Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 6. 1992

УДК 531.36; 62–50

© 1992 г. Ю.К. Зотов, А.В. Тимофеев

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ОБРАТИМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматриваются вопросы управляемости и методы стабилизации программных движений широкого класса механических и электромеханических систем, обратимых относительно управления. Получены критерии управляемости и стабилизируемости обратимых систем. Построены в аналитическом виде программные движения и алгоритмы программного управления, а также синтезированы алгоритмы стабилизации программных движений для нелинейных обратимых систем.

1. Постановка задачи. Динамика широкого класса механических и электромеханических систем (МС и ЭМС) описывается дифференциальным уравнением вида

$$z^{\cdot} = F(z, u, t), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \geqslant t_0 \tag{1.1}$$

где z_0, $z = z(t)$ – n-мерные векторы состояний системы в начальный и текущий моменты времени; u – m-мерный вектор управлений; F – n-мерная вектор-функция, удовлетворяющая (при допустимом управлении) условиям существования и единственности решения системы (1.1) и определяющая свойства конкретного объекта управления (ОУ).

Если ОУ являются МС (исполнительные механизмы манипуляционных роботов, станков, координатно-измерительных машин и т.п.), то их динамика описывается уравнениями Лагранжа второго рода вида [1–6]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} - Q_0 = u, \qquad q(t_0) = q_0, \quad q^{\cdot}(t_0) = q^{\cdot}_0, \quad t \geqslant t_0$$

Здесь q – m-мерный вектор обобщенных координат МС; $T = ½ q^{\cdot *} A_0(q) q^{\cdot}$ – кинетическая энергия МС; $A_0(q)$ – $(m \times m)$-матрица; $\Pi = \Pi(q)$ – потенциальная энергия МС; $Q_0 = Q_0(q, q^{\cdot}, t)$ – m-мерный вектор обобщенных сил (моментов) сопротивления, действующих на МС; u – m-мерный вектор управлений; звездочка означает транспонирование.

В этом случае уравнение (1.1) имеет порядок $n = 2m$, причем

$$z = \begin{Vmatrix} q \\ q^{\cdot} \end{Vmatrix}, \quad F(z, u, t) = \begin{Vmatrix} q^{\cdot} \\ A_0^{-1}(q)(-b_0(q, q^{\cdot}, t) + u) \end{Vmatrix} \tag{1.2}$$

Для ЭМС, включающих двигатели постоянного тока (ДПТ) с жесткими редукторами, уравнение (1.1) имеет порядок $n = 3m$, причем [5]

$$z = \begin{Vmatrix} q \\ q^{\cdot} \\ I \end{Vmatrix}, \quad F(z, u, t) = \begin{Vmatrix} q^{\cdot} \\ A^{-1}(q)(k_m I - b(q, q^{\cdot}, t)) \\ L^{-1}(u - RI - k_e i_p q^{\cdot}) \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

$$A(q) = J i_p + i_p^{-1} A_0(q), \quad b(q, q^{\cdot}, t) = k_0 i_p q^{\cdot} + i_p^{-1} b_0(q, q^{\cdot}, t)$$

Здесь I – m-мерный вектор токов в якорных цепях ДПТ; u – m-мерный вектор управляющих напряжений, подаваемых на якорные цепи ДПТ; J, k_0, k_m, L, R, k_e – диагональные матрицы электромеханических параметров ДПТ, являющихся положительными вещественными величинами; i_p – диагональная матрица коэффициентов передачи редукторов (такая, что $\varphi = i_p q$, где φ – вектор углов поворота валов двигателей); $A(q)$ – невырожденная матрица.

Система (1.1) называется управляемой, если для любых двух состояний $z_{p0} \in R^n$ и

$z_{p1} \in R^n$ (где R^n – евклидово n-мерное пространство), любых $t_0 < t_1 < \infty$ существует управление $u(t)$ такое, что соответствующее ему решение $z(t)$ системы (1.1) удовлетворяет граничным условиям

$$z(t_0) = z_{p0}, \quad z(t_1) = z_{p1} \tag{1.4}$$

Решение $z = z_p(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.4), будем называть программным движением, а соответствующее ему управление

$$u = u_p(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (t_1 - t_0 < \infty) \tag{1.5}$$

программным управлением.

