

УДК 531.567

© 1992 г. Б.И. Коносевиц, С.С. Савченко

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЙВАНИЯ НЕУПРАВЛЯЕМЫХ РЕАКТИВНЫХ СНАРЯДОВ

Рассматривается задача об определении характеристик начальных, конструктивных и ветровых возмущений по заданным характеристикам рассеивания точки падения неуправляемого проворачивающегося реактивного снаряда (РС). Предлагается по одному варианту детерминированной и вероятностной постановки такой задачи, отмечаются некоторые свойства ее решений и указывается способ их вычисления.

Одной из основных задач внешней баллистики неуправляемых реактивных снарядов, применяемых в реактивных системах залпового огня, является расчет характеристик рассеивания точки падения проектируемого РС по известным характеристикам начальных, конструктивных и ветровых возмущений. Для решений этой задачи разработаны аналитические методы [1], а также ориентированные на применение ЭВМ методы линеаризации и статистических испытаний [2]. В данной статье ставится задача, обратная к сформулированной выше и заключающаяся в определении максимального уровня начальных, конструктивных и ветровых возмущений, при котором для любых условий запуска обеспечивается заданное рассеивание точки падения.

**1. Конструктивные и ветровые возмущения.** Предполагается, что рассеивание точки падения РС обусловлено возмущениями конструктивных параметров, ветровыми и начальными возмущениями в момент схода с направляющей. После схода с направляющей РС рассматривается как недеформируемое твердое тело, содержащее заряд твердого реактивного топлива и движущееся в однородном поле силы тяжести при постоянном горизонтальном ветре под действием реактивной силы, реактивной кориолисовой и аэродинамических сил и соответствующих моментов. Для описания возмущенного движения РС по направляющей используется простейшая модель РС как материальной точки переменной массы, движущейся прямолинейно под действием реактивной силы.

Невозмущенный РС обладает массовой и аэродинамической симметрией относительно продольной оси, вдоль которой действует и реактивная сила. Величины, относящиеся к невозмущенному движению невозмущенного РС, в дальнейшем отмечаются штрихом. Каждое такое движение однозначно определяется вектором невозмущенных условий запуска  $a' = (h', \theta'_0, u', \psi'_u)$ , где  $h'$  — высота пусковой установки над уровнем моря,  $\theta'_0$  — угол стрельбы,  $u'$  — модуль скорости ветра  $u'$ ,  $\psi'_u$  — угол между  $u'$  и осью  $Ox$  (см. ниже).

**Возмущенный РС** предполагается имеющим малую осевую несимметрию распределения масс и реактивной силы, аэродинамическая асимметрия не рассматривается. Учитываются также малые возмущения всех конструктивных параметров, входящих в уравнения движения осесимметричного РС. Пусть  $t_*$  — момент начала движения возмущенного РС по направляющей,  $t_0$  — момент схода с направляющей,  $\tau$  — момент окончания активного участка. С корпусом РС неизменно связана система координат  $C_\tau^0 x_2 y_2 z_2$ , началом которой является проекция точки  $C_\tau$  (центра масс РС на пассивном участке) на ось аэродинамической симметрии, вдоль этой оси к носовой части РС направлена ось  $C_\tau^0 x_2$ . Реактивная сила  $P(t)$  характеризуется ее модулем  $P(t)$  и единичным вектором  $\nu(t) = P(t)/P(t)$ , а момент реактивной силы относительно центра масс определяется

заданием точки  $K(t)$  пересечения линии ее действия с плоскостью донного среза. С использованием понятия эффективной длины направляющей реальные зависимости  $P'(t)$ ,  $P(t)$  аппроксимируются прямоугольными, которые характеризуются тремя параметрами: секундным расходом массы после схода с направляющей, эффективной скоростью истечения, массой ракетного заряда. Моменты  $t'_*$ ,  $t_*$  при этом отличаются от реальных. Так как секунднй расход массы принят постоянным, то в течение промежутка времени  $[t_*, \tau]$  масса РС линейно зависит от  $t$ .

Все остальные конструктивные параметры, явно зависящие на этом промежутке от  $t$  (координаты центра масс, компоненты центрального тензора инерции, координаты точки  $K$ , компоненты вектора  $\nu$  в системе  $C_\tau^0 x_2 y_2 z_2$ ), аппроксимируются линейными по  $t$  функциями и поэтому полностью характеризуются своими значениями в моменты  $t_*$ ,  $\tau$ . Поскольку изменение  $t_*$  при прочих неизменных условиях не приводит к изменению точки падения, принимается  $t_* = t'_* = 0$ . Возмущения внешней геометрии РС учитываются через возмущения аэродинамических коэффициентов и характеризуются малыми постоянными величинами — возмущениями соответствующих "коэффициентов формы".

Возмущение скорости ветра учитывается лишь на активном участке, где его влияние на рассеивание наиболее существенно.

