Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 6, 1992

УДК 531.36 + 62.50

© 1992 г. В.Ю. Тертычный

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ И АДАПТИВНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Предлагается метод программной стабилизации неголономных динамических систем на основе сведения исходной задачи к условной задаче адаптивного управления с неизвестными возмущениями, где роль возмущений играют реакции линейных (не обязательно идеальных) неголономных связей. Построены эффективные алгоритмы упраления и оценивания дрейфующих параметров, обеспечивающие стабилизацию системы по экспоненциальному закону. Метод может быть распространен и на неголономные системы, внутренние параметры которых заранее неизвестны либо испытывают неизвестный ограниченный дрейф во времени.

Ранее рассматривалась стабилизация объектов управления при наличии голономных связей [1–4], а также стабилизация их адаптивных [5–9] и стохастических вариантов [5, 10, 11]. Вызывают интерес детерминированные системы с переменной структурой и системы, функционирующие в условиях неизвестного параметрического дрейфа. В случае, когда модель дрейфа известна, удается схему построения адаптивной обратной связи свести к стандартным процедурам рекуррентного оценивания. Если же модель дрейфа параметров неизвестна, то [7, 12] выбор системы управления осуществляется при помощи введения фильтрующих устройств. Отметим также работы [13, 14] по стабилизации системы с последействием в условиях априорной неопределенности при помощи построения ПИ- и ПИД-регуляторов.

1. Постановка задачи. Рассматривается неголономная система, динамика которой описывается в обобщенных координатах уравнениями с неопределенными множителями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = u_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot q_i} \tag{1.1}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(q)\dot q_i \dot q_j, \quad q(0) = q_0, \quad \dot q(0) = \dot q_0 \tag{1.2}$$

где $q(t),\ u(t) \in R^n$ – векторы обобщенных координат и обобщенных управляющих сил соответственно, λ_k – неопределенные множители в выражении для сил реакций связей; предполагается, что в системе управления измерению в любой момент времени подлежат векторы $q(t)$ и $\dot q(t)$, T – кинетическая энергия, A_{ij} – элементы симметрической положительно определенной квадратной матрицы $A(q)$. На систему наложено r неголономных линейных относительно $\dot q_i$ связей первого порядка, представляющих в общем случае гладкие гиперповерхности вида

$$f_k(q_i, \dot q_i, t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{1.3}$$

причем выполняются ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \dot q_i}\delta q_i = 0, \quad \operatorname{rank}\left\|\frac{\partial f_k}{\partial \dot q_i}\right\| = r \tag{1.4}$$

В соотношении (1.4) первая запись представляет условие Четаева [15], накладываемое на возможные виртуальные перемещения δq_i (очевидно, что для линейных неголономных связей это условие всегда выполняется), вторая – условие независимости связей (1.3), позволяющее выразить r некоторых зависимых скоростей через s независимых ($s = n - r$ – число степеней свободы) [16]

$$f_k(q_i, q_i^{\cdot}, t) = q_{s+k}^{\cdot} - \varphi_k(q_1, \ldots, q_n, \ q_1^{\cdot}, \ldots, q_s^{\cdot}, \ t) = 0 \tag{1.5}$$

В дальнейшем будем пользоваться также обозначениями для независимых координат (скоростей) $q_\alpha(t)(q_\alpha^{\cdot}(t)) \in R^s$ и зависимых – $q_\beta(t)(q_\beta^{\cdot}(t)) \in R^r$, где $q(t) = (q_\alpha(t), q_\beta(t))$. Тогда (1.5) можно записать в векторном виде

$$q_\beta^{\cdot} = q_\beta^{\cdot}(q, q_\alpha^{\cdot}, \ t) \tag{1.6}$$

Подставляя выражение (1.2) в уравнения (1.1), получим векторно-матричную форму уравнений движения

$$A(q)q^{\cdot\cdot} + B(q, q^{\cdot}) = u + D(q)\lambda \tag{1.7}$$

где $\lambda(t) \in R^r$ – вектор неопределенных множителей, $D(q)$ – структурная $(n \times r)$-матрица, элементы которой $\partial f_k/\partial q_i^{\cdot}$ ($k = 1, 2, \ldots, r$; $i = 1, 2, \ldots, n$). Будем считать, не умаляя общности, что в уравнения связей время явно не входит. Воспользуемся далее соотношением (1.6) для подстановки выражения $q_\beta^{\cdot\cdot}$ в уравнение (1.7).