Рассмотрим некоторое программное движение $z_p = z_p(t)$, $t \geqslant t_0$ системы (1.1). Будем говорить, что оно стабилизируемо, если существует закон управления с обратной связью по вектору состояния вида

$$u = u(z, t), \quad t \geqslant t_0, \tag{1.6}$$

обеспечивающий асимптотическую устойчивость программного движения $z_p(t)$.

Задачи, рассматриваемые в статье, заключаются в исследовании условий управляемости и стабилизируемости нелинейных МС и ЭМС. Синтезируются алгоритмы построения программных движений и их стабилизации.

Предлагаемые методы решения задач обобщают и развивают ранее полученные результаты [1–11]. Они основываются на свойстве обратимости уравнений динамики МС и ЭМС относительно управления.

2. Обратимость уравнений динамики и преобразование координат к каноническому виду. Структура уравнений динамики МС (1.1), (1.2) и ЭМС (1.1), (1.3) такова, что их можно представить в виде системы (1.1), где

$$z = \operatorname{col}(z_1, \ldots, z_r), \quad n = mr \tag{2.1}$$

$$F(z, u, t) = \operatorname{col}(F_1(z^2, t), \ldots, F_{r-1}(z^r, t), F_r(z, u, t)) \tag{2.2}$$

$$F_i(z^{i+1}, t) = C_i(z^i, t) + D_i(z^i, t) z_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, r-1 \tag{2.3}$$

$$F_r(z, u, t) = z_r^{\cdot} = C_r(z, t) + D_r(z, t) u \tag{2.4}$$

Здесь z_i – m-мерный, $z^i = \operatorname{col}(z_1, \ldots, z_i)$ – mi-мерные векторы; C_i, D_i ($i = 1, \ldots$ $\ldots, r$) – заданные вектор- и матрицы-функции.

Будем в дальнейшем считать, что вектор-функции F_i (2.3), (2.4) ($i = 1, \ldots, r$) достаточное число раз непрерывно-дифференцируемы по своим аргументам.

Для МС (1.1), (1.2) имеем

$$\begin{gathered} z = \operatorname{col}(q, q^{\cdot}), \quad n = 2m, \quad F_1(z^2, t) = q^{\cdot}, \quad F_2(z, u, t) = A_0^{-1}(q)(-b_0(q, q^{\cdot}, t) + u), \\ C_1(z^1, t) = 0, \quad D_1(z^1, t) = I_m, \\ C_2(z^2, t) = -A_0^{-1}(q)\, b_0(q, q^{\cdot}, t), \quad D_2(z^2, t) = A_0^{-1}(q) \end{gathered} \tag{2.5}$$

(I_m – единичная ($m \times m$)-матрица). Для ЭМС (1.1), (1.3)

$$\begin{gathered} z = \operatorname{col}(q, q^{\cdot}, I), \quad n = 3m, \quad F_1(z^2, t) = q^{\cdot}, \\ F_2(z^3, t) = A^{-1}(q)(k_m I - b(q, q^{\cdot}, t)), \quad F_3(z, u, t) = L^{-1}(u - RI - k_e i_p q^{\cdot}) \\ C_1(z^1, t) = 0, \quad D_1(z^1, t) = I_m, \quad C_2(z^2, t) = -A^{-1}(q)\, b(q, q^{\cdot}, t) \\ D_2(z^2, t) = A^{-1}(q) k_m, \quad C_3(z^3, t) = -L^{-1}(RI + k_e i_p q^{\cdot}), \quad D_3(z^3, t) = L^{-1} \end{gathered} \tag{2.6}$$

Для МС и ЭМС матрицы D_i ($i = 1, \ldots, r$) невырождены. Поэтому уравнения динамики (1.1), (2.1)–(2.4) можно записать в разрешенной относительно управления форме

$$z_i^{\cdot} = F_i(z^{i+1}, t) = C_i(z^i, t) + D_i(z^i, t) z_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, r-1 \tag{2.7}$$

$$u = D_r^{-1}(z, t)(z_r^{\cdot} - C_r(z, t)) \tag{2.8}$$

МС и ЭМС, обладающие указанным свойством, будем называть обратимыми управляемыми системами (ОУС).