**2. Возмущенное движение возмущенного РС.** Вводя обычным образом величины  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $v$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , определяющие динамику РС, объединим их в фазовый вектор  $W$  системы дифференциальных уравнений возмущенного движения возмущенного РС после схода с направляющей. Здесь  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — координаты центра масс РС в стартовой системе координат  $Oxuz$ , ось  $Ox$  которой направлена горизонтально в сторону стрельбы, ось  $Oy$  — вертикально вверх,  $v$  — модуль вектора  $\nu$  скорости центра масс,  $\theta$  — угол между осью  $Ox$  и проекцией  $\nu$  на плоскость  $Oxu$ ,  $\psi$  — угол между вектором  $\nu$  и плоскостью  $Oxu$ , углы  $\alpha$ ,  $\beta$  вводятся аналогично  $\theta$ ,  $\psi$  и определяют направление продольной оси  $C_\tau^0 x_2$  в полускоростной системе координат  $C_\tau^0 x_0 y_0 z_0$ , полусвязанная система координат  $C_\tau^0 x_1 y_1 z_1$  переводится в  $C_\tau^0 x_2 y_2 z_2$  поворотом на угол  $\gamma$  вокруг оси  $C_\tau^0 x_1$ , через  $p$ ,  $q$ ,  $r$  обозначены проекции вектора абсолютной угловой скорости РС на полусвязанные оси. Предполагается, что начальные возмущения  $\Delta\theta_0$ ,  $\psi_0$ ,  $q_0$ ,  $r_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  в момент схода  $t_0$  и введенные выше возмущения конструктивных параметров и скорости ветра независимы и малы. Если во все время полета скорость проворота  $p$  и коэффициент восстанавливающего момента достаточно велики, а скорость ветра достаточно мала, то при отсутствии резонансных явлений будут малы величины  $\psi$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , а также возмущения этих величин и остальных компонент фазового вектора  $W$ , кроме последней  $\Delta W_{12} = \Delta\gamma$ .

Пренебрегая тогда в уравнениях движения членами второго и более высоких порядков малости, придем к линейной по  $\Delta W_1, \dots, \Delta W_{11}$  неоднородной системе дифференциальных уравнений возмущенного движения возмущенного РС, определяющей  $\Delta W = W - W'$  при  $t \geq t_0$ . Ее коэффициенты зависят от невозмущенного движения невозмущенного РС.

Некоторые из учтенных возмущений конструктивных параметров в эту систему не входят, т.е. они оказываются несущественными в рамках линейной по возмущениям теории. Ветровые, начальные и оставшиеся конструктивные возмущения образуют вектор

$$\begin{aligned} \epsilon &= (\epsilon_1^{(1)}, \epsilon_1^{(2)}, \dots, \epsilon_{11}^{(1)}, \epsilon_{11}^{(2)}, \epsilon_{12}, \dots, \epsilon_{18}) = \\ &= (\Delta u_x, \Delta u_z, \nu_{y*}, \nu_{z*}, \kappa_{y*}, \kappa_{z*}, \gamma_{K*}, z_{K*}, \gamma_{C*}, z_{C*}, \\ &\nu_{y\tau}, \nu_{z\tau}, \kappa_{y\tau}, \kappa_{z\tau}, \gamma_{K\tau}, z_{K\tau}, \gamma_{C\tau}, z_{C\tau}, q_0, r_0, \\ &\alpha_0, \beta_0, \Delta\theta_0, \psi_0, \Delta\mu, \Delta u_e, \Delta m_1, \Delta m_2, \epsilon_x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\Delta u_x, \Delta u_z$  — проекции вектора возмущения скорости ветра на оси  $Ox, Oz$ . Через  $\nu$  и  $\kappa$  с индексами  $y, z$  обозначены проекции на оси  $C_\tau^0 y_2, C_\tau^0 z_2$  вектора  $\nu$  и единичного вектора  $\kappa$ , имеющего направление главной центральной оси инерции с наименьшим моментом инерции. Через  $y, z$  с индексами  $K, C$  обозначены соответствующие координаты точки  $K$  и центра масс в системе  $C_\tau^0 x_2 y_2 z_2$ . Индексами  $*$ ,  $O, \tau$  отмечаются значения величин в моменты времени  $t_*, t_0, \tau$ . Далее  $\Delta \mu$  и  $\Delta u_e$  — возмущения секундного расхода массы ракетного заряда и эффективной скорости истечения,  $\Delta m_1$  и  $\Delta m_2$  — возмущения массы реактивного заряда и массы РС на пассивном участке,  $\epsilon_x$  — возмущение коэффициента формы. В рассматриваемую систему не входит явно и  $\Delta W_7 = \Delta p$ . В результате линеаризованная система уравнений возмущенного движения возмущенного РС имеет вид

$$(\Delta w)' = B(t, a') \Delta w + b^{(1)}(t, a') \epsilon^{(1)} + b^{(2)}(t, a') \epsilon^{(2)} + \sum_{j=2}^9 \sum_{s=1}^2 [b^{(1,s)}(t, a') \cos \gamma + b^{(2,s)}(t, a') \sin \gamma] \epsilon_j^{(s)} + \quad (2.2)$$

$$+ b_p(t, a') \Delta P(t, a', \epsilon) + b_m(t, a') \Delta m(t, a', \epsilon) + b_{18}(t, a') \epsilon_{18}$$

$$\Delta w = \text{col}(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta v, \Delta \theta, \Delta \psi, \Delta q, \Delta r, \Delta \alpha, \Delta \beta)$$

Матрица  $B(t, a')$  непрерывна, векторы-столбцы  $b(t, a')$  имеют разрывы при  $t = \tau$ , функции  $\Delta P(t, a', \epsilon), \Delta m(t, a', \epsilon)$  кусочно-непрерывны по  $t$  и выражаются через  $\epsilon_{14}, \dots, \epsilon_{17}$ , т.е. через  $\Delta \mu, \Delta u_e, \Delta m_1, \Delta m_2$ , зависимость  $\gamma$  от  $t$  определяется уравнением  $\gamma' = p$ . В момент схода  $t_0 = t'_0 + \Delta t_0$  имеем  $\Delta w(t_0) = (0, 0, 0, \Delta v_0, \Delta \theta_0, \psi_0, q_0, r_0, \alpha_0, \beta_0)$ , причем  $\Delta \theta_0, \psi_0, q_0, r_0, \alpha_0, \beta_0$  — произвольные малые возмущения, а  $\Delta v_0$  и  $\Delta t_0$  определяются из уравнений движения по направляющей в виде линейных однородных функций возмущений  $\epsilon_{14}, \dots, \epsilon_{17}$ .

