Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 6, 1992

УДК 531.383:521.2

© 1992 г. Леонов Г.А., Морозов А.В.

О ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматриваются динамические уравнения Эйлера, описывающие движение несимметричного твердого тела вокруг центра масс в поле постоянного внешнего и диссипативного моментов. Предполагается, что внешний момент, заданный в связанных с телом осях, действует вдоль средней главной центральной оси инерции тела. Получены условия глобальной асимптотической устойчивости, а также устойчивости в целом стационарных вращений твердого тела.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения Эйлера движения твердого тела вокруг центра масс в системе координат, жестко связанной с телом [1, 2]

$$I_1\dot{\omega}_1 = -(I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 - k_1I_1\omega_1 + F_1(1\ 2\ 3) \qquad (1.1)$$

Здесь $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции вектора мгновенной угловой скорости ω на координатные оси, $I_1 > I_2 > I_3$ – главные центральные моменты инерции тела, k_1, k_2, k_3 – коэффициенты затухания вдоль соответствующих осей [3], F_1, F_2, F_3 – компоненты возмущающего момента **F**.

Уравнения (1.1) рассматривались многими авторами. В частности, Гринхил показал, что при $\mathbf{F} = 0$ и $k_1 = k_2 = k_3$ система (1.1) допускает точное решение в эллиптических функциях [4]. В тех же предположениях было построено [5] разложение решений этой системы по малому параметру $\epsilon = (I_1 - I_2)/I_3$. Исследованы [2] асимптотические свойства решений при малых диссипативном и стационарном внешнем моментах методом усреднения. Прямым методом Ляпунова изучена [3] устойчивость в малом вращений тела в предположении одной ненулевой компоненты вектора **F**.

Отметим, что если в системе уравнений (1.1) вместо $-\omega \times \mathbf{L}$ положить $\omega \times \mathbf{L}$, где $\mathbf{L} = I\omega$, $I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$, то получим хорошо известные в гидродинамике уравнения, описывающие движение жидкого гироскопа, которые изучались, в частности [6–8][1], в предположении изотропности трения ($k_1 = k_2 = k_3$).

В данной статье уравнения (1.1) исследуются при $F_1 = F_3 = 0$ и $F_2 = F_0 > 0$, что с физической точки зрения означает, что внешний момент ориентирован вдоль средней оси инерции тела. Основная цель работы – выделение в пространстве параметров системы (1.1) областей, для которых множество стационарных вращений тела устойчиво при любых возмущениях вектора мгновенной угловой скорости ω. Исследование носит нелокальный характер и проводится на основе прямого метода Ляпунова с использованием элементов качественной теории многомерных динамических систем [6, 9, 10].

Введем новые параметры и время

$$p_0 = 2\,\frac{I_2 - I_3}{I_1 - I_3} \in [0, 2], \quad f_0 = 2\,\frac{\sqrt{I_1I_3}}{I_1 - I_3}\,F_0, \quad l_i = 2\,\frac{\sqrt{I_1I_2I_3}}{I_1 - I_3}\,k_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$t' = t\,\frac{I_1 - I_3}{2\sqrt{I_1I_2I_3}}$$

---

[1] См. также *Морозов А.В.* Глобальная устойчивость динамических систем с неединственным положением равновесия: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1989.

Тогда заменой переменных

$$\sqrt{I_2}\,\omega_2 = x + f_0 l_2^{-1}, \quad \sqrt{2I_1}\,\omega_1 = -y, \quad \sqrt{2I_3}\,\omega_3 = z$$

систему уравнений (1.1) приведем к виду

$$\begin{aligned} &x^{\cdot} = -l_2 x + yz, \quad y^{\cdot} = -l_1 y - p_0 f_0 l_2^{-1} z - p_0 x z \\ &z^{\cdot} = -l_3 z - (2 - p_0) f_0 l_2^{-1} y - (2 - p_0) xy \end{aligned} \tag{1.2}$$

Видно, что значениям $p_0 = 0$ и $p_0 = 2$ отвечают случаи динамически симметричных тел, для которых соответственно $I_2 = I_3$ и $I_1 = I_2$. Эти случаи достаточно полно изучены и здесь рассматриваться не будут [11]. Отметим также, что значению $p_0 = 1$ отвечает равенство $I_2 = (I_1 + I_3)/2$.

