

УДК 531.383

© 1992 г. С.А. Беликов

## ЛОКАЛЬНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ ВОЗМУЩЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕСОВЕРШЕННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ С ДИССИПАТИВНЫМИ И УСКОРЯЮЩИМИ СИЛАМИ

Рассматривается неуравновешенный динамически симметричный гироскоп в кардановом подвесе с конструктивными несовершенствами в центральном ньютоновском поле сил. Предполагается, что в оси вращения одного кольца подвеса действует момент сил вязкого трения, а к оси вращения другого кольца приложен ускоряющий (электромагнитный) момент. Уравнения движения допускают частное решение, на котором основная плоскость рамы перпендикулярна направлению от заданной неподвижной точки рамы к центру тяготения, основная плоскость кожуха параллельна этому направлению, а ротор вращается с произвольной постоянной угловой скоростью.

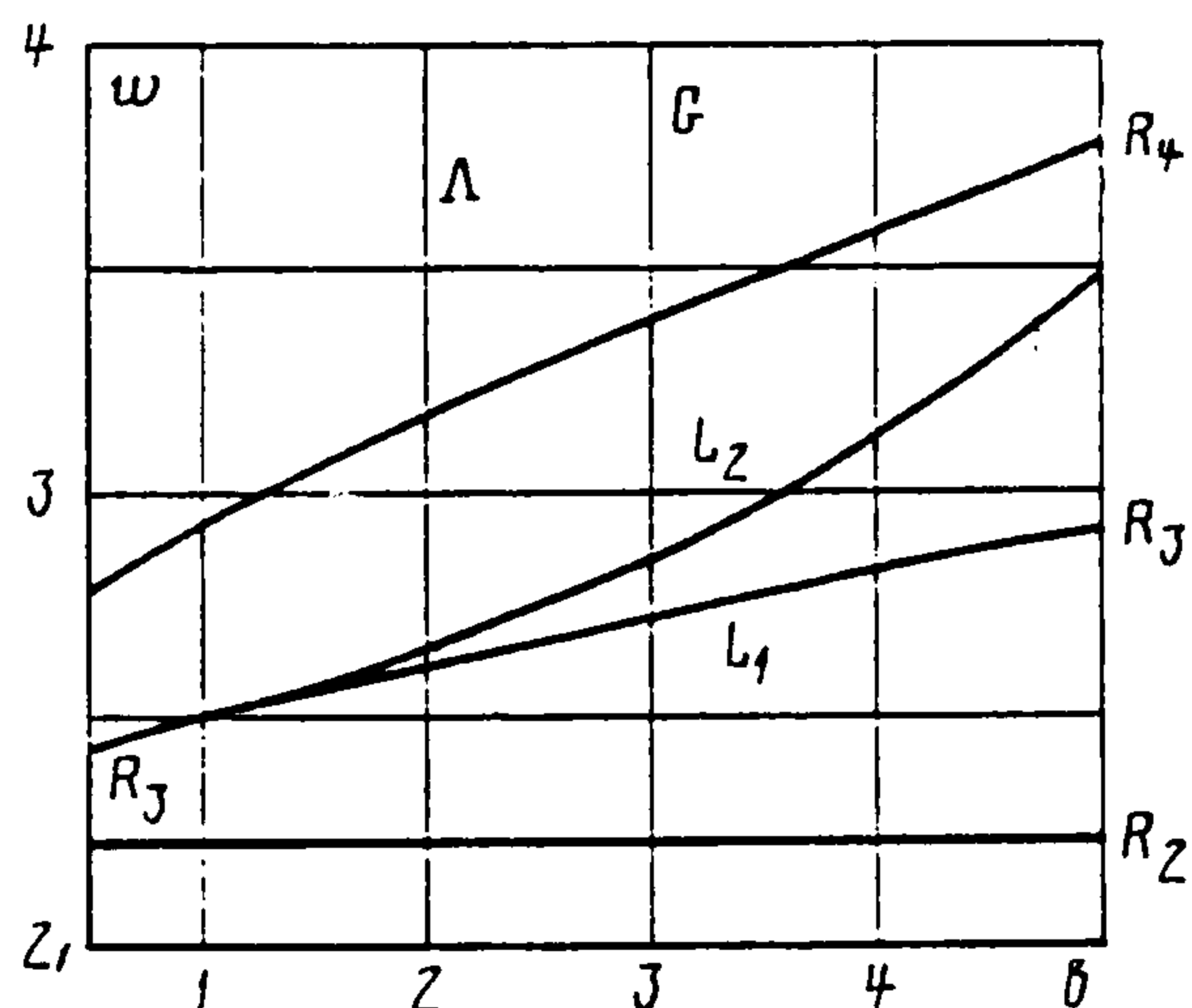
Получены уравнения возмущенных движений приведенной системы с двумя степенями свободы в окрестности соответствующего положения равновесия с точностью до членов третьего порядка. В области допустимых значений параметров  $F_0$  рассмотрено характеристическое уравнение системы и выписаны его коэффициенты. В  $F_0$  указана область, где комплексно-сопряженные пары собственных чисел имеют малые по модулю вещественные части, а резонансные расстройки второго – четвертого порядка между мнимыми частями не являются малыми по абсолютной величине. В этой области получены достаточные условия локальной равномерной ограниченности возмущенных движений несовершенного гироскопа в кардановом подвесе с диссипативными и ускоряющими силами относительно указанного частного решения. Найденные условия обеспечивают локальную равномерную ограниченность решений независимо от форм выше третьего порядка в уравнениях возмущенных движений. Эти условия получены в виде ограничений на коэффициенты нормальной формы и окончательно – на исходные параметры системы, вещественные и мнимые части собственных чисел. Для наглядной интерпретации результатов проанализированы частные случаи, когда фиксированы значения всех параметров, кроме двух. В плоских областях  $F_0$  построены с использованием ПЭВМ области локальной равномерной ограниченности.