**3. Возмущения координат точки падения.** Если зависимость  $\gamma(t)$  определена, то решение  $\Delta w(t)$  системы (2.2) по известной формуле выражается через фундаментальную матрицу  $\Phi(t)$  соответствующей однородной системы, начальные данные и неоднородные члены. Отсюда следует выражение  $\Delta w$  в момент  $T$  падения на землю. В него входят интегралы по промежутку  $[t_0, T]$  от произведений функций вида  $\Phi(T) \Phi^{-1}(t) b(t)$  на  $\cos \gamma(t), \sin \gamma(t)$ . Компоненты этих вектор-функций аналогичны по смыслу функции  $R(s_a, \sigma(t))$  из § 53 монографии [1]. Поэтому они могут принимать большие значения и быстро изменяться лишь на критическом участке сразу после схода с направляющей, а на остальной части траектории эти функции принимают сравнительно небольшие значения и изменяются медленно. Но тогда при достаточно большой угловой скорости проворота  $p$  именно критический участок дает основной вклад в рассматриваемые интегралы, так как на остальной части траектории подынтегральные функции описывают близкие к гармоническим высокочастотные колебания небольшой амплитуды с медленно изменяющимися частотой и амплитудой, вследствие чего интегралы от этих функций здесь пренебрежимо малы.

Из уравнения  $\gamma' = p' + \Delta p$  следует, что на критическом участке, ввиду его малой продолжительности и условия  $\gamma(t_0) = \gamma'(t'_0) = 0$ , выполнение которого обеспечивается выбором оси  $C_\tau^0 y_2$  системы координат  $C_\tau^0 x_2 y_2 z_2$ , с малой погрешностью будет  $\gamma(t) = \gamma'(t - \Delta t)$ , что позволяет приближенно вычислить рассматриваемые интегралы. Заменяя далее  $t_0, T$  на  $t'_0, T'$  в выражении  $\Delta w(T)$ , приходим в линейном приближении к следующей формуле для возмущений  $\Delta w_k(T)$  координат  $w_1 = x, w_2 = y, w_3 = z$  в момент падения  $T = T' + \Delta T$ :

$$\Delta w_k(T) = \sum_{j=1}^{11} (M_{kj}^{(1)} \epsilon_j^{(1)} + M_{kj}^{(2)} \epsilon_j^{(2)}) + \sum_{j=12}^{18} M_{kj} \epsilon_j \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

Здесь  $\epsilon_j^{(1)}, \epsilon_j^{(2)}$  ( $j = 1, \dots, 11$ ) и  $\epsilon_j$  ( $j = 12, \dots, 18$ ) – произвольные малые возмущения (2.1), а постоянные коэффициенты  $M_{kj}^{(1)}, M_{kj}^{(2)}, M_{kj}$  зависят от вектора условий запуска  $a'$  и находятся с помощью численного интегрирования уравнений невозмущенного движения невозмущенного РС.

Полагая  $k = 2$  в приближенных равенствах

$$w_k(T) = w_k'(T) + \Delta w_k(T) \approx w_k'(T') + f_k(w'(T')) \Delta T + \Delta w_k(T) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.2)$$

где  $f_k$  – правые части первых трех уравнений невозмущенного движения  $(w_k')' = f_k(w')$ , и учитывая, что  $w_2(T) = w_2'(T') = 0$  по определению  $T, T'$ , находим:  $\Delta T = -\Delta w_2(T)/f_2(w'(T'))$ . Подставив это выражение  $\Delta T$  и выражения (3.1) для  $\Delta w_k(T)$  в равенства (3.2), взятые при  $k = 1, 3$ , получаем для возмущений  $\Delta w_k = w_k(T) - w_k'(T')$  координат  $x, z$  точки падения формулу вида (3.1).

В дальнейшем вместо множества всех возможных для РС данного типа невозмущенных условий запуска рассматривается аппроксимирующее его конечное множество векторов  $a'_l$  ( $l = 1, \dots, m$ ). Тогда обозначая через  $N_{klj}^{(1)}, N_{klj}^{(2)}, N_{klj}$  коэффициенты полученной формулы для  $\Delta w_k$ , вычисленные при  $a' = a'_l$ , находим возмущения координат  $x, z$  точки падения при условиях запуска  $a'_l$ :

$$\Delta w_{kl} = \sum_{j=1}^{11} (N_{klj}^{(1)} \epsilon_j^{(1)} + N_{klj}^{(2)} \epsilon_j^{(2)}) + \sum_{j=12}^{18} N_{klj} \epsilon_j \quad (k = 1, 3) \quad (3.3)$$

