^*}|\chi^{\vee}_{\Omega}|^2\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{m}^*\otimes\mathbf{E}^{\vee}(\mathbf{m}^*)\otimes\mathbf{m}^*\cdot\cdot\mathbf{C} \tag{3.7}$$

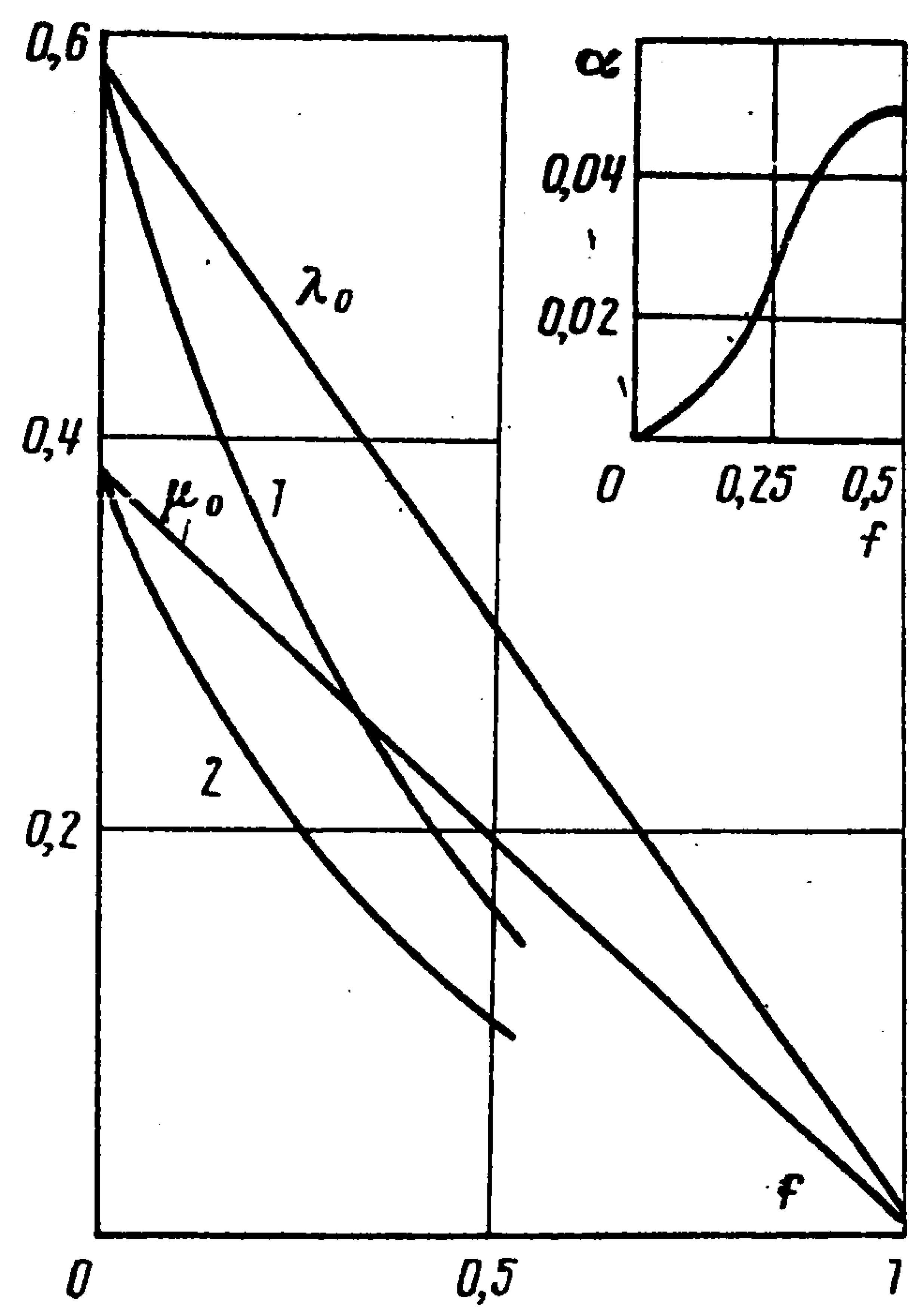
При получении формулы (3.7) использовалось неравенство Юнга для сверток.

Теорема. Ряды (4.5) – (4.7) абсолютно сходятся.