Уравнения изменения момента количества движения, кинетическая энергия и силовая функция составного пространственного маятника в однородном поле сил тяжести получены в работе [1]. Частными примерами составного пространственного маятника являются обобщенный гироскоп в кардановом подвесе [2], гироскоп в кардановом подвесе с конструктивными несовершенствами и совершенный гироскоп [3]. Была исследована [4] локальная ограниченность возмущенных движений совершенного гироскопа в кардановом подвесе с диссипативными и ускоряющими силами.

**1. Частное решение уравнений движения. Постановка задачи.** Рассмотрим тяжелый гироскоп в кардановом подвесе с конструктивными несовершенствами, находящийся в ньютоновском поле сил с центром  $S$ . Наружное кольцо  $S_2$  (рама) имеет ось вращения  $l_2$ , закрепленную на неподвижном основании перпендикулярно направлению  $O_2S$ . Здесь  $O_2$  – некоторая точка на оси  $l_2$ , положение которой определяется ниже. Ось вращения  $l_1$  внутреннего кольца  $S_1$  (кожуха) фиксирована в теле  $S_2$ . Ось  $l_m$ , вообще говоря, не является главной или центральной для кольца  $S_m$ ,  $m = 2, 1$ . Вращение гироскопа  $S_0$  (ротора) происходит вокруг оси  $l_0$  динамической симметрии, содержащей центр масс ротора и закрепленной в теле  $S_1$ . В наборе  $l_n$  ( $n = 2, 1, 0$ ) нет, вообще говоря, пары ортогональных или пары пересекающихся осей. Предположим, что в оси наружного (или внутреннего) кольца действует момент сил вязкого трения, а на оси внутреннего (или наружного) кольца установлено электромагнитное устройство, создающее ускоряющий момент, действующий в сторону вращения кольца и пропорциональный угловой скорости его вращения. ([5], с. 182). Считаем, что в оси вращения гироскопа момент сил трения

отсутствует или уравновешивается электромагнитным моментом, приложенным к ротору ([6], с. 85).

Назовем основной плоскостью кольца  $S_m$  плоскость, проходящую через ось  $l_m$  и параллельную оси  $l_{m-1}$  ( $m = 2, 1$ ), основной плоскостью ротора  $S_0$  — любую плоскость, проходящую через ось симметрии  $l_0$ . Введем в рассмотрение следующие ортогональные правые системы координат. Система  $O_2XYZ$  жестко связана с неподвижной платформой, ось  $O_2X$  направлена к центру тяготения  $S$ ,  $O_2Y$  — по неподвижной оси  $l_2$ . Система  $O_n\xi_n\eta_n\zeta_n$  жестко связана с телом  $S_n$  ( $n = 2, 1, 0$ ), ось  $O_n\xi_n$  направлена по  $l_n$ ,  $O_n\eta_n$  также находится в основной плоскости тела  $S_n$ . Точку  $O_0$  совместим с центром масс рото-



ра, точку  $O_m$ , лежащую на оси  $l_m$ , выберем таким образом, чтобы точка  $O_{m-1}$  попала в координатную плоскость  $O_m\eta_m\zeta_m$  ( $m = 1, 2$ ).

Угол между осями  $O_2X$  и  $O_2\xi_2$  равен  $\pi/2$ , постоянный угол между осями  $O_m\xi_m$  и  $O_{m-1}\xi_{m-1}$  обозначим через  $\epsilon_m$  ( $m = 2, 1$ ). Пусть  $x'_n, y'_n, z'_n$  — координаты центра масс тела  $S_n$  в системе  $O_n\xi_n\eta_n\zeta_n$  ( $n = 2, 1, 0$ ),  $X'_m, Y'_m, Z'_m$  — компоненты вектора  $\overline{O_m O_{m-1}}$  в системе  $O_m\xi_m\eta_m\zeta_m$  ( $m = 2, 1$ ). Имеем  $x'_0 = y'_0 = z'_0 = X'_2 = X'_1 = 0$ .

Считаем, что в начальном положении основные плоскости тел параллельны между собой и параллельны направлению  $O_2S$ . Текущее положение рассматриваемой системы относительно неподвижной платформы будем определять кардановыми углами  $\psi, \theta, \varphi$ . Угол  $\psi$  поворота рамы  $S_2$ , отсчитываемый в плоскости, перпендикулярной оси  $l_2$ , есть угол между неподвижной и основной плоскостями  $O_2XY$  и  $O_2\xi_2\eta_2$  соответственно. Угол  $\theta$  поворота кожуха  $S_1$  (угол  $\varphi$  собственного вращения гироскопа  $S_0$ ), отсчитываемый в плоскости, перпендикулярной  $l_1$  ( $l_0$ ), есть угол между основными плоскостями  $O_2\xi_2\eta_2$  и  $O_1\xi_1\eta_1$  ( $O_1\xi_1\eta_1$  и  $O_0\xi_0\eta_0$ ).