**4. Прямая детерминированная задача рассеивания (ПДЗР).** Набор возмущений (2.1) состоит из компонент двумерных возмущений  $\epsilon_j = (\epsilon_j^{(1)}, \epsilon_j^{(2)})$  ( $j = 1, \dots, 11$ ) и из одномерных возмущений  $\epsilon_j$  ( $j = 12, \dots, 18$ ). Допуск  $d_j$  на возмущение  $\epsilon_j$  ( $j = 1, \dots, 18$ ) – это наибольшее значение  $|\epsilon_j|$ , встречающееся при изготовлении и запуске РС данного типа. Вектор допусков  $d = (d_1, \dots, d_{18})$  рассматривается как точка евклидова пространства  $E^{18}$ . Величины  $|\epsilon_j| = [(\epsilon_j^{(1)})^2 + (\epsilon_j^{(2)})^2]^{1/2}$  ( $j = 1, \dots, 11$ ) имеют ясный физический смысл:  $|\epsilon_1|$  – модуль возмущения скорости ветра;  $|\epsilon_2|, |\epsilon_3|$  – углы, составленные вектором тяги и первой главной осью инерции с продольной осью в момент  $t_*$ , а  $|\epsilon_6|, |\epsilon_7|$  – в момент  $\tau$ ;  $|\epsilon_4|, |\epsilon_5|$  – расстояния от точки  $K$  и центра масс до продольной оси в момент  $t_*$ , а  $|\epsilon_8|, |\epsilon_9|$  – в момент  $\tau$ ;  $|\epsilon_{10}|$  – модуль поперечной угловой скорости, а  $|\epsilon_{11}|$  – угол атаки в момент  $t_0$ .

ПДЗР состоит в определении величин  $D_k$  ( $k = 1, 3$ ) – максимумов модулей возмущений координат  $x, z$  точки падения при заданных допусках и всевозможных условиях запуска. В соответствии с (3.3) и определением  $d$  максимумы модулей возмущений координат  $x, z$  точки падения при условиях запуска  $a'_l$  равны  $D_{kl} = n_{kl}d$ , где  $n_{kl}$  – вектор с компонентами

$$n_{klj} = \sqrt{(N_{klj}^{(1)})^2 + (N_{klj}^{(2)})^2} \quad (j = 1, \dots, 11), \quad n_{klj} = |N_{klj}| \quad (j = 12, \dots, 18)$$

а  $n_{kl}d$  – скалярное произведение  $n_{kl}$  и  $d$ . Следовательно,  $D_k$  ( $k = 1, 3$ ) – наибольшее из чисел  $D_{kl}$  ( $l = 1, \dots, m$ ).

**5. Постановка обратной детерминированной задачи рассеивания (ОДЗР).** Пусть  $L$  – множество тех пар индексов  $k = 1, 3; l = 1, \dots, m$ , для которых  $n_{kl} \neq 0$ . Возмущение  $\epsilon_j$  несущественно, когда  $n_{klj} = 0$  для всех  $(k, l) \in L$ . ОДЗР заключается в определении вектора допусков, такого, чтобы при всех  $l = 1, \dots, m$  возмущения координат  $x, z$  точки падения не превосходили по модулю заданных величин  $D_k > 0$  ( $k = 1, 3$ ), т.е.

$$n_{kl}d \leq D_k, \quad (k, l) \in L \quad (5.1)$$

Чтобы исключить решения с отрицательными или очень малыми допусками  $d_j$ , реализация которых невозможна или невыгодна, вводятся условия

$$d \geq d_0, d_0 = (d_{01}, \dots, d_{018}) \quad (5.2)$$

где  $d_{0j} \geq 0$  – минимальные реализуемые значения  $d_j$ . Здесь и далее  $d' \geq d''$ , когда  $d'_j \geq d''_j$  ( $j = 1, \dots, 18$ ), а  $d' \geq d''$ , когда  $d'_j \geq d''_j$  ( $j = 1, \dots, 18$ ), причем  $d'_j > d''_j$  хотя бы для одного номера  $j$ .

Если векторы  $d', d''$  удовлетворяют условиям (5.1), (5.2) и часть компонент  $d'$  больше, а часть меньше соответствующих компонент  $d''$ , то при отсутствии дополнительной информации нет оснований предпочесть один из этих векторов другому. Если же  $d' \geq d''$ , то выбор  $d'$  предпочтительнее, так как в этом случае для некоторых возмущений  $\epsilon_j$  допуски больше, чем при выборе  $d''$ , а для остальных возмущений допуски совпадают. В результате приходим к следующей постановке ОДЗР: определить вектор допусков  $d$ , удовлетворяющий неравенствам (5.1), (5.2) и такой, что не существует вектора  $d' \geq d$ , удовлетворяющего этим неравенствам. Таким образом, ОДЗР здесь сводится к определению Парето – оптимальных решений [3] задачи максимизации функции  $f(d) \equiv d$  на полиэдре  $X$  – пересечении неограниченных выпуклых полиэдров  $M, K$ , определенных неравенствами (5.1), (5.2). Полиэдр  $K$  представляет собой положительный координатный ортант  $d \geq 0$ , сдвинутый на  $d_0$ , и, следовательно, является конусом с вершиной  $d_0$ . Часть  $M$ , заключенная в ортанте  $d \geq 0$ , ограничена.

**6. Свойства решений ОДЗР и способ их вычисления.** Назовем  $n$ -гранью полиэдра  $M$  множество  $\Gamma_n(k_1, l_1, \dots, k_n, l_n)$  точек  $d \in M$ , лежащих на пересечении  $n$  гиперплоскостей  $n_{kl}d = D_k$ ,  $(k, l) \in \{(k_1, l_1), \dots, (k_n, l_n)\}$  с попарно различными  $(k_s, l_s) \in L$  ( $s = 1, \dots, n$ ), но не лежащих на пересечении каких-либо  $n + 1$  таких гиперплоскостей. Внутренняя часть  $M$  рассматривается как 0-грань  $\Gamma_0$ . Размерность непустой  $n$ -грани равна  $18 - n$  либо меньше  $18 - n$  (когда некоторые из определяющих ее гиперплоскостей совпадают). Каждая точка  $d \in M$  принадлежит только одной  $n$ -грани  $\Gamma_n(k_1, l_1, \dots, k_n, l_n)$ , которая обозначается через  $\Gamma(d)$ , а через  $L(d)$  обозначается множество  $\{(k_1, l_1), \dots, (k_n, l_n)\}$  пар индексов  $(k, l)$ , для которых  $n_{kl}d = D_k$ . За исключением вершин  $M$ , все непустые  $n$ -грани – открытые множества.