Доказательство следует из асимптотической оценки

$$|\chi^{\vee}_{\Omega}(|\xi|)| = o(|\xi|^{-3/2}),\ |\xi|\to\infty, \tag{3.8}$$

выполняющейся, поскольку $\chi_\Omega\in L^2(R^3)$. Остается заметить, что символ $\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{m}^*\otimes\mathbf{E}^{\vee}(\mathbf{m}^*)\otimes\mathbf{m}^*\cdot\cdot\mathbf{C}$, положительно однороден по $\mathbf{m}^*$ степени нуль.



Отметим, что переход от эффективного тензора пористой среды $\mathbf{C}_0'$ к соответствующему эффективному тензору композита дается в соответствии с (1.10), (2.8) формулой $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0'$.

4. Пример. Рассматривается дисперсный композит с изотропной матрицей, характеризуемой безразмерными упругими параметрами (модулем Юнга и коэффициентом Пуассона) $E_2 = 1$, $\upsilon_2 = 0{,}3$ и сферическими включениями с $E_1 = 0{,}01$, $\upsilon_1 = 0{,}45$, расположенными в узлах простой кубической структурной решетки. Предельный для данной решетки коэффициент наполнения f (объемная доля дисперсных включений) составляет $\pi/6 \cong 0{,}52$. Композит с такого рода включениями служит моделью некоторых ударопрочных пластиков.

На фигуре приведены расчетные данные, определяющие зависимости эффективных модулей C_0^{1122} (кривая *1*) и C_0^{1212} (кривая *2*) от коэффициента наполнения (f). Вычисления проводились с использованием формулы (3.6). Для сравнения построены аналогичные зависимости постоянных Ламе λ_0 и μ_0 эффективной изотропной среды, определенные методом гомогенизации Фойхта.

Поскольку простая кубическая структура необходимо приводит к кубической анизотропии в отношении упругих свойств, на фигуре дана зависимость параметра α

$$\alpha = C_0^{1212} - (C_0^{1111} - C_0^{1122})/2 \tag{4.1}$$

характеризующего степень анизотропии эффективной упругой среды, от коэффициента наполнения. Непосредственно из (4.1) следует, что для исходной изотропной среды без включений $\alpha = 0$.

Затраты процессорного времени для ЭВМ типа IBM PC/AT-286 (12 MHz) при 2, 4, 5 и 6 узлах составляют соответственно 100, 600, 10^3 и $1{,}8 \cdot 10^3$ с.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н.С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 5. С. 1046–1048.
2. *Иосифьян Г.А., Олейник О.А., Панасенко Г.П.* Асимптотическое разложение решения системы теории упругости с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 1. С. 18–22.
3. *Олейник О.А.* Об усреднении в задачах теории упругости // Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения / Тр. Всесоюз. симпоз. в Тбилиси. 1982. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1986. С. 195–201.
4. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

5. *Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. Amstrerdam: North-Holland Publ. Co., 1978. 700 p.
6. *Nemat-Nasser S., Taya M.* On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids // Quart. Appl. Math. 1981. V. 39. № 1. P. 43–59.
7. *Nemat-Nasser S., Taya M.* On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids: comments and corrections // Quart. App. Math. 1985. V. 43. № 2. P. 187–188.
8. *Nemat-Nasser S., Iwakuma T., Hejazi M.* On composite with periodic microstructure // Mech. Mater. 1982. V. 1. N. 3. P. 239–267.
9. *Iwakuma T., Nemat-Nasser S.* Composites with periodic microstructure // Computers and Struct. 1983. V. 16. N. 1–4. P. 13–19.
10. *Hasimoto H.* On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. Pt. 5 P. 317–328.
11. *Sangani A.S., Acrivos A.* Slow flow through a periodic array of spheres // Intern. J. Multiphase Flow. 1982. V. 8. N. 4. P. 343–360.
12. *Sangani A.S., Lu W.* Elastic coefficients of composites containing spherical inclusions in a periodic array // J. Mech. and Phys. Solids. 1987. V. 35. N. 1. P. 1–21.
13. *Nunan K.C., Keller J.B.* Effective elasticity tensor of a periodic composite // J. Mech. and Phys. Solids. 1984. V. 32. N. 4. P. 259–280.
14. *Кузнецов С.В.* О решении некоторых периодических задач теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 39–43.
15. *Кузнецов С.В.* Фундаментальные решения уравнений Ламе для анизотропных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 50–54.
16. *Wainger S.* Special trigonometric series in *K*-dimensions // Mem. Amer. Math. Soc. 1965. N. 59. 102 p.
17. *Ильин В.А.* Достаточные условия разложимости функции в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям // Матем. сб. 1958. Т. 46. № 1. С. 3–26.

Москва

Поступила в редакцию
13.XI.1991