$$A(q) \left\| \begin{matrix} q_\alpha^{\cdot\cdot} \\ F_1(q, q^{\cdot})q^{\cdot} + F_2(q)q_\alpha^{\cdot\cdot} \end{matrix} \right\| + B(q, q^{\cdot}) = u + D(q)\lambda$$

$F_1(q, q^{\cdot})$ – $(r \times n)$-матрица с элементами $\partial q_\beta^{\cdot}/\partial q_i^{\cdot}$, $F_2(q)$ – $(r \times s)$-матрица с элементами $\partial q_\beta^{\cdot}/\partial q_\alpha^{\cdot}$, $s = n - r$. Выделяя в этом уравнении вектор независимых ускорений $q_\alpha^{\cdot\cdot}$, получим

$$\begin{aligned} &S_1(q)q_\alpha^{\cdot\cdot} + S_2(q, q^{\cdot}) = u + D(q)\lambda \\ &S_1(q) = A_1(q) + A_2(q)F_2(q) \\ &S_2(q, q^{\cdot}) = B(q, q^{\cdot}) + A_2(q)F_1(q, q^{\cdot})q^{\cdot} \end{aligned} \tag{1.8}$$

где $S_1(q)$ – $(n \times s)$-матрица, $S_2(q, q^{\cdot})$ – $(n \times 1)$-вектор, $A(q) = \|A_1(q) | A_2(q)\|$, $A_1(q)$ – $(n \times s)$-матрица, $A_2(q)$ – $(n \times r)$-матрица.

Особенностью n уравнений (1.8) является то, что оно содержит $n \times r$ неизвестных. Поскольку r уравнений связей послужили для выделения независимых ускорений, воспользоваться вновь уравнениями (1.3), (1.6) для определения всех неизвестных величин не представляется возможным. Тем самым в уравнение (1.8) входят неизвестные детерминированные возмущения $v(q, t) = D(q)\lambda(t)$, где $\lambda(t)$ играет роль неизвестного дрейфующего во времени векторного параметра, а сама система управления приобретает адаптивный характер. Относительно возмущений $v(t)$ предполагаем равномерную ограниченность ($\sup_{0 \leq t \leq t_1} \|v(t)\| < C_v$) и, кроме того, будем считать, что постоянная C_v, ограничивающая евклидову норму на конечном промежутке времени, также неизвестна.

Требуется в (1.1) сформировать:

1) адаптивное управление по принципу обратной связи в функции измеряемых аргументов

$$u = u(q(t), \ q^{\cdot}(t), \qquad q_{\alpha p}(\cdot), \ \ v_*(t)), \quad \|u\| < C_u$$

где C_u – заданная положительная постоянная, $v_*(t) \in R^n$ – вектор оцениваемых параметров, $q_{\alpha p}(t)$ – программное движение системы относительно независимых координат, заданное на всем временном конечном интервале $[0, t_1]$ (момент t_1 не фиксирован);

2) алгоритм для нахождения оценок $v_*(t)$

$$v_*^{\cdot} = v_*^{\cdot}(q(t),\ q^{\cdot}(t),\ q_{\alpha p}(\cdot),\quad v_*(t))$$

при которых с течением времени выполняются целевые условия

$$\| q_\alpha(t) - q_{\alpha p}(t) \| < \delta_1, \qquad \| v_*(t) - v(t) \| < \delta_2 \tag{1.9}$$

где $\delta_1, \delta_2 > 0$ – заданная точность стабилизации.

Очевидно, что выполнение второго неравенства в (1.9) обеспечивает отслеживание наложенных на систему связей с некоторой точностью $\delta_3(\delta_2)$; оценки v_* и λ_* связаны между собой алгебраическими соотношениями

$$v_* = D\lambda_*, \quad \lambda_* = D^+ v_*, \quad D^+ = (D'D)^{-1}D', \quad \operatorname{rank} D = r$$

где штрих означает транспонирование.