Синтез стабилизирующих законов управления удобно осуществлять не в исходных "физических" координатах (2.1), а в канонических переменных вида [1–8]

$$x = \operatorname{col}(x_1, \dots, x_r), \quad x_1 = z_1, \quad x_i = x_{i-1}^{\cdot}, \quad i = 2, \dots, r \tag{2.9}$$

Найдем преобразование координат, связывающие x и z. В общем случае эти взаимно-однозначные преобразования имеют вид

$$x = \Psi(z, t), \quad z = \Phi(x, t) \tag{2.10}$$

Вектор-функции $\Psi(z, t)$ и $\Phi(x, t)$ определены в Приложении 1.

В случае МС (1.1), (2.2)–(2.5)

$$\Psi(z, t) = \Phi(x, t) = \begin{Vmatrix} q \\ q^{\cdot} \end{Vmatrix} \tag{2.11}$$

Для ЭМС (1.1), (2.2)–(2.4), (2.6)

$$\Psi(z, t) = \begin{Vmatrix} q \\ q^{\cdot} \\ A^{-1}(q)(k_m I - b(q, q^{\cdot}, t)) \end{Vmatrix}, \quad \Phi(x, t) = \begin{Vmatrix} q \\ q^{\cdot} \\ k_m^{-1}(A(q)q^{\cdot\cdot} + b(q, q^{\cdot}, t)) \end{Vmatrix} \tag{2.12}$$

Запишем ОУС (1.1), (2.1)–(2.4) в канонических переменных

$$x^{\cdot} = Px + Q(R(x, t) + S(x, t)u) \tag{2.13}$$

Здесь $R(x, t)$ и $S(x, t)$ – вектор и невырожденная матрица размерами m и $m \times m$, явный вид которых приведен в Приложении 2; P и Q – матрицы размерами $n \times n$ и $n \times m$:

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & I_{n-m} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} 0 \\ I_m \end{Vmatrix} \tag{2.14}$$

где O – нулевая матрица, соответствующего размера.

В случае МС $n = 2m$ и

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} 0 \\ I_m \end{Vmatrix} \tag{2.15}$$

$$R(x, t) = -A_0^{-1}(q)\, b_0(q, q^{\cdot}, t), \quad S(x, t) = A_0^{-1}(q)$$

Для ЭМС $n = 3m$ и

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & I_{2m} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} 0 \\ I_m \end{Vmatrix} \tag{2.16}$$

$$R(x, t) = -A_1^{-1}(q)\, b_1(q, q^{\cdot}, q^{\cdot\cdot}, t), \quad S(x, t) = A_1^{-1}(q)$$

$$A_1(q) = Lk_m^{-1}A(q), \quad b_1(q, q^{\cdot}, q^{\cdot\cdot}, t) = (Lk_m^{-1}A^{\cdot}(q) + Rk_m^{-1}A(q))\,q^{\cdot\cdot} +$$
$$+ Lk_m^{-1}b^{\cdot}(q, q^{\cdot}, t) + Rk_m^{-1}b(q, q^{\cdot}, t) + k_e i_p q^{\cdot}$$

$A_1(q)$ – невырожденная матрица.

Поскольку матрица $S(x, t)$ в (2.13) невырождена, уравнение (2.13) можно разрешить относительно управления в виде

$$u = S^{-1}(x, t)(x_r^{\cdot} - R(x, t)) \tag{2.17}$$

Следовательно, уравнения динамики МС (1.1), (2.1)–(2.5) и ЭМС (1.1), (2.1)–

(2.4), (2.6) могут быть представлены в канонической форме (2.13). Последние уравнения можно разрешить относительно управления в виде (2.17).

3. Управляемость и алгоритмы построения программных управлений и программных движений. Покажем сначала, что система (2.13) управляема.