Уравнения движения несовершенного гироскопа в кардановом подвесе с диссипативными и ускоряющими силами в осях колец подвеса имеют вид

$$\dot{p} = -\partial H/\partial q - F\partial H/\partial p, \quad \dot{q} = \partial H/\partial p \quad (1.1)$$

Здесь  $H = H(p_\psi, p_\theta, p_\varphi, \psi, \theta)$  — функция Гамильтона,  $p = (p_\psi, p_\theta, p_\varphi)^T$  — обобщенные импульсы, соответствующие координатам  $q = (\psi, \theta, \varphi)^T$ ,  $F = \text{diag}(k_\psi, k_\theta, 0)$  — матрица функции Релея

$$F = \frac{1}{2}k_\psi (\partial H/\partial p_\psi)^2 + \frac{1}{2}k_\theta (\partial H/\partial p_\theta)^2$$

$k_\psi > 0$  (или  $k_\theta > 0$ ) — коэффициент вязкого трения в оси рамы (или кожуха), а  $k_\theta < 0$  (или  $k_\psi < 0$ ), так что  $|k_\theta|$  (или  $|k_\psi|$ ) — крутизна характеристики электромагнитного устройства на оси кожуха (или рамы), создающего ускоряющий момент, причем  $k_\psi k_\theta < 0$ . Функцию Гамильтона  $H$  ради краткости здесь не выписываем, отметим лишь, что ее выражение содержит, кроме упомянутых выше, следующие величины.  $B_{ij}, A_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, i \leq j$ ) — компоненты тензора инерции наружного и внутреннего

кольца соответственно,  $A, B$  – компоненты диагонального тензора инерции гироскопа,  $A_{11}^* = A_{11} + M_0(Y_1'^2 + Z_1'^2)$ ,  $A_{22}^* = A_{22} + M_0 Z_1'^2$ ,  $A_{33}^* = A_{33} + M_0 Y_1'^2$ ,  $A_{12}^* = A_{12}$ ,  $A_{13}^* = A_{13}$ ,  $A_{23}^* = A_{23} - M_0 Y_1' Z_1'$ ,  $M_n$  – масса тела  $S_n$  ( $n = 2, 1, 0$ ),  $M = M_1 + M_0$ ,  $\xi_1' = M^{-1} M_1 x_1'$ ,  $\eta_1' = M^{-1} (M_1 y_1' + M_0 Y_1')$ ,  $\zeta_1' = M^{-1} (M_1 z_1' + M_0 Z_1')$ ,  $g$  – ускорение силы тяжести в точке  $O_2$ ,  $R$  – расстояние между точками  $O_2$  и  $S$ .

Поскольку угол  $\varphi$  поворота гироскопа не входит явно в гамильтониан  $H$ , а силы, действующие в оси ротора, уравновешены, система (1.1) допускает интеграл  $p_\varphi = \text{const}$  и в уравнениях (1.1) выделяется приведенная система, имеющая две степени свободы.

Пусть выполнены условия

$$\begin{aligned} M_2 y_2' + M Y_2' + M \xi_1' \sin \epsilon_2 &= 0, & \zeta_1' &= 0 \\ B_{23} + A_{12} \sin \epsilon_2 + (A - B) \sin \epsilon_2 \cos \epsilon_1 \sin \epsilon_1 &= 0, & A_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Тогда уравнения (1.1) движения несовершенного гироскопа в кардановом подвесе допускают частное решение

$$\begin{aligned} p_\psi &= A \omega' \cos \epsilon_2 \cos \epsilon_1, & p_\theta &= A \omega' \cos \epsilon_1 \\ p_\varphi &= A \omega', & \psi &= \theta = \pi/2, & \varphi &= \omega' t + \varphi_0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

На этом решении основная плоскость рамы перпендикулярна направлению  $O_2 S$ , основная плоскость кожуха параллельна  $O_2 S$  и содержит это направление, если  $Y_2' = 0$ ; последнее, вообще говоря, не предполагается. Гироскоп вращается с произвольной постоянной угловой скоростью  $\omega'$ . Второе условие (1.2) означает, что центр масс системы кожух–ротор лежит в основной плоскости кожуха. Совокупность двух первых условий (1.2) означает, что центр масс  $P$  системы трех тел  $S_2, S_1, S_0$  на стационарных движениях (1.3) лежит в плоскости, проходящей через центр тяготения  $S$  и ось  $l_2$ . Третье и четвертое условия (1.2) существования решения (1.3) вносятся предположением о центральности ньютоновского поля.

Исследуем достаточные условия локальной равномерной ограниченности [7, 8] возмущенных движений несовершенного гироскопа в кардановом подвесе с диссипативными и ускоряющими силами в осях колец подвеса по переменным  $p_\psi, p_\theta, p_\varphi, \psi, \theta$  относительно стационарных движений (1.2) при параметрических возмущениях конструктивных параметров системы.

2. Уравнения возмущенных движений приведенной системы. Получим уравнения возмущенных движений приведенной системы в окрестности положения равновесия

$$p_\psi = A \omega' \cos \epsilon_2 \cos \epsilon_1, \quad p_\theta = A \omega' \cos \epsilon_1, \quad \psi = \theta = \pi/2, \quad (2.1)$$