Система уравнений (1.2) имеет при

$$f_0 < f_* \quad (f_* = l_2\sqrt{l_1 l_3}/\sqrt{p_0(2 - p_0)}) \tag{1.3}$$

единственное асимптотически устойчивое по Ляпунову положение равновесия C_0 с координатами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, которое при $f_0 > f_*$ теряет свою устойчивость, передавая ее двум рождающимся положениям равновесия $C_{1,2}$ с координатами

$$x_{1,2} = \frac{f_* - f_0}{l_2}, \quad y_{1,2} = \pm\left[\frac{p_0 f_0 f_*}{l_1 l_2} - \frac{l_2 l_3}{2 - p_0}\right]^{1/2}, \quad z_{1,2} = \mp\left[\frac{(2 - p_0) f_0 f_*}{l_2 l_3} - \frac{l_1 l_2}{p_0}\right]^{1/2}$$

При этом собственные числа матрицы линеаризованного в C_0 векторного поля системы (1.2) имеют вид

$$\lambda_1 = -l_2, \quad \lambda_{2,3} = 1/2\,\{-(l_1 + l_3) \pm [(l_1 - l_3)^2 + 4 l_1 l_3 f_0^2/f_*^2]^{1/2}\}$$

Отметим, что положению равновесия C_0 отвечает стационарное вращение тела вокруг средней главной центральной оси инерции, при этом ось мгновенного вращения коллинеарна вектору $\mathbf{F}$, положениям равновесия $C_{1,2}$ отвечают другие стационарные вращения.

Будем говорить, что система уравнений (1.2) глобально асимптотически устойчива, если любая ее траектория $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ стремится при $t \to +\infty$ к одному из положений равновесия; асимптотически устойчива в целом, если она имеет одно асимптотически устойчивое по Ляпунову положение равновесия и глобально асимптотически устойчива; диссипативна по Левинсону [12], если существует такое число $R > 0$, что $\overline{\lim}_{t\to\infty} |X(t)| < R$ при любом $X_0 = X_0(0)$. Здесь $X(t) = \| x(t), y(t), z(t) \|$, символ $|X(t)|$ означает эвклидову норму вектора. Напомним также, что множество M фазового пространства называется инвариантным, если оно целиком состоит из траекторий системы.

2. Устойчивость в целом стационарных движений твердого тела. Введем в рассмотрение функцию Ляпунова вида

$$\begin{aligned} &W(x, y, z) = p_0(2 - p_0)x^2 + 1/2[(2 - p_0)y^2 + p_0 z^2] + \Theta x \\ &\Theta \in [\Theta_-, \Theta_+], \quad \Theta_\pm = 2\{p_0(2 - p_0) f_0/l_2 \pm [p_0(2 - p_0)(l_1 - \lambda)(l_3 - \lambda)]^{1/2}\} \\ &\lambda \in (0, \lambda_*), \quad \lambda_* = \min\{l_1, l_2, l_3\} \end{aligned}$$

и неотрицательное число

$$\Gamma = \frac{(l_2 - 2\lambda)^2 \Theta^2}{16 p_0 (2 - p_0)\lambda(l_2 - \lambda)}$$

Лемма 1 (о диссипативности по Левинсону). Для любой траектории системы (1.2) имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty} W(x(t), y(t), z(t)) \leqslant \Gamma$$

Доказательство леммы вытекает из легко проверяемого неравенства [7]

$$W^{\cdot} + 2\lambda W \leqslant 2\lambda\Gamma \tag{2.1}$$

где $W^{\cdot}$ – как обычно, производная по времени от функции W, вычисленная в силу уравнений (1.2).

Теорема 1. При выполнении неравенства (1.3) система уравнений (1.2) асимптотически устойчива в целом.

Доказательство. Положим $f_0 = \alpha f_*$, где α – произвольное число из промежутка (0, 1). Видно, что уравнение

$$\alpha\sqrt{l_1 l_3} = [(l_1 - \lambda)(l_3 - \lambda)]^{1/2}$$

имеет в промежутке $(0, \lambda_*)$ единственный корень λ_0, при котором $\Theta_- = 0$. Полагая $\Theta = \Theta_- = 0$, получим $\Gamma = 0$. Отсюда и из неравенства (2.1) следует $W^{\cdot} \leqslant -2\lambda_0 W$, причем $W(x, y, z)$ – положительно определенная квадратичная форма. Видно, что выполнены все условия теоремы Барбашина–Красовского об устойчивости в целом [9], а это и доказывает утверждение теоремы 1.