2. Адаптивная фильтрация. В уравнении (1.8) зададим следующий закон управления:

$$\begin{gathered} u = S_2(q, q^{\cdot}) + S_1(q) q_* - v_* \\ q_* = q_{\alpha p}^{\cdot\cdot} - \beta_1(q_\alpha^{\cdot} - q_{\alpha p}^{\cdot}) - \beta_2(q_\alpha - q_{\alpha p}) \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\beta_1, \beta_2 > 0$ – заданные числа. В качестве алгоритма оценивания для выбора v_* возьмем дифференциальное уравнение первого порядка

$$v_*^{\cdot} - v^{\cdot} + \gamma(v_* - v) + v^{\cdot} e^{-\gamma t} = 0 \tag{2.2}$$

($\gamma > 0$ – заданное число) с решением

$$v_*(t) = (1 - e^{-\gamma t}) v(t) + e^{-\gamma t} v_*(0)$$

обеспечивающим на конечном промежутке времени второе целевое условие (1.9). При подстановке выражения (2.1) в уравнение движения (1.8) будем иметь

$$S_1(q)(q_\alpha^{\cdot\cdot} - q_*) = v - v_* \tag{2.3}$$

Отсюда при учете ограниченности $S_1(q)$ и экспоненциального убывания нормы $\| v - v_* \|$ получим уравнения

$$q_{\alpha i}^{\cdot\cdot} - q_{\alpha p i}^{\cdot\cdot} + \beta_1(q_{\alpha i}^{\cdot} - q_{\alpha p i}^{\cdot}) + \beta_2(q_{\alpha i} - q_{\alpha p i}) = \psi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

обеспечивающие, очевидно, выполнение первого целевого условия (1.9) при стремлении скалярной функции $\psi_i(t)$ к нулю по экспоненциальному закону.

Доопределим алгоритм оценивания (2.2). С этой целью разрешим уравнение (2.3) относительно вектора v

$$v = v_* + G, \qquad G = S_1(q_\alpha^{\cdot\cdot} - q_*) \tag{2.4}$$

и подставим $v, v^{\cdot}$ из (2.4) в сходящийся алгоритм (2.2) для нахождения оценок v_*

$$(e^{-\gamma t} - 1) G^{\cdot} - \gamma G + e^{-\gamma t} v_*^{\cdot} = 0. \tag{2.5}$$

Обратим внимание на то, что коэффициенты уравнения (2.5) зависят от q, $q^{\cdot}$, $q^{\cdot\cdot}$, $q^{\cdot\cdot\cdot}$, между тем как возможности системы управления ограничены измерением лишь значений q и $q^{\cdot}$. Поэтому проинтегрируем уравнение (2.4) дважды с весом $e^{-\kappa(t-s)}$ ($\kappa > 0$) на промежутке $[0, t]$.

Введем обозначения

$$\langle v \rangle_{-\kappa} = \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} v(s)\, ds, \quad [v]_{-\kappa} = \int_0^t \int_0^s e^{-\kappa(t-r)} v(r)\, dr\, ds$$

Вместо алгоритма оценивания (2.2) возьмем его сглаженный аналог

$$V_*^{\cdot} - V^{\cdot} + \gamma(V_* - V) + V^{\cdot} e^{-\gamma t} = 0 \tag{2.6}$$

где $V(t)$, $V_*(t)$ – выходы фильтрующих устройств

$$V^{\cdot} + \kappa V = \nu(\kappa - \xi)e^{-\xi t} + \langle v\rangle_{-\kappa} \tag{2.7}$$

с решением

$$V(t) = \nu e^{-\xi t} + [v]_{-\kappa}, \qquad V(0) = \nu$$

$$V^{\cdot}(t) = -\nu\xi e^{-\xi t} + \langle v\rangle_{-\kappa} - \kappa[v]_{-\kappa}$$

а также

$$V_*^{\cdot} + \kappa V_* = \nu_*(\kappa - \xi)e^{-\xi t} + \langle v_*\rangle_{-\kappa} \tag{2.8}$$

с соответствующим решением, где $V_*(0) = \nu_*$; ξ, $\kappa > 0$, ν, ν_* – заданные числа и векторы. Подставляя решения фильтров (2.7) и (2.8) в (2.6), получим следующую запись алгоритма оценивания:

$$\langle v_* - v\rangle_{-\kappa} = (\nu_* - \nu)(\xi - \gamma)e^{-\xi t} - (\gamma - \kappa)[v_* - v]_{-\kappa} + \nu\xi e^{-(\xi+\gamma)t} -$$

$$- e^{-\gamma t}\langle v\rangle_{-\kappa} + \kappa e^{-\gamma t}[v]_{-\kappa} \tag{2.9}$$

Покажем, что при $\sigma = \gamma - \kappa > 0$, $\tau = \xi - \kappa > 0$ алгоритм (2.9) сходящийся. В обозначениях

$$\Delta(t) = v_*(t) - v(t), \quad x(t) = \Delta(t)e^{\kappa t}, \quad y(t) = \int_0^t x(s)ds, \quad F(t) = \int_0^t y(s)ds,$$

$$P(t) = (\nu_* - \nu)(\xi - \gamma)e^{-\xi t} + \nu\xi e^{-(\xi+\gamma)t} - e^{-\gamma t}\langle v\rangle_{-\kappa} + \kappa e^{-\gamma t}[v]_{-\kappa}$$