соответствующего стационарным движениям (1.3) исходной системы (1.1). Полагаем  $p_\psi = A \omega' \cos \epsilon_2 \cos \epsilon_1 + p_1'$ ,  $p_\theta = A \omega' \cos \epsilon_1 + p_2'$ ,  $\psi = \pi/2 + q_1'$ ,  $\theta = \pi/2 + q_2'$  и находим разложение функции Гамильтона приведенной системы в окрестности равновесия (2.1) с точностью до членов четвертого порядка относительно возмущений  $p_m', q_m'$  ( $m = 1, 2$ ). Вводим новые безразмерные переменные  $p_m, q_m$  ( $m = 1, 2$ ), время  $\tau$ , угловую скорость  $\omega$ , коэффициенты  $k_m$  и параметры  $b_i, a_{ij}, a_{ij}^*$  ( $i, j = 1, 2, 3, i \leq j$ ),  $b, Y_2, Z_2, Y_1, Z_1, \xi_1, \eta_1, m, \delta, e$  по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_* &= (g | M_2 z_2' + M Z_2' + M \eta_1' | / A)^{1/2}, & p_m' &= A \sigma_* p_m \\ q_m' &= q_m \quad (m = 1, 2), & t &= \sigma_*^{-1} \tau, & \omega' &= \sigma_* \omega, & k_\psi &= A \sigma_* k_1 \\ k_\theta &= A \sigma_* k_2, & b_i &= \frac{B_{ii}}{A}, & a_{ij} &= \frac{A_{ij}}{A} \quad (a_{23} = 0) \\ a_{ij}^* &= \frac{A_{ij}^*}{A} \quad (i, j = 1, 2, 3, i \leq j), & b &= \frac{B}{A}, & Y_2' &= \left( \frac{A}{M} \right)^{1/2} Y_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$Z'_2 = \left(\frac{A}{M}\right)^{1/2} Z_2, \quad Y'_1 = \left(\frac{A}{M_0}\right)^{1/2} Y_1, \quad Z'_1 = \left(\frac{A}{M_0}\right)^{1/2} Z_1$$

$$\xi'_1 = \left(\frac{A}{M}\right)^{1/2} \xi_1, \quad \eta'_1 = \left(\frac{A}{M}\right)^{1/2} \eta_1, \quad m = \frac{gM\eta'_1}{A\sigma_*^2}$$

$$\delta = \frac{g}{R\sigma_*^2}, \quad e = \text{sign}(M_2 z'_2 + MZ'_2 + M\eta'_1)$$

Безразмерные параметры  $\epsilon_2, \epsilon_1$  остаются прежними. Независимых безразмерных параметров оказывается двадцать три.

Получаем разложение функции Гамильтона приведенной системы в безразмерных величинах

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (2.3)$$

$$H_n = \sum_{|\nu|=n} h_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} q_1^{\nu_3} q_2^{\nu_4} \quad (n = 2, 3, 4, \dots),$$

$\nu_1, \dots, \nu_4$  — целые неотрицательные числа,  $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_4$ . Отличные от нуля коэффициенты  $h_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}$  форм  $H_2, H_3$  и  $H_4$  имеют вид:

$$\begin{aligned} 2h_{2000} &= \Theta_0 D_0, \quad h_{1100} = -\Phi_0 D_0, \quad h_{1001} = -\pi_0 \Theta_0 D_0, \quad 2h_{0200} = \Psi_0 D_0, \\ h_{0101} &= \pi_0 \Phi_0 D_0, \quad 2h_{0020} = e + 3\delta h_{20}, \quad h_{0011} = m \cos \epsilon_2 + 3\delta h_{11}, \quad 2h_{0002} = \\ &= \pi_0^2 \Theta_0 D_0 + \dot{m} + 3\delta h_{02}, \quad 2h_{2001} = -\Theta_0 D_1, \quad h_{1101} = -\Phi_1 D_0 + \Phi_0 D_1, \quad h_{1002} = \pi_0 \Theta_0 D_1, \\ 2h_{0201} &= \Psi_1 D_0 - \Psi_0 D_1, \quad h_{0102} = \pi_0 (\Phi_1 D_0 - \Phi_0 D_1), \quad h_{0021} = 3\delta \cos \epsilon_2 h_{12}, \\ 2h_{0012} &= 3\delta h_{12}, \quad 2h_{0003} = -\pi_0^2 \Theta_0 D_1, \quad 2h_{2002} = \Theta_0 D_2, \quad h_{1102} = -\Phi_2 D_0 + \Phi_1 D_1 - \\ &- \Phi_0 D_2, \quad h_{1003} = \pi_0 \Theta_0 (1/6 D_0 - D_2), \quad 2h_{0202} = \Psi_2 D_0 - \Psi_1 D_1 + \Psi_0 D_2, \quad (2.4) \\ 2h_{0103} &= \pi_0 (-1/3 \Phi_0 + 2\Phi_2) D_0 + 2\pi_0 (-\Phi_1 D_1 + \Phi_0 D_2), \quad 2h_{0040} = -1/12 e - \delta h_{20}, \\ h_{0031} &= -1/6 m \cos \epsilon_2 - 2\delta h_{11}, \quad 2h_{0022} = -1/2 m + 3\delta h_{22}, \quad h_{0013} = -1/6 m \cos \epsilon_2 - \\ &- 2\delta (h_{11} + 3/4 a_{13} \sin \epsilon_2) \\ 2h_{0004} &= \pi_0^2 \Theta_0 (-1/3 D_0 + D_2) - 1/12 m - \delta h_{02} \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} h_{20} &= b_2 - b_3 + a_{11} \sin^2 \epsilon_2 - a_{22} + a_{33} \cos^2 \epsilon_2 - a_{13} \sin 2\epsilon_2 + (b-1)(\sin^2 \epsilon_1 - \sin^2 \epsilon_2 \cos^2 \epsilon_1) \\ h_{11} &= (-a_{22} + a_{33}) \cos \epsilon_2 - a_{13} \sin \epsilon_2 + (b-1) \cos \epsilon_2 \sin^2 \epsilon_1 \\ h_{02} &= -a_{22} + a_{33} + (b-1) \sin^2 \epsilon_1, \quad h_{12} = \sin \epsilon_2 (-a_{12} + (b-1) \cos \epsilon_1 \sin \epsilon_1) \\ h_{22} &= (a_{22} - a_{33} - (b-1) \sin^2 \epsilon_1)(1 + \cos^2 \epsilon_2) + 1/2 a_{13} \sin 2\epsilon_1 \\ \pi_0 &= \omega \sin \epsilon_2 \sin \epsilon_1, \quad \Theta_0 = a_{11}^* + b \sin^2 \epsilon_1 \\ \Psi_0 &= b_1 + a_{11}^* \cos^2 \epsilon_2 + a_{33}^* \sin^2 \epsilon_2 + a_{13}^* \sin 2\epsilon_2 + b(1 - \cos^2 \epsilon_2 \cos^2 \epsilon_1) + Y_2^2 + Z_2^2 + \\ &+ 2Y_2 \xi_1 \sin \epsilon_2 + 2Z_2 \eta_1 \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$\Phi_0 = a_{11}^* \cos \epsilon_2 + a_{13}^* \sin \epsilon_2 + b \cos \epsilon_2 \sin^2 \epsilon_1 + Z_2 \eta_1 \cos \epsilon_2, \quad \Delta_0 = \Theta_0 \Psi_0 - \Phi_0^2, \quad D_0 = \Delta_0^{-1}$$