Назовем  $n$ -грань  $\Gamma(d)$  параллельной вектору  $e$ , если каждая точка  $d'$  принадлежит ей вместе с отрезком  $d' + \lambda e$  ( $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ ), параллельным  $e$ . Совокупность номеров  $j$  единичных базисных векторов  $e^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, 18$ ), которым параллельна  $n$ -грань  $\Gamma(d)$ , обозначается через  $J(d)$  и состоит из номеров  $j$  общих нулевых компонент векторов  $n_{kl}$ ,  $(k, l) \in L(d)$ . Так как  $n_{kl} \geq 0$ ,  $(k, l) \in L$ , то множество  $E(d)$  векторов  $e \geq 0$ , которым параллельна  $\Gamma(d)$ , состоит из векторов с компонентами  $e_j = 0$  ( $j \notin J(d)$ ),  $e_j \geq 0$  ( $j \in J(d)$ ), связанными условием  $e_1 + \dots + e_{18} = 1$ . Последнее условие налагается, чтобы обеспечить неколлинеарность любых различных векторов из  $E(d)$ . Так как 0-грань  $\Gamma_0$  параллельна всем  $e^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, 18$ ), то  $E_0$  – это множество векторов  $e$  с компонентами  $e_j \geq 0$ ,  $e_1 + \dots + e_{18} = 1$ .

Пусть  $d \in X$ . Множество точек  $d' \geq d$  ("лучших", чем  $d$ ) является конусом с выколотой вершиной  $d$ , который лежит в  $K$  и состоит из лучей  $d + \lambda e$  ( $\lambda > 0$ ), имеющих направления  $e \geq 0$ . Если  $E(d)$  пусто, то  $d$  – решение ОДЗР, поскольку все такие лучи лежат вне  $M$ . Действительно, в этом случае для любого  $e \geq 0$  найдется вектор  $n_{kl}$ ,  $(k, l) \in L(d)$ , для которого  $n_{kl}e > 0$  и, следовательно,  $n_{kl}(d + \lambda e) = D_k + \lambda n_{kl}e > D_k$ . Предположим, что  $E(d)$  непусто. Если при этом вектор  $e \geq 0$  не принадлежит  $E(d)$ , то луч  $d + \lambda e$  ( $\lambda > 0$ ) снова не лежит в  $M$ . Если же  $e \in E(d)$ , то луч  $d + \lambda e$  ( $\lambda > 0$ ) пересекает границу  $\Gamma(d)$  при  $\lambda > 0$ , равном

$$\lambda(d, e) = \min_{\substack{(k, l) \in L \\ (k, l) \in L(d)}} \lambda_{kl}(d, e); \quad \lambda_{kl}(d, e) = \begin{cases} (D_k - n_{kl}d)/n_{kl}e & (n_{kl}e > 0) \\ \infty & (n_{kl}e = 0) \end{cases}$$

При  $\lambda > \lambda(d, e)$  точки этого луча находятся вне  $M$ , а при  $0 < \lambda < \lambda(d, e)$  – в  $\Gamma(d)$ , но

тогда все они "хуже" точки  $d + \lambda (d, e) e$ . Отсюда следуют такие два утверждения.

1°. Множество  $P$  решений ОДЗР непусто только при условии  $d_0 \in M$  (т.е.  $n_{kl}d_0 \leq D_k$ ,  $(k, l) \in L$ ) и является пересечением конуса  $K$  со всеми  $n$ -гранями, непараллельными ни одному  $e^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, 18$ ).

2°. Всякое решение ОДЗР может быть вычислено как тот член последовательности  $d_{(0)}, d_{(1)}, \dots$ , определенной равенствами