Введем вспомогательное управление

$$w = R(x, t) + S(x, t)u \tag{3.1}$$

Тогда система (2.13) примет вид

$$\dot{x} = Px + Qw \tag{3.2}$$

Можно убедиться, что

$$\operatorname{rank}[Q, PQ, \ldots, P^{r-1}Q] = n$$

Следовательно [12], система (3.2) управляема. Это означает, что существует закон управления $w = w_p(t) = w_p$, переводящий (3.2) из любого начального $x_p(t_0) = x_{p0}$ в произвольное конечное состояние $x_p(t_1) = x_{p1}$ за время $t_1 - t_0 < \infty$ по траектории $x = x_p(t) = x_p$.

Из (3.1) находим

$$u = S^{-1}(x, t)(w - R(x, t)) \tag{3.3}$$

Подставляя в (3.3) закон управления $w = w_p(t)$, $x = x_p(t)$, получаем закон управления

$$u = u_p = u_p(t) = S^{-1}(x_p, t)(w_p - R(x_p, t)) \tag{3.4}$$

обеспечивающий перевод системы (2.13) из любого начального состояния $x_p(t_0) = x_{p0}$ в произвольное конечное $x_p(t_1) = x_{p1}$ за время $t_1 - t_0 < \infty$ по траектории $x = x_p(t)$.

Из управляемости канонической системы (2.13) и преобразования координат (2.10) следует, что закон управления

$$u = S^{-1}(\Psi(z, t), t)(w - R(\Psi(z, t), t)) \tag{3.5}$$

где $w = w_p(t)$, $z = z_p(t) = \Phi(x_p, t)$ переводит исходную систему (1.1), (2.1)–(2.4) из начального состояния $z_{p0} = \Phi(x_{p0}, t_0)$ в конечное $z_{p1} = \Phi(x_{p1}, t_1)$ за время $t_1 - t_0 < \infty$ по траектории

$$z = z_p = \Phi(x_p, t) \tag{3.6}$$

Поэтому исходная система (1.1), (2.1)–(2.4) управляема.

Критерий управляемости для системы в канонической форме (2.13), (2.14) имеет вид

$$\operatorname{rank} S(x, t) = m, \quad x \in R^n, \quad t \geqslant t_0 \tag{3.7}$$

а для исходной системы (1.1), (2.1)–(2.4) приводит к условию

$$\operatorname{rank} D_i(z^i, t) = m, \quad z^i \in R^{m_i}, \quad t \geqslant t_0, \quad i = 1, \ldots, r \tag{3.8}$$

Заметим, что критерии (3.7), (3.8) выполнены для рассматриваемого класса МС и ЭМС.

Построим программное управление и программное движение в аналитическом виде. С этой целью сначала найдем вспомогательное программное управление и программное движение для линейной канонической системы (3.2), (2.14), т.е. построим

$$w = w_p(t), \quad x = x_p(t), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (t_1 - t_0 < \infty), \tag{3.9}$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$x_p(t_0) = x_{p0}, \quad x_p(t_1) = x_{p1} \tag{3.10}$$

Будем искать $w_p(t)$ в виде

$$w_p(t) = Q^* e^{P^*(t_1 - t)} \alpha, \quad t \in [t_0, t_1] \tag{3.11}$$

где α – искомый постоянный n-вектор. Тогда решение $x(t)$ системы (3.2), (2.14), (3.11) в момент времени t_1 примет вид

$$x_{p1} = e^{P(t_1 - t_0)} x_{p0} + K\alpha \tag{3.12}$$

$$K = \int_{t_0}^{t_1} e^{P(t_1 - t)} Q Q^* e^{P^*(t_1 - t)} dt \tag{3.13}$$

В силу управляемости системы (3.2), (2.14) матрица K (3.13) является положительно определенной [13] и поэтому из (3.12) получаем

$$\alpha = K^{-1}(x_{p1} - e^{PT} x_{p0}), \quad T = t_1 - t_0 \tag{3.14}$$

Исключая вектор α (3.14) из (3.11), найдем искомое вспомогательное программное управление в виде

$$w_p(t) = Q^* e^{P^*(t_1 - t)} K^{-1}(x_{p1} - e^{PT} x_{p0}) \tag{3.15}$$

При учете (2.14) имеем

$$e^{P(t_1 - t)} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^k (t_1 - t)^k}{k!}, \qquad e^{PT} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^k T^k}{k!}$$

$$Q^* \exp[P