$$\Psi_1 = a_{12}^* \sin 2\epsilon_2 + 2a_{23}^* \sin^2 \epsilon_2 - 1/2 b \sin 2\epsilon_2 \sin 2\epsilon_1 - 2Y_2 \eta_1 \cos \epsilon_2$$

$$\Phi_1 = a_{12}^* \sin \epsilon_2 - 1/2 b \sin \epsilon_2 \sin 2\epsilon_1 - Y_2 \eta_1$$

$$\Delta_1 = \Theta_0 \Psi_1 - 2\Phi_0 \Phi_1, \quad D_1 = \Delta_1 \Delta_0^{-2}$$

$$\Psi_2 = (a_{22}^* - a_{33}^*) \sin^2 \epsilon_2 - 1/2 a_{13}^* \sin 2\epsilon_2 - b \sin^2 \epsilon_2 \sin^2 \epsilon_1 - Z_2 \eta_1,$$

$$\Phi_2 = -1/2 (a_{13}^* \sin \epsilon_2 + Z_2 \eta_1 \cos \epsilon_2), \quad \Delta_2 = \Theta_0 \Psi_2 - \Phi_1^2 - 2\Phi_0 \Phi_2, \quad D_2 = (\Delta_1^2 - \Delta_0 \Delta_2) \Delta_0^{-3}$$

Уравнения возмущенных движений приведенной системы в окрестности равновесия (2.1) для безразмерных величин, определенных согласно (2.2), имеют вид

$$dp_m/d\tau = -\partial H/\partial q_m - k_m \partial H/\partial p_m, \quad dq_m/d\tau = \partial H/\partial p_m \quad (m = 1, 2) \quad (2.6)$$

*Замечания.* 2.1. При приближенном рассмотрении центрального ньютоновского поля сил предполагается, что расстояние  $R$  намного больше размеров гироскопа в кардановом подвесе. Поэтому безразмерный параметр  $\delta$  – малая величина. Предельный случай  $\delta = 0$  соответствует однородному полю сил тяжести.

2.2. Если на стационарных движениях (1.3) центр масс  $P$  системы трех тел  $S_2, S_1, S_0$  и центр тяготения  $S$  лежат по одну сторону (или по разные стороны) от основной плоскости рамы  $S_2$ , получаем  $e = 1$  (или  $e = -1$ ).

**3. Характеристическое уравнение. Предположения о свойствах собственных чисел.** Рассмотрим область допустимых значений параметров:

$$F_0 = \{c = (\omega, k_1, k_2, b_1, b_2, b_3, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{33}, b, \epsilon_2, \epsilon_1, Y_2, Z_2, Y_1, Z_1, \xi_1, \eta_1, m, \delta): k_1 > 0, k_2 < 0 \text{ (или } k_1 < 0, k_2 > 0), b_1 + b_2 > b_3, b_2 + b_3 > b_1, b_3 + b_1 > b_2, a_{11} + a_{22} > a_{33}, a_{22} + a_{33} > a_{11}, a_{33} + a_{11} > a_{22}, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, a_{11}a_{22}a_{33} - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 > 0, b > 1/2, \epsilon_2 \in [0, \pi), \epsilon_1 \in [0, \pi), \eta_1 m > 0, \Delta_0 > 0, \delta \text{ – малая положительная величина}\}, e = \pm 1$$

Характеристическое уравнение системы (2.6) имеет вид

$$\lambda^4 + P_1 \lambda^3 + (P_2 + Q_2) \lambda^2 + P_3 \lambda + Q_4 = 0 \quad (3.1)$$

Вычисляя коэффициенты уравнения (3.1) согласно [9], получаем

$$\begin{aligned} P_1 &= (k_1 \Theta_0 + k_2 \Psi_0) D_0, \quad P_2 = k_1 k_2 D_0 \\ Q_2 &= (\pi_0^2 + \Theta_0 (e + 3\delta h_{20}) - 2\Phi_0 (m \cos \epsilon_2 + 3\delta h_{11}) + \Psi_0 (m + 3\delta h_{02})) D_0, \\ P_3 &= (k_1 (m + 3\delta h_{02}) + k_2 (e + 3\delta h_{20})) D_0, \\ Q_4 &= ((e + 3\delta h_{20})(m + 3\delta h_{02}) - (m \cos \epsilon_2 + 3\delta h_{11})^2) D_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подстановка формул (2.5) в (3.2) дает окончательные выражения коэффициентов характеристического многочлена через параметры  $c \in F_0, e = \pm 1$ .