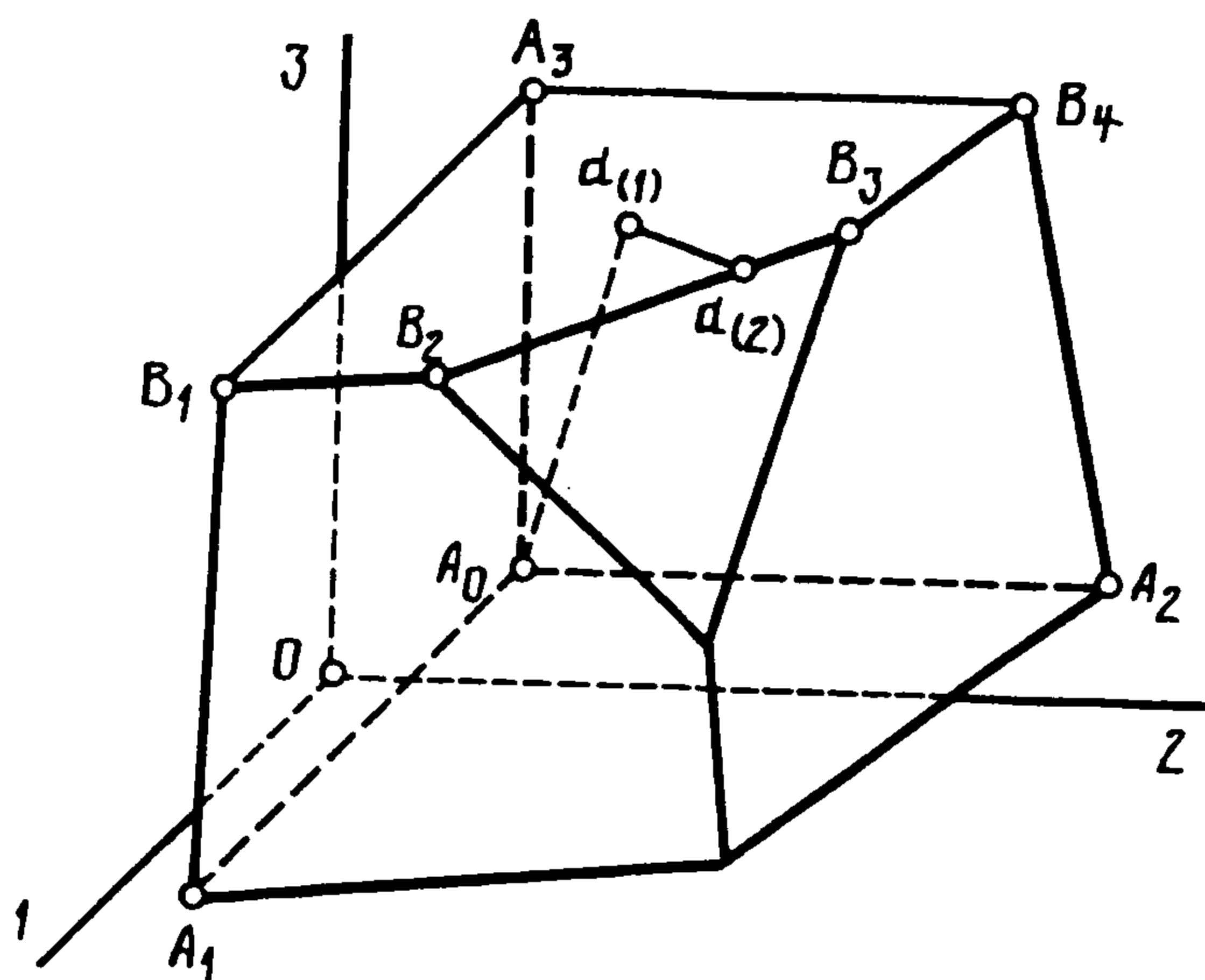
$$d_{(0)} = d_0; d_{(s+1)} = d_{(s)} + \lambda (d_{(s)}, e_{(s)}) e_{(s)}, \quad e_{(s)} \in E(d_{(s)}) \quad (6.1)$$

для которого  $E(d_{(s)})$  пусто. Номер  $s^*$  этого члена не превосходит размерности  $\Gamma(d_0)$ .

Полагая  $\lambda (d_0, e^{(i)}) = 0$  для  $e^{(i)} \notin E(d_0)$ , рассмотрим точку  $d^{(0i)} = d_0 + \lambda (d_0, e^{(i)}) e^{(i)}$  пересечения с границей  $\Gamma(d_0)$  луча  $d_0 + \lambda e^{(i)}$  ( $\lambda \geq 0$ ). Ее  $i$ -я координата  $d_i^0 = d_{0i} + \lambda (d_0, e^{(i)})$ , а остальные равны  $d_{0j}$  ( $j \neq i$ ). Предположив существование вектора  $d \in X$ , у которого  $d_i > d_i^0$ , представим его в виде суммы  $d = d' + d''$ , где  $d' = d_0 + \lambda' e^{(i)}$ , а  $d''$  ортогонален лучу  $d_0 + \lambda e^{(i)}$  ( $\lambda \geq 0$ ). Так как  $d_i' = d_i > d_i^0$ , то  $\lambda' > \lambda (d_0, e^{(i)})$  и, следовательно,  $d' \notin M$ , а так как  $d'' \geq 0$ , то и  $d' + d'' \notin M$ . Поэтому справедливо такое утверждение.

3°. Максимальное значение допуска  $d_i$  ( $i = 1, \dots, 18$ ) достигается при минимальных значениях  $d_{0j}$  ( $j \neq i$ ) остальных допусков и равно  $d_i^0 = d_{0i} + \lambda (d_0, e^{(i)})$ .

Пусть, например, граница  $M$  в трехмерном случае образована четырьмя плоскостями, одна из которых параллельна  $e^{(1)}, e^{(2)}$ , а точка  $d_0 = A_0$  лежит внутри  $M$ , так что  $X$  представляет собой изображенный на фигуре семигранник. Тогда множество решений  $P$  — поверхность, образованная тремя многоугольниками, выделенными жирными линиями. Максимальный допуск  $d_i^0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) равен  $i$ -й координате точки  $d^{(0i)} = A_i$ . Всякое решение  $d \in P$  является не более чем вторым членом  $d_{(2)}$  последовательности (6.1). Если  $d_0 = A_3$ , то  $P$  — ломаная  $B_1, \dots, B_4$ .