получим решение уравнения (2.9) : $F^{\cdot}(t) = -\sigma F(t) + e^{\kappa t}P(t)$ в виде

$$F(t) = \int_0^t y(s)ds = \nu_*(e^{-\sigma t} - e^{-\tau t}) + \nu e^{-\tau t}(1 - e^{-\gamma t}) - e^{-\sigma t}[v]_{-\kappa} + \kappa e^{-\sigma t}\int_0^t [v]_{-\kappa} ds$$

откуда после двойного дифференцирования по t, умножения полученного выражения на $e^{-\kappa t}$, обнаружим экспоненциальное убывание нормы $\| v_*(t) - v(t)\|$ с ростом t, влекущее в свою очередь обеспечение первого целевого условия (1.9). Если теперь подставить проинтегрированное дважды с весом $e^{-\kappa(t-s)}$ уравнение (2.4) в (2.9), то получим сходящийся алгоритм для формирования оценок v_*

$$\langle(e^{-\gamma t} - 1)G\rangle_{-\kappa} - (\sigma - \kappa e^{-\gamma t})[G]_{-\kappa} = (\nu_* - \nu)(\xi - \gamma)e^{-\xi t} +$$

$$+ \nu\xi e^{-(\xi+\gamma)t} - e^{-\gamma t}\langle v_*\rangle_{-\kappa} + \kappa e^{-\gamma t}[v_*]_{-\kappa} \tag{2.10}$$

который на конечном промежутке времени гарантирует выполнение целевых неравенств.

3. Рекуррентное оценивание. Преобразуем уравнение (2.10) к виду, при котором алгоритм будет зависеть только от q, $q^{\cdot}$, пользуясь, естественно, тем, что в G вектор $q_\alpha^{\cdot\cdot}$ входит линейно. Опуская элементарные преобразования, связанные с интегрированием по частям, получим в новых обозначениях

$$\langle v_*\rangle_{-\kappa} - \kappa[v_*]_{-\kappa} = \Phi(t)e^{-\kappa t} \tag{3.1}$$

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t), \quad \Phi_1(t) = (e^{\gamma t} - 1)(\varphi(t) - a - \int_0^t \psi(s)ds) +$$

$$+ (\sigma e^{\gamma t} - \kappa)\int_0^t(\varphi(s) - a - \int_0^s \psi(r)dr)ds, \quad \varphi(t) = S_1(t)q_\alpha^{\cdot}(t)e^{\kappa t},$$

$$\psi(t) = \kappa\varphi(t) + (S_1(t)q_\alpha^{\cdot}(t) - S_1(t)q_*(t))e^{\kappa t}, \quad a = S_1(0)q_\alpha^{\cdot}(0),$$

$$\Phi_2(t) = (\nu_* - \nu)(\xi - \gamma)e^{(\gamma-\tau)t} + \nu\xi e^{-\tau t}$$

Решая дифференциальное уравнение (3.1) относительно $e^{\kappa t}[v_*]_{-\kappa}$, получим линейное интегральное уравнение Вольтерры первого рода

$$\langle v_* \rangle_{-\kappa} = \Psi(t)$$
$$\Psi(t) = (\kappa\langle\Phi\rangle_\kappa + \Phi(t))e^{-\kappa t} \tag{3.2}$$

Особенность уравнения (3.2) заключается в том, что его нельзя дифференцировать: правая часть $\Psi(t)$ зависит от $q, \dot{q}$, поэтому в данной ситуации следует, видимо, воспользоваться каким-либо приближенным методом [17, 18]: моментов, замены ядра, полиномиальным, усреднения коэффициентов, осциллирующих функций и т.д. Основное требование для равномерной сходимости рекуррентных алгоритмов на промежутке задания будет заключаться в непрерывной дифференцируемости ядер по всем аргументам. Если ограничиваться случаем аппроксимации при помощи квадратурной формулы численного интегрирования по узлам $t_0, t_1, \ldots, t_N$, то рекуррентная система уравнений для определения оценок v_* запишется в виде

$$\sum_{k=0}^{N} C_k e^{\kappa t_k} v_*(t_k) = \Psi(t_N)e^{\kappa t_N} \tag{3.3}$$

где C_k – коэффициенты соответствующей квадратурной формулы. Система уравнений (3.3) может служить наиболее эффективным средством замены интегрального уравнения (3.2) [17, 18].