Пусть уравнение (3.1) имеет две пары комплексно-сопряженных корней. Из формул Виета следует, что при сделанном предположении необходимым является условие  $Q_4 > 0$ . Последнее выполнено согласно замечанию 2.1 в случае  $|m| \leq 1$ . С использованием ограничений типа строгих неравенств на коэффициенты характеристического многочлена было построено [4] разбиение области  $F_0$  на части  $N_l, l = 0, 4, 2$ , так что  $l$  корней уравнения (3.1) находится в полуплоскости  $\text{Re } \lambda > 0$  и  $4 - l$  корней – в полуплоскости  $\text{Re } \lambda < 0$  при  $c \in N_l$ .

Если  $c \in N_0$ , равномерные вращения (1.3) несовершенного гироскопа в кардановом подвесе асимптотически устойчивы [10] по переменным  $p_\psi, p_\theta, p_\varphi, \psi, \theta$  при параметрических возмущениях конструктивных параметров. Если  $c \in N_4 \cup N_2$ , стационарные движения (1.3) неустойчивы [10]. Однако в реальной ситуации начальные возмущения, вообще говоря, не могут быть взяты из сколь угодно малой наперед заданной окрестности невозмущенного движения. Тогда наличие корней определяющего уравнения только с отрицательными вещественными частями не является критерием устойчивости, а существование корней с положительными вещественными частями не является признаком неустойчивости независимо от нелинейных членов в уравнениях возмущенных движений [11]. Вопрос о качественном поведении решений уравнений возмущенных движений (2.6) в зависимости от нелинейных членов остается открытым.

Для исследования локальной равномерной ограниченности решений системы (2.6)

относительно начала координат сделаем дополнительные предположения о свойствах собственных чисел<sup>1</sup>.

**Предположение 1.** Все корни характеристического уравнения (3.1), (3.2) имеют малые по модулю вещественные части.

Обозначим корни уравнения (3.1), (3.2) через  $\mu\alpha_m \pm i\beta_m$  ( $m = 1, 2$ ), где  $\mu > 0$  – малый параметр,  $\alpha_m = O(1)$ ,  $\beta_m > 0$ , для определенности  $\beta_1 > \beta_2$ .

Введем в рассмотрение гиперповерхность коразмерности 2

$$P_0 = \{c: c \in F_0, P_1(c) = 0, P_3(c) = 0\}, \quad e = \pm 1$$

и область

$$G = \{c: c \in F_0, P_2(c) + Q_2(c) > 2(Q_4(c))^{1/2}\}, \quad e = \pm 1$$

Отметим, что при  $c \in P_0 \cap G$  все собственные числа – чисто мнимые ( $\mu = 0$ ). Для выполнения предположения Д 1 необходимо включение  $c \in P_0^0$  и достаточно, чтобы  $c \in P_0^0 \cap G$ . Здесь  $P_0^0$  – малая окрестность поверхности  $P_0$ , так что  $(\forall c \in P_0^0) |P_1(c)|, |P_3(c)|$  – малые величины и  $\mu = O(|P_1|, |P_3|)$ .

Определим резонансные расстройки  $\epsilon_{1,N} = \beta_1 - N\beta_2$  порядка  $N+1$  между мнимыми частями  $\beta_1, \beta_2$  собственных чисел,  $N = 1, 2, 3$ .

**Предположение 2.** Резонансные расстройки второго – четвертого порядков между мнимыми частями корней характеристического уравнения (3.1), (3.2) не являются малыми по абсолютной величине.

Рассмотрим гиперповерхности коразмерности 1

$$R_2 = \{c: c \in F_0, P_2(c) + Q_2(c) = 2(Q_4(c))^{1/2}\}$$

$$R_3 = \{c: c \in F_0, P_2(c) + Q_2(c) = 5/2(Q_4(c))^{1/2}\}$$

$$R_4 = \{c: c \in F_0, P_2(c) + Q_2(c) = 10/3(Q_4(c))^{1/2}\}, \quad e = \pm 1$$

Отметим, что  $R_2$  – граница области  $G$ , а  $R_3 \subset G$  и  $R_4 \subset G$ . При  $c \in P_0^0 \cap R_{N+1}$  резонансная расстройка  $\epsilon_{1,N}(c)$  – малая по модулю величина,  $N = 1, 2, 3$ . Предположение Д 2 исключает из рассмотрения малую окрестность  $R_{N+1}^0$  поверхности  $R_{N+1}$ , так что  $(\forall c \in P_0^0 \cap G \setminus R_{N+1}^0) |\epsilon_{1,N}(c)| > \sqrt{\mu}$ ,  $N = 1, 2, 3$ .