Компоненты  $e_{(s)j} \geq 0, j \in J(d_{(s)})$ , вектора  $e_{(s)} \in E(d_{(s)})$  в сумме равны единице и поэтому  $0 \leq e_{(s)j} \leq 1$ . Чем ближе к единице выбирается  $e_{(s)j}$  в (6.1), тем больше приращение допуска  $d_j$  при переходе от  $d_{(s)}$  к  $d_{(s+1)}$  и тем меньше приращения остальных допусков. Поэтому предварительно находятся максимальные допуски  $d_j^0$  ( $j = 1, \dots, 18$ ), и наибольшими выбираются компоненты  $e_{(0)}$ , соответствующие трудно реализуемым  $d_j^0$ : Затем вычисляется  $d_{(1)}$ . Человек, решающий ОДЗР, оценивает вектор допусков  $d_{(1)}$  согласно своим представлениям о степени трудности его реализации и другим неформализованным критериям. Если вектор  $d_{(1)}$  "удовлетворительный", то он либо принимается в качестве решения (при  $J(d_{(1)})$  пустом), либо "улучшается" по формулам (6.1) (при  $J(d_{(1)})$  непустом). В противном случае вектор  $e_{(0)}$  корректируется.

Если требуется найти решение ОДЗР, для которого часть допусков принимает заранее заданные значения, то для вычисления остальных можно пользоваться описанным способом, рассматривая задаваемые допуски  $d_j$  как  $d_{0j}$  и полагая  $e_{(s)j} = 0$  для соответствующих им номеров  $j$ .

**7. Прямая вероятностная задача рассеивания (ПВЗР).** Предположим, что каждое из возмущений (2.1) является случайной величиной, не зависящей от остальных и распределенной по нормальному закону с центром 0, причем каждая пара возмущений  $\epsilon_j^{(1)}$ ,  $\epsilon_j^{(2)}$  ( $j = 1, \dots, 11$ ) распределена по круговому нормальному закону. Тогда распределение возмущений (2.1) полностью характеризуется вектором среднеквадратичных отклонений  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{18})$  или вектором дисперсий  $d = (d_1, \dots, d_{18})$ , где  $d_j = \sigma_j^2$  при  $j = 1, \dots, 11$  — это дисперсия  $\epsilon_j^{(1)}$  и  $\epsilon_j^{(2)}$ , а при  $j = 12, \dots, 18$  — дисперсия  $\epsilon_j$ . Из формулы (3.3) в таком случае следует, что для каждого  $l = 1, \dots, m$  любая линейная комбинация величин  $\Delta w_{1l}$ ,  $\Delta w_{3l}$  с неравными одновременно нулю постоянными коэффициентами имеет одномерное нормальное распределение. Это означает что возмущения  $\Delta w_{1l}$ ,  $\Delta w_{3l}$  координат  $x$ ,  $z$  точки падения при фиксированном  $a_l'$  распределены по двумерному нормальному закону с плотностью вероятности

$$p(\Delta w_{1l}, \Delta w_{3l}) = (2\pi \Sigma_{1l} \Sigma_{3l} \sqrt{1 - \rho_l^2})^{-1} \exp \left[ -(\Delta w_{1l}^2 / \Sigma_{1l}^2 - 2\rho_l \Delta w_{1l} \Delta w_{3l} / \Sigma_{1l} \Sigma_{3l} + \Delta w_{3l}^2 / \Sigma_{3l}^2) / 2(1 - \rho_l^2) \right]$$

где  $\Sigma_{kl} = \sqrt{D_{kl}}$  — среднеквадратичные отклонения величин  $\Delta w_{kl}$  ( $k = 1, 3$ ),  $\rho_l = C_l / \Sigma_{1l} \Sigma_{3l}$  — коэффициент корреляции между ними. Дисперсии  $D_{kl}$  этих величин и их ковариация  $C_l$  в соответствии с (3.3) находятся по формулам

$$D_{kl} = n_{kl} d, \quad C_l = n_l d \quad (7.1)$$

где  $n_{kl}$ ,  $n_l$  — векторы с компонентами

$$n_{klj} = \begin{cases} (N_{klj}^{(1)})^2 + (N_{klj}^{(2)})^2 \\ N_{klj}^2 \end{cases}, \quad n_{lj} = \begin{cases} N_{1lj}^{(1)} N_{3lj}^{(1)} + N_{1lj}^{(2)} N_{3lj}^{(2)}, & j = 1, \dots, 11 \\ N_{1lj} N_{3lj}, & j = 12, \dots, 18 \end{cases}$$

Вместо среднеквадратичных рассматривают также вероятные отклонения  $E_{kl} \approx 0,6745 \Sigma_{kl}$  возмущений  $\Delta w_{kl}$  ( $k = 1, 3$ ).

Если в точке падения перейти от координат  $\Delta w_{3l}$ ,  $\Delta w_{1l}$  к правой системе координат, оси которой  $\Delta w_{3l}^0$ ,  $\Delta w_{1l}^0$  направлены соответственно вдоль малой и большой полуосей эллипса равной вероятности, то коэффициент корреляции между  $\Delta w_{1l}^0$ ,  $\Delta w_{3l}^0$  обратится в нуль, а их дисперсии определяются по формуле

$$D_{kl}^0 = \frac{1}{2} [D_{1l} + D_{3l} - (-1)^{(k+1)/2} \sqrt{(D_{1l} - D_{3l})^2 + 4C_l^2}] \quad (k = 1, 3)$$

Угол  $\varphi_l$ , при повороте на который оси  $\Delta w_{3l}$ ,  $\Delta w_{1l}$  переходят в  $\Delta w_{3l}^0$ ,  $\Delta w_{1l}^0$ , с точностью до  $\pi s$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) равен  $\varphi_{1l}$  при  $D_{1l} > D_{3l}$ ,  $\varphi_{2l}$  при  $D_{1l} < D_{3l}$ ,  $\varphi_{3l}$  при  $D_{1l} = D_{3l}$ , где  $\varphi_{1l} = 0,5 \arctg 2C_l / (D_{3l} - D_{1l})$ ,  $\varphi_{2l} = \varphi_{1l} + \pi/2$ ,  $\varphi_{3l} = -0,25 \pi \operatorname{sgn} C_l$  ( $C_l \neq 0$ ).