Отметим, что при изучении [3] задачи об устойчивости стационарных вращений твердого тела вокруг оси среднего по величине момента инерции неравенство (1.3) рассматривалось как условие асимптотической устойчивости по Ляпунову, т.е. по отношению к малым возмущениям величин ω_1, ω_2, ω_3. Теорема 1 утверждает, что при выполнении неравенства (1.3) указанное вращение тела асимптотически устойчиво по отношению к любым возмущениям величин $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Из теоремы 1 также следует, что для значений параметра p_0 близких к 0 либо к 2 неограниченно увеличивается в пространстве параметров f_0, l_1, l_2, l_3 область устойчивости в целом системы (1.2).

3. Глобальная устойчивость стационарных движений твердого тела. Перейдем к установлению условий глобальной асимптотической устойчивости системы уравнений (1.2). Предполагая далее всюду $f_0 > f_*$, введем в рассмотрение функции

$$V_{1,2}(x, y, z) = \sqrt{2 - p_0}\, y \pm \sqrt{p_0}\, z$$

и обозначения: W^s – двумерная устойчивая сепаратрисная поверхность седла C_0; $W^u = W_2^u \cup \{C_0\} \cup W_1^u$, где W_2^u и W_1^u – одномерные неустойчивые сепаратрисы седла C_0, выходящие в октанты $\{x < 0, y < 0, z > 0\}$ и $\{x < 0, y > 0, z < 0\}$ соответственно.

Основной результат этой части работы состоит в доказательстве следующего утверждения.

Теорема 2. Если $l_1 = l_3$, то при любых

$$f_0 > l_1 l_2 / \sqrt{p_0(2 - p_0)}$$

система (1.2) глобально асимптотически устойчива, т.е. любая ее траектория стремится при $t \to +\infty$ к некоторому положению равновесия.

Доказательство теоремы основывается на следующих простых утверждениях.

Лемма 2. Уравнениям $V_1(x, y, z) = 0$ и $V_2(x, y, z) = 0$ отвечают в фазовом пространстве системы (1.2) инвариантные множества, при этом справедливы включения

$$W^u \subset \{x, y, z \mid V_1(x, y, z) = 0\}$$

$$W^s \subset \{x, y, z \mid V_2(x, y, z) = 0\}$$

Доказательство леммы вытекает из очевидных равенств

$V_1^{\cdot} = 0$ на множестве $\{ x, y, z \mid V_1 = 0\}$,

$V_2^{\cdot} = 0$ на множестве $\{ x, y, z \mid V_2 = 0\}$

и того факта, что плоскость, натянутая на собственные векторы β^1 и β^3, отвечающие отрицательным собственным числам λ_1 и λ_3, совпадает с плоскостью $V_2 = 0$, а собственный вектор β^2, отвечающий положительному собственному числу λ_2, лежит в плоскости $V_1 = 0$ (β^1, β^2, β^3 – собственные векторы матрицы линеаризованного векторного поля системы (1.2) в точке C_0).

Лемма 3. На инвариантной плоскости $V_2 = 0$ система уравнений (1.2) асимптотически устойчива в целом.

Доказательство. Положим в (1.2)

$$\sqrt{2-p_0}\, y = \sqrt{p_0}\, z$$

Утверждение леммы непосредственно вытекает из рассмотрения функции $v(x, y) = p_0x^2 + y^2$, для которой выполняется неравенство $v^{\cdot}(x(t), y(t)) < 0$, и теоремы Барбашина–Красовского об устойчивости в целом.

Лемма 4. На инвариантной плоскости $V_1 = 0$ система уравнений (1.2) глобально асимптотически устойчива.

Доказательство. Полагая в (1.2)

$$\sqrt{2-p_0}\, y = -\sqrt{p_0}\, z$$

получим уравнения, с точностью до линейной замены совпадающие при $p_0 = 1$ и $l_1 = l_2$ с известными уравнениями одномерного течения жидкости Бюргерса [6, 13]:

$$\begin{aligned} &x^{\cdot} = P(x,y), \quad y^{\cdot} = Q(x,y)\\ &P(x,y) = -l_2x - \sqrt{p_0^{-1}(2-p_0)}\, y^2 \\ &Q(x,y) = -l_1y + \sqrt{p_0(2-p_0)}(f_0l_2^{-1}y + xy)\end{aligned} \tag{3.1}$$

Система (3.1) диссипативна (лемма 1), симметрична относительно оси x, при этом множество $\{y = 0\}$ инвариантно и состоит из траекторий: $x = 0$, $y = 0$; $y = 0$, $x = \gamma\exp(-l_2t)$; $y = 0$, $x = -\gamma\exp(-l_2t)$ ($\gamma = \mathrm{const}$). Предельных циклов эта система не имеет согласно критерию Дюлака [14]. Действительно, положим, например, $B(x, y) = 1/y$, тогда выражение

$$\frac{\partial}{\partial x}[P(x,y)B(x,y)] + \frac{\partial}{\partial y}[Q(x,y)B(x,y)] = -\frac{l_2}{y}$$

сохраняет знак в каждой из полуплоскостей $y > 0$ и $y < 0$. Отсюда и из асимптотической устойчивости по Ляпунову положений равновесия C_1 и C_2 вытекает по теореме Бендиксона [14] утверждение леммы 4.