4. Задача Чаплыгина – Каратеодори. Рассмотрим в качестве иллюстрации предложенного метода выбора адаптивной системы управления модельное неголономное движение твердого тела по неподвижной горизонтальной плоскости Ω с опорой на три точки, две из которых без трения скользят по плоскости, а третья есть точка опоры короткого острого полоза (лезвия), жестко связанного с телом [19]. Считается, что точка опоры полоза K может свободно перемещаться по плоскости Ω вдоль полоза, но не в поперечном к нему направлении.

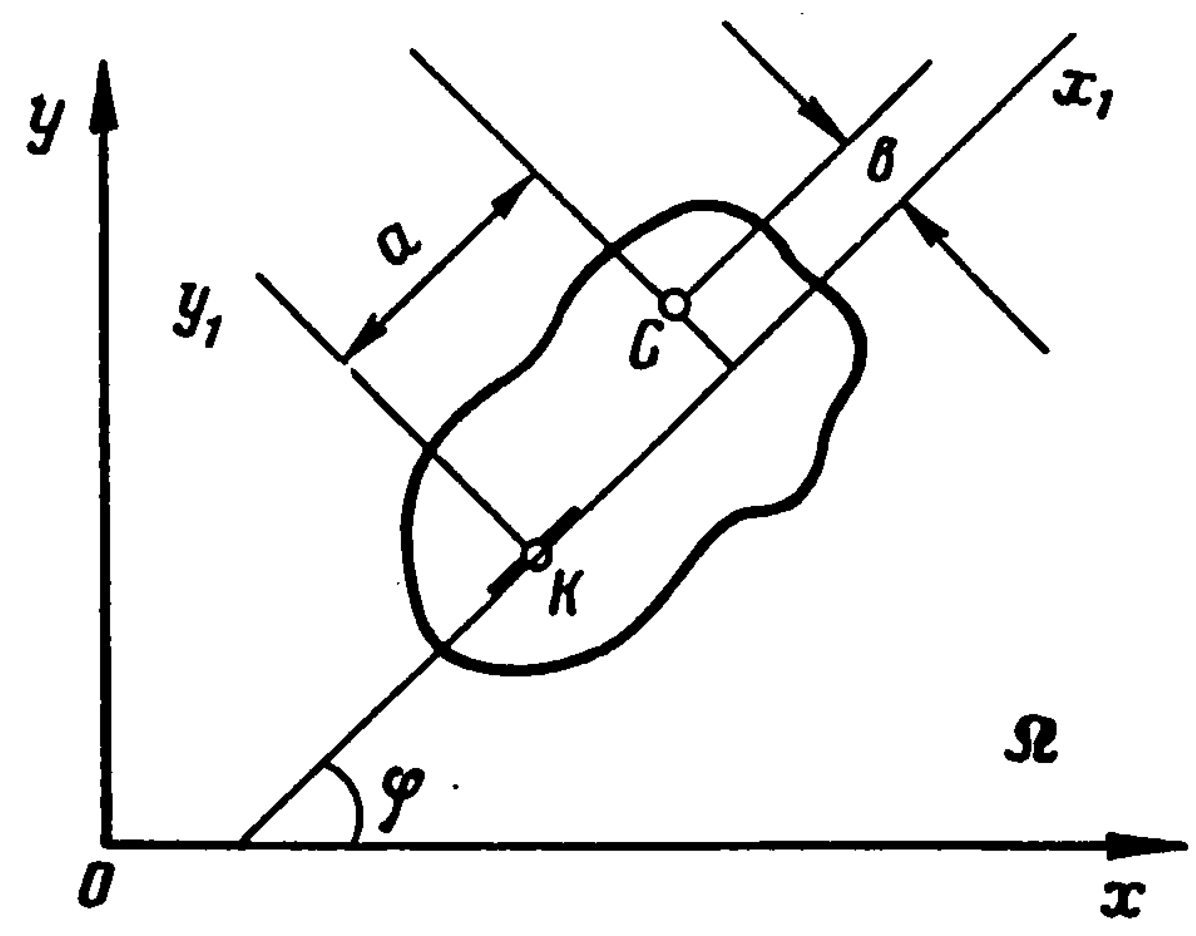
Введем две системы координат (фигура): неподвижную Oxy и подвижную Kx_1y_1, неизменно связанную с телом. Ось Kx_1 направлена вдоль полоза, ось Ky_1 ей перпендикулярна. Положение тела (саней) определяется тремя обобщенными координатами: координатами x, y точки K и углом φ между осями Ox и Kx_1. Пусть m – масса тела, a, b – координаты точки центра масс C в системе Kx_1y_1, J_0 – момент инерции саней относительно вертикальной оси, проходящей через точку C. Предполагается, что по трем обобщенным координатам действуют управляющие обобщенные силы. Связь, наложенная на систему, состоит в том, что скорость точки K всегда направлена вдоль оси Kx_1, т.е. $\dot{y} = \dot{x}\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Кинетическая энергия равна