Таким образом, рассеивание РС при фиксированном  $a_l'$  целиком характеризуется одной из пар величин  $D_{kl}$ ,  $D_{kl}^0$ ,  $\Sigma_{kl}$ ,  $\Sigma_{kl}^0$ ,  $E_{kl}$ ,  $E_{kl}^0$  ( $k = 1, 3$ ) и одной из величин  $C_l$ ,  $\rho_l$ ,  $\varphi_l$ . Чтобы получить достаточно полное представление о рассеивании РС определенного типа, следует найти максимумы выбранных вероятностных характеристик рассеивания по всем  $l = 1, \dots, m$ .

**8. Обратная вероятностная задача рассеивания (ОВЗР).** Учитывая, что в качестве основных характеристик рассеивания РС часто принимаются максимальные по всем

$j$	РС-1			РС-2			$\Delta_j$ , ед. измер.
	$e_j$	$\Delta_j$	$\Delta_j^0$	$e_j$	$\Delta_j$	$\Delta_j^0$	
1	0,0153	0,52	3,6	0,0023	0,59	10	м/с
2	0,2703	0,074	0,12	0,2465	0,037	0,063	град
4,5	0,134	0,35	0,83	0,15	0,2	0,43	см
6	0,0015	0,087	1,9	0,0011	0,043	1,1	град
8,9	0,0011	0,51	13	0,001	0,28	7,6	см
10	0,038	0,51	2,2	0,055	0,34	1,2	град/с
11	0,13	0,5	1,2	0,098	0,35	0,95	град
12	0,0035	0,062	0,89	0,0034	0,055	0,8	град
13	0,0042	0,056	0,74	0,0047	0,058	0,71	град
14	0,19	0,19	0,37	0,19	0,16	0,3	кг/с
15	0,05	5,2	20	0,059	5,0	17	м/с
16	0,01	0,58	5,0	0,014	0,58	4,1	кг
17	0,005	0,57	6,9	0,007	0,56	5,6	кг
18	0,012	0,0038	0,03	0,017	0,0042	0,027	—

условиям запуска среднеквадратичные  $\Sigma_1, \Sigma_3$  или вероятные  $E_1 = B_d, E_3 = B_b$  отклонения координат точки падения по дальности и боку, рассмотрим ОВЗР как задачу определения вектора  $d$  дисперсий возмущений (2.1) такого, чтобы при всех  $l = 1, \dots, m$  среднеквадратичные или вероятные отклонения по дальности и боку не превосходили  $\Sigma_k$  или  $E_k$  ( $k = 1, 3$ ). Тогда, согласно (7.1), имеем  $n_{kl}d \leq D_k, (k, l) \in L$ . Здесь  $D_k = \Sigma_k^2 \approx (E_k/0,6745)^2$  — заданные величины,  $L$  — множество пар индексов  $k = 1, 3; l = 1, \dots, m$ , для которых  $n_{kl} \neq 0$ .

Чтобы исключить решения с отрицательными или чрезмерно малыми дисперсиями  $d_j$ , вводится условие  $d \geq d_0$ , где  $d_0 \geq 0$  — вектор минимальных дисперсий. Следовательно, вектор  $d$  удовлетворяет условиям, отличающимся от (5.1), (5.2) лишь определением  $n_{kl}$ . Среди таких векторов  $d$  решениями ОВЗР считаются те, для которых не существует векторов  $d' \geq d$ . Тогда для ОВЗР справедливы утверждения, аналогичные 1°–3°.

Вместо  $d_j$  или  $\sigma_j$  удобно использовать квантили  $|\epsilon_j|_{0,997}$ , которые можно назвать допусками  $\Delta_j$  при 0,3% брака. Учитывая, что для двумерных возмущений величины  $|\epsilon_j|^2/\sigma_j^2$  имеют распределение  $\chi^2(2)$ , имеем  $\Delta_j \approx 3,6\sigma_j$  ( $j = 1, \dots, 11$ ),  $\Delta_j \approx 3\sigma_j$  ( $j = 12, \dots, 18$ ).

*Пример.* Снаряд РС-2 с дальностью полета 100 км отличается от РС-1 лишь конструкцией оперения, что приводит к примерно двойному уменьшению коэффициента восстанавливающего момента и некоторому изменению других характеристик. В таблице приведены выбранные после ряда проб значения  $e_j = e_{(0)j}$  и соответствующие им  $\Delta_j = \Delta_{(1)j}$ , вычисленные на первом шаге процесса (6.1) при  $d_0 = 0, B_d = B_b = 500$  м, а также  $\Delta_j^0$ . Возмущения  $e_j$  ( $j = 3, 7$ ) оказались несущественными, а  $\Delta_j$  ( $j = 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11$ ) для РС-2 почти вдвое меньше, чем для РС-1. Если взять для РС-2 допуски  $\Delta_j$  для РС-1, то, как видно из решения ПВЗР, у него  $B_d, B_b$  будут в 1,8 раза больше, чем у РС-1. Но если при допусках РС-1 увеличить в 2,1 раза скорость проворота РС-2, то  $B_d = B_b = 550$  м.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф.Р., Левин Л.М. Теория полета неуправляемых ракет. М.: Физматгиз, 1959. 360 с.
2. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика. М.: Машиностроение, 1972. 583 с.
3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 254 с.

Донецк

Поступила в редакцию  
12.V.1991