Доказательство теоремы 2. Обозначим Λ, $D = \{X \mid W(X) \leqslant \Gamma\}$ и Ω – соответственно множество положений равновесия, область диссипативности и ω – предельное множество [9] системы (1.2); число Γ, вектор X и функция $W(X)$ определены выше. Тогда из леммы 1 следует, что множество Ω не пусто и $\Omega \subset D$.

Рассмотрим функцию

$$V(X) = V_1(X)\,V_2(X) = (2-p_0)y^2 - p_0z^2$$

для которой

$$V^{\cdot} = -2l_1V \tag{3.2}$$

Пусть $X = X(t, X_0)$ – произвольная траектория системы (1.2), $X(0, X_0) = X_0$. Тогда из равенства (3.2) следует

$$V(X(t,X_0)) = V(X_0)\exp(-2l_1t), \quad t \geqslant 0 \tag{3.3}$$

Если $V(X_0) = 0$, то согласно леммам 2–4 имеем

$$X(t, X_0) \to C_i \in \Lambda \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

Предположим теперь, что $V(X_0) \neq 0$, т.е. точка X_0 не лежит на инвариантном множестве $\{X | V(X) = 0\}$. Тогда из равенства (3.3) имеем

$$V(X(t, X_0)) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

Следовательно,

$$\Omega \subset D \cap \{X | V(X) = 0\}$$

Известно [9], что Ω – замкнутое множество, состоящее из целых траекторий. Но в $D \cap \{X | V(X) = 0\}$ из целых траекторий находятся только положения равновесия C_0, C_1, C_2 и неустойчивые сепаратрисы седла W_1^u, W_2^u (в силу отсутствия замкнутых контуров (лемма 4) и теоремы Бендиксона [14]). Точка C_0 – седловая, следовательно, $\lim X(t, X_0) \neq C_0$ при $t \to +\infty$. Пусть $p \in W_2^u$ – ω – предельная для траектории $X(t, X_0)$. Рассмотрим траекторию $X(t, p)$. Ясно, что $\lim X(t, p) = C_2$ при $t \to +\infty$ и $\lim X(t, p) = C_0$ при $t \to -\infty$. Пусть точка $q = X(t, p)$ в области притяжения S_2 положения равновесия C_2. Известно, что точка q также будет являться ω-предельной для траектории $X(t, X_0)$.

Пусть последовательность моментов времени $\{t_k\}$ такова, что $X(t_k, X_0) \to q$ при $k \to \infty$. Следовательно, найдется такое k, что $X(t_k, X_0)$ будет находиться в области S_2, а это означает, что $X(t, X_0) \to C_2$ при $t \to +\infty$. Последнее противоречит тому, что p – ω предельная для $X(t, X_0)$. Следовательно, $\Omega = \Lambda$. Теорема доказана.

Отметим, что использованная при доказательстве теоремы 2 функция Ляпунова не является знакопостоянной и в переменных $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ имеет вид

$$V(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = I_1(I_1 - I_2)\,\omega_1^2 - I_3(I_2 - I_3)\,\omega_3^2$$

представляя собой связку первых интегралов уравнений Эйлера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
2. *Нейштадт А.И.* Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов//Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 30–36.
3. *Денисов Г.Г.* О вращении твердого тела в сопротивляющейся среде//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 37–43.
4. *Мак-Милан В.Д.* Динамика твердого тела. М: Изд-во иностр. лит., 1951. 467 с.
5. *Кошляков В.Н.* О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде//ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 137–148.
6. *Должанский Ф.В., Кляцкин В.И., Обухов А.М., Чусов М.А.* Нелинейные системы гидродинамического типа. М.: Наука, 1974. 160 с.
7. *Леонов Г.А., Морозов А.В.* О глобальной устойчивости вынужденных движений жидкости внутри эллипсоида//ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 167–170.
8. *Бойченко В.А., Леонов Г.А.* Об оценках размерности аттракторов и глобальной устойчивости обобщенной системы Лоренца//Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1990. № 2. С. 7–13.
9. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
10. *Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения//Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1968. Т. 1. С. 7–66.
11. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
12. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.; Л.: Наука, 1964. 367 с.
13. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
14. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 299 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
25.IV.1991