$$T = ½(mv_C^2 + J_0\dot{\varphi}^2) =$$
$$= ½m\,\{[\dot{x} - \dot{\varphi}(a\sin\varphi + b\cos\varphi)]^2 + [\dot{y} + \dot{\varphi}(a\cos\varphi - b\sin\varphi)]^2 + k^2\dot{\varphi}^2\}$$

где k – радиус инерции тела относительно оси, проходящей через точку C, перпендикулярной плоскости Ω.

Система обладает двумя степенями свободы; за независимые координаты выберем $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$; $q_3 = y$ – зависимая координата. Составим уравнения (1.1) управляемого движения по каждой координате с одним неопределенным множителем λ. Тогда

$$m\ddot{q}_1 + \alpha\ddot{q}_2 - \beta\dot{q}_2^2 = u_1 + \lambda\,\mathrm{tg}\,q_2$$
$$\alpha\ddot{q}_1 + \gamma\ddot{q}_2 + \beta(\ddot{q}_3 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2) = u_2$$
$$m\ddot{q}_3 + \beta\ddot{q}_2 + \alpha\dot{q}_2^2 = u_3 - \lambda$$
$$\alpha = -m(a\sin q_2 + b\cos q_2), \quad \beta = m(a\cos q_2 - b\sin q_2)$$
$$\gamma = m(a^2 + b^2 + k^2)$$



В векторно-матричные уравнения (1.7), (1.8) входят следующие матрицы и векторы:

$$A(q) = \left\| \begin{matrix} m & \alpha & 0 \\ \alpha & \gamma & \beta \\ 0 & \beta & m \end{matrix} \right\|, \quad B(q, \dot q) = \left\| \begin{matrix} -\beta \dot q_2^2 \\ -2\beta \dot q_1 \dot q_2 \\ \alpha \dot q_2^2 \end{matrix} \right\|, \quad u = \left\| \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix} \right\|, \quad q = \left\| \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{matrix} \right\|$$

$$q_\alpha = \left\| \begin{matrix} q_1 \\ \vdots \\ q_2 \end{matrix} \right\|, \quad D(q) = \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg} q_2 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \right\|, \quad F_1(q, \dot q) = \left\| \begin{matrix} 0 & \dfrac{\dot q_1}{\cos^2 q_2} & 0 \end{matrix} \right\|, \quad F_2(q) = \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg} q_2 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$S_1(q) = \left\| \begin{matrix} m & \alpha \\ -mb/\cos q_2 & \gamma \\ m \operatorname{tg} q_2 & \beta \end{matrix} \right\|, \quad S_2(q, \dot q) = \left\| \begin{matrix} -\beta \dot q_2^2 \\ \beta \dot q_1 \dot q_2 (1/\cos^2 q_2 - 2) \\ m \dot q_1 \dot q_2/\cos^2 q_2 + \alpha \dot q_2 \end{matrix} \right\|$$

В частности, для простейшего случая, когда проекция центра масс совпадает с точкой опоры K (случай Каратеодори) закон управления имеет вид

$$u = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ m \dot q_1 \dot q_2/\cos^2 q_2 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} m & 0 \\ 0 & mk^2 \\ m \operatorname{tg} q & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} q_{1*} \\ q_{2*} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} v_{1*} \\ v_{2*} \\ v_{3*} \end{matrix} \right\|$$

где оценки v_* являются решением рекуррентной алгебраической линейной системы уравнений (3.3). Можно обнаружить, что при подстановке управления u в уравнения движения последние обеспечивают экспоненциальную стабилизацию системы относительно программных траекторий.

5. Локально-оптимальная стабилизация. Для многих динамических систем важно требование оптимальности в любой текущий момент времени. В качестве примера можно рассмотреть требование максимальной точности стабилизации в течение длительного промежутка времени. Ясно, что в этом случае за критерий следует взять функционал, заданный на текущем состоянии системы и представляющий собой меру возмущенного состояния. Таким функционалом может быть интегральная квадратичная форма (локальный функционал Ляпунова) или критерий обобщенной работы [1–5].