**4. Нормализация уравнений возмущенных движений и достаточные условия локальной ограниченности.** Пусть  $c \in P_0^0 \cap G \setminus R_2^0$ . Линейная замена переменных  $z = Sx$ ,  $z = (p_1, p_2, q_1, q_2)^T$ ,  $S = \|s_{kl}\|_{k,l=1}^4$ ,  $\det S \neq 0$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  приводит матрицу В линеаризованной системы (2.6) к вещественной жордановой форме. Выпишем элементы матрицы S. Введем обозначения

$$\begin{aligned} r_1 &= k_1(\mu\alpha_1\Phi_0 + \pi_0) + \Phi_0(e + 3\delta h_{20}) - \Psi_0(m \cos \epsilon_2 + 3\delta h_{11}), \quad i_1 = k_1\beta_1\Phi_0, \\ r_2 &= ((\mu\alpha_1)^2 - \beta_1^2)\Delta_0 + \mu\alpha_1(k_1\Theta_0 - \pi_0\Phi_0) + \Theta_0(e + 3\delta h_{20}) - \Phi_0(m \cos \epsilon_2 + 3\delta h_{11}) \\ i_2 &= 2\mu\alpha_1\beta_1\Delta_0 + \beta_1(k_1\Theta_0 - \pi_0\Phi_0), \quad r_3 = ((\mu\alpha_1)^2 - \beta_1^2)\Phi_0 + \mu\alpha_1\pi_0, \\ i_3 &= \beta_1(2\mu\alpha_1\Phi_0 + \pi_0), \quad r_4 = ((\mu\alpha_1)^2 - \beta_1^2)\Psi_0 + k_1\mu\alpha_1, \quad i_4 = \beta_1(2\mu\alpha_1\Psi_0 + k_1), \\ g(\alpha_1, \beta_1) &= |\mu\alpha_1(r_1i_3 - i_1r_3 - r_2i_4 + i_2r_4) - \beta_1(r_1r_3 + i_1i_3 - r_2r_4 - i_2i_4) - \\ &\quad - (\mu\alpha_1i_1 + \beta_1r_1)(m \cos \epsilon_2 + 3\delta h_{11}) + (\mu\alpha_1i_2 + \beta_1r_2 + \pi_0i_3)(e + 3\delta h_{20})|^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Тогда

$$s_{11} = (-\mu\alpha_1r_1 + \beta_1i_1 - \pi_0(e + 3\delta h_{20}))g(\alpha_1, \beta_1)$$

<sup>1</sup>Определение локальной равномерной ограниченности из [7, 8] для решений автономной системы вида (2.6) приведено в работе: Беликов С.А. Локальная ограниченность решений автономной системы четвертого порядка с малыми положительными вещественными частями собственных чисел. Л., 1987. 84 с. – Деп. в ВИНТИ 26.03.87, № 2206–В87.

$$\begin{aligned}
s_{21} &= (-\mu\alpha_1 r_2 + \beta_1 i_2)g(\alpha_1, \beta_1), & s_{31} &= (r_3 + m \cos \epsilon_2 + 3\delta h_{11})g(\alpha_1, \beta_1), \\
s_{41} &= -(r_4 + e + 3\delta h_{20})g(\alpha_1, \beta_1), & s_{13} &= (\mu\alpha_1 i_1 + \beta_1 r_1)g(\alpha_1, \beta_1) \\
s_{23} &= (\mu\alpha_1 i_2 + \beta_1 r_2)g(\alpha_1, \beta_1), & s_{33} &= -i_3 g(\alpha_1, \beta_1), & s_{43} &= i_4 g(\alpha_1, \beta_1)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Формулы для  $s_{k2}, s_{k4}$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) находятся соответственно из выражений для  $s_{k1}, s_{k3}$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) заменой в (4.1) и (4.2)  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \beta_1 \rightarrow e\beta_2$ . Подстановка формул (4.1) и (2.5) в (4.2) дает окончательные выражения элементов матрицы  $S$  через исходные безразмерные параметры  $c \in P_0^0 \cap G \setminus R_2^0$  и величины  $\alpha_m, \beta_m$  ( $m = 1, 2$ ).

Пусть

$$c \in P_0^0 \cap G \setminus (R_2^0 \cup R_3^0 \cup R_4^0) \tag{4.3}$$

В результате нормализующего преобразования, построенного с использованием метода Дебри – Хори – Кэмела, система обыкновенных дифференциальных уравнений в переменных  $x$ , полученная из (2.6) заменой  $z = Sx$ , приводится к непрерывной по параметру  $\mu$  в точке  $\mu = 0$  нормальной форме с точностью до членов третьего порядка относительно преобразованных переменных (см. работу, упомянутую в сноске на стр. 1003 и работу [4]). Коэффициенты непрерывной нормальной формы обозначим через  $\varphi_{m,10}, \varphi_{m,01}$  ( $m = 1, 2$ ) [4]. Выражения этих коэффициентов через величины  $h_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}$  (2.4); (2.5),  $|\nu| = 3, 4, k_m, \alpha_m, \beta_m$  ( $m = 1, 2$ ) и элементы матриц  $S, S^{-1}$  найдены с использованием аналитических выкладок работ [9] и указанной в сноске на стр. 1003. Полученные выражения коэффициентов  $\varphi_{m,10}, \varphi_{m,01}$  ( $m = 1, 2$ ) ради краткости здесь не выписываем.

Справедлива теорема о локальной равномерной ограниченности.

*Теорема.* Допустим, что параметры  $c$  удовлетворяют включению (4.3),  $e = \pm 1$ . Пусть коэффициенты  $\varphi_{m,10}, \varphi_{m,01}$  ( $m = 1, 2$ ) непрерывной нормальной формы при фиксированном наборе  $c, e = \pm 1$  удовлетворяют следующим условиям:

1)  $\varphi_{1,10} < 0$  и  $\varphi_{2,01} < 0$ , если  $\varphi_{1,01}\varphi_{2,10} \leq 0$  или  $\varphi_{1,01} \leq 0$  и  $\varphi_{2,10} \leq 0$ ; 2)  $\varphi_{1,10} < 0$ ,  $\varphi_{2,01} < 0$  и  $\varphi_{1,10}\varphi_{2,01} > \varphi_{1,01}\varphi_{2,10}$ , если  $\varphi_{1,01} > 0$  и  $\varphi_{2,10} > 0$ .