Для того чтобы решить задачу оптимальной стабилизации неголономной системы (1.7) со связями (1.6), добавим к целевым условиям (1.9) требование минимизации в каждый момент времени t функционала

$$\begin{gathered} J(t) = J[u(t),\ z(t)] = \int_0^t W_1(s)ds + W_2(t) \to \min_{u(t) \in U} \\ W_1 = u' Q_1 u, \quad W_2 = z' Q_2 z, \quad z = \dot q_\alpha - \dot q_{\alpha p} + \beta_2 (q_\alpha - q_{\alpha p}) \end{gathered} \tag{5.1}$$

где Q_1, Q_2 – симметрические матрицы, допускающие разложение $Q_i = X_i' X_i$ $(i = 1, 2)$ для некоторой полного ранга прямоугольной матрицы X_i, $Q_2 = S_1' S_1$ – $(s \times s)$-матрица.

Оптимальное управление $u_0(t)$ будем искать в классе непрерывных функций со значениями в области $U \subset R^n$. Предполагается также, что функционал $J(t)$ имеет полную производную dJ/dt, вычисляемую в силу уравнения (1.8).

При $W_1(t) = 0$ функционал $J(t) = W_2(t)$ можно рассматривать как меру возмущенного состояния процесса. Для нахождения локально-оптимального управления $u_0(t)$ воспользуемся условием

$$dJ/dt|_{u(t)=u_0(t)} = \min_{u(t)} dJ/dt \tag{5.2}$$

(необходимое и достаточное условие локальной оптимальности).

Очевидно, что целевые соотношения будут выполняться при стремлении $z(t)$ к нулю с ростом t, т.е. в случае, когда управляемый процесс ассимптотически устойчив по мере возмущенного состояния $W_2(t)$. Если функционалы $W_1(t)$, $W_2(t)$ – равномерно непрерывные и положительно определенные и в (5.2) имеет место соотношение

$$dJ/dt|_{u_0(t)} = \min_{u(t)} dJ/dt = 0 \tag{5.3}$$

то процесс $z(t)$ $(q_\alpha = q_{\alpha p})$ является асимптотически устойчивым, а управление $u_0(t)$ – локально-оптимальным.

В самом деле, из (5.2) непосредственно следует оптимальность управления и уравнение для определения алгоритма оценивания при нахождении $v_*(t)$

$$dJ/dt|_{u_0(t)} = [W_1(t) + dW_2(t)/dt]_{u_0(t)} = 0$$

откуда $dW_2(t)/dt < 0$ и функционал $W_2(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Дифференцируя $J(t)$, найдем в силу (1.8) выражение для оптимального управления

$$u_0 = -Q_1^{-1} S_1 z. \tag{5.4}$$

Если теперь выражение (5.4) подставить в dJ/dt, то получим

$$dJ/dt = z' S_1' Q_1^{-1} S_1 z + d(z' Q_2 z)/dt \tag{5.5}$$

В (5.5) матрицу Q_1^{-1} зададим в виде

$$Q_1^{-1}(v_*) = \mathrm{diag}(v_{1*}^2, v_{2*}^2, \ldots, v_{n*}^2)$$

где v_* – оценки неизвестного вектора возмущений v, и приравняем нулю выражение (5.5), что обеспечит выполнение целевых условий.

После сокращения на вектор $z'S_1'$ получим уравнение для нахождения оценок v_*

$$\begin{gathered} 2S_1(q)z^{\cdot} + S_1^{\cdot}(q, q^{\cdot})z + Q_1^{-1}(v_*)S_1'(q)z = 0 \\ z^{\cdot} = q_\alpha^{\cdot\cdot} + \varphi, \quad \varphi = -q_{\alpha p}^{\cdot\cdot} + \beta_2(q_\alpha^{\cdot} - q_{\alpha p}^{\cdot}) \end{gathered} \tag{5.6}$$

Преобразуем уравнение (5.6) к виду, при котором его коэффициенты будут зависеть лишь от значений q и $q^{\cdot}$

$$\begin{gathered} S_1\varphi - S_2 + \frac{1}{2} S_1^{\cdot} z + v - \frac{1}{2} Q_1^{-1} S_1 z = 0 \\ S_1 q_\alpha^{\cdot\cdot} + S_2 = -Q_1^{-1} S_1 z + v \end{gathered} \tag{5.7}$$

От (5.7) перейдем к его сглаженному аналогу, заменив $v(t)$ на n-мерный выход фильтра $V(t)$

$$V^{\cdot} + \kappa V = \langle v \rangle_{-\kappa} \tag{5.8}$$

с решением

$$V(t)=ve^{-\kappa t}+[v]_{-\kappa},\quad V(0)=v;\quad \kappa>0$$

Воспользуемся предложенной ранее схемой: проинтегрируем дважды разрешенное относительно v уравнение системы с весом $e^{-\kappa(t-s)}$ на промежутке $[0, t]$

$$[v]_{-\kappa}=[\,S_1\ddot{q}_\alpha+S_2+Q_1^{-1}S_1z\,]_{-\kappa} \tag{5.9}$$

При помощи (5.9) уравнение фильтра (5.8) можно переписать так:

$$V^{\cdot}+\kappa V=\langle S_2+Q_1^{-1}S_1\rangle_{-\kappa}+S_1\dot{q}_\alpha-S_1(0)\dot{q}_\alpha(0)e^{-\kappa t}-\langle(\kappa S_1+\dot{S}_1)\dot{q}_\alpha\rangle_{-\kappa} \tag{5.10}$$

где на вход фильтра (5.10) подаются значения q, $q^{\cdot}$ и оценка v_*.

Если теперь подставить решение фильтрующего устройства в сглаженный аналог уравнения (5.7), получим запись алгоритма оценивания

$$[Q_1^{-1}S_1z]_{-\kappa}-½Q_1^{-1}S_1z=f(t)$$

$$f(t)=S_2-S_1\varphi-½\dot{S}_1z-ve^{-\kappa t}-[S_2]_{-\kappa}-$$

$$-\langle S_1\dot{q}_\alpha\rangle_{-\kappa}+S_1(0)\,\dot{q}_\alpha(0)\,te^{-\kappa t}+[(\kappa S_1+\dot{S}_1)\dot{q}_\alpha]_{-\kappa} \tag{5.11}$$

где вектор-функция $f(t)$ зависит только от q и $q^{\cdot}$. Уравнение (5.11) представим в виде системы интегродифференциальных уравнений

$$\int_0^t y(s)\,ds-y^{\cdot}(t)=F(t)$$

$$y(t)=\int_0^t x(s)\,ds,\quad x(t)=Q_1^{-1}S_1ze^{\kappa t},\quad F(t)=f(t)e^{\kappa t}$$

которая, как это было показано ранее, может быть разрешена численно путем сведения к рекуррентной системе алгебраических линейных уравнений с использованием квадратурных формул.

Предложенный в работе метод адаптивной стабилизации может быть естественным образом распространен и на неголономные системы, внутренние параметры которых заранее неизвестны либо испытывают неизвестный ограниченный дрейф во времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В.В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 440–456.
2. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
3. *Колмановский В.Б.* О стабилизации некоторых нелинейных систем // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 395–402.
4. *Воротников В.И.* Об оптимальной стабилизации движения // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 2. С. 22–31.
5. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 447 с.
6. *Тертычный В.Ю.* Конечная сходимость самонастраивающегося алгоритма адаптации // Автоматика и телемеханика. 1985. № 12. С. 156–160.
7. *Тертычный В.Ю.* Оценивание параметров управляемых динамических систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 3. С. 181–185.
8. *Лебедев Д.В.* О стабилизации движения динамической системы в условиях неопределенности // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 966–971.
9. *Мильштейн Г.Н., Соловьева О.Э.* Рекуррентное оценивание и идентификация параметров в нелинейных детерминированных системах // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 39–47.
10. *Тертычный В.Ю.* Об асимптотических свойствах стохастического алгоритма адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. 1988. № 8. С. 105–115.

11. *Тертычный В.Ю.* Стохастическая стабилизация управляемого вращательного движения твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 9–14.
12. *Тертычный В.Ю.* Оценивание параметров управляемых динамических систем в условиях неизвестного дрейфа // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 1. С. 93–100.
13. *Ананьевский И.М., Колмановский В.Б.* Об управлении некоторыми механическими системами при неполной информации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 1. С. 30–36.
14. *Ананьевский И.М., Колмановский В.Б.* О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 34–43.
15. *Четаев Н.Г.* О принципе Гаусса // Устойчивость движения: Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 323–326.
16. *Румянцев В.В.* О принципе Гамильтона для неголономных систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 387–399.
17. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
18. *Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 383 с.
19. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
16.X.1991