Тогда решения уравнений возмущенных движений (2.6) локально равномерно ограничены относительно начала координат  $p_m = q_m = 0$  ( $m = 1, 2$ ) независимо от форм выше третьего порядка.

*Замечания.* 4.1. Нулевое решение уравнений возмущенных движений (2.6) совпадает с положением равновесия (2.1) приведенной системы.

4.2. Условия теоремы содержат ограничения типа неравенств на коэффициенты  $\varphi_{m,10}, \varphi_{m,01}$  ( $m = 1, 2$ ) непрерывной нормальной формы. Отметим, что величины  $\alpha_m, \beta_m$  ( $m = 1, 2$ ) и элементы матриц  $S, S^{-1}$  выражаются с учетом формул (3.2), (4.2), (4.1) и (2.5) через параметры  $c$  (4.3),  $e = \pm 1$  при помощи известных алгебраических соотношений. Используя упомянутые выше выражения коэффициентов нормальной формы, можем расценивать полученные в теореме достаточные условия локальной равномерной ограниченности как условия на исходные конструктивные параметры несовершенного гироскопа в кардановом подвесе.

Из теоремы о непрерывной зависимости решений системы (1.1) от параметров и условий приведенной теоремы вытекает следующий результат. Возмущенные движения несовершенного гироскопа в кардановом подвесе с диссипативными и ускоряющими силами в осях колец подвеса локально равномерно ограничены по переменным  $p_\psi, p_\theta, p_\varphi, \psi, \theta$  относительно стационарных движений (1.3) при параметрических возмущениях конструктивных параметров системы.

5. Интерпретация условий локальной ограниченности в частном случае. Рассмотренная модель несовершенного гироскопа в кардановом подвесе содержит большое число конструктивных параметров. С целью наглядной интерпретации полученных достаточных условий локальной равномерной ограниченности как условий на безразмерные параметры  $c \in F_0$  введем в рассмотрение наборы  $\{c\} \subset P_0^0 \subset F_0, e = \pm 1$ , в которых фиксированы значения всех параметров, кроме двух, например,

$b$  и  $\omega$ . Составлена и отлажена программа FORTRAN, позволяющая интерпретировать условия локальной равномерной ограниченности для любого такого набора и вычислять начальную  $q$  и текущую  $p$  оценки локальной ограниченности решений нормальной формы.

Интерпретация по результатам расчетов на ПЭВМ в случае  $k_1 = 15/8, k_2 = -3/2, b_1 = 1/4, b_2 = 1/2, b_3 = 3/8, a_{11} = 1, a_{12} = 1/4, a_{13} = \sqrt{3}/8, a_{22} = 1/2, a_{33} = 3/4, \epsilon_2 = \epsilon_1 = \pi/3, Y_2 = -1/4, Z_2 = 1/4, Y_1 = 1/2, Z_1 = 0, \xi_1 = \sqrt{3}/4, \eta_1 = 1/4, m = 4/5, \delta = 10^{-5}, e = +1$  представлена на фигуре. Анализ производился в пересечении прямоугольника  $\{b \in [1/2; 10]\} \times \{\omega \in [2; 10]\}$  с плоской областью  $G$ , расположенной выше кривой  $R_2$ . Область локальной равномерной ограниченности есть область  $\Lambda$ , расположенная слева-снизу от кривой  $L_1$  и слева-сверху от  $L_2$ . При этом из области  $\Lambda$  исключаются малые окрестности кривых  $R_2, R_3$  и  $R_4$ .

Произведены расчеты и для множества других упомянутых выше наборов параметров. Приведем лишь краткую характеристику полученных результатов. При  $k_1 > 0, k_2 < 0, e = +1$  область выполнения достаточных условий локальной равномерной ограниченности  $\Lambda$  обнаружена во всех рассмотренных случаях. При  $e = -1$  область  $\Lambda$  обнаруживается довольно редко и при достаточно больших  $\omega$ . Указанным образом характеризуется, например, случай  $k_1 = -15/8, k_2 = 3/2, b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 3/2, a_{11} = 3/2, a_{12} = -1/2, a_{13} = \sqrt{3}/2, a_{22} = 2, a_{33} = 1, \epsilon_2 = \epsilon_1 = \pi/3, Y_2 = \sqrt{3}/2, Z_2 = 1, Y_1 = \sqrt{2}/2, Z_1 = 0, \xi_1 = -13/12, \eta_1 = -1, m = -4/5, \delta = 10^{-5}, e = -1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Харламов П.В. Составной пространственный маятник // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1972. Вып. 4. С. 73–82.
2. Коносевиц Б.И. Скорость ухода оси ротора в обобщенной задаче о гироскопе в кардановом подвесе // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1972. Вып. 4. С. 82–92.
3. Харламов М.П. Фазовая топология одной задачи о движении гироскопа // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1981. Вып. 13. С. 14–23.
4. Беликов С.А. Локальная ограниченность возмущенных движений гироскопа в кардановом подвесе с диссипативными и ускоряющими силами // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 958–965.
5. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
6. Луиц Я.Л. Введение в теорию гироскопов. М.: Наука, 1972. 296 с.
7. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
8. Беликов С.А. Локальная ограниченность решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно множества // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 568–577.
9. Беликов С.А. Локальная ограниченность решений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии диссипативных сил // Пятая Всесоюз. Четаевская конф. "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением": Тез. докл. Казань: Изд-во Казан. авиац. ин-та, 1987. С. 15–16.
10. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
11. Каменков Г.В. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1972. Т. 2. 214 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
17.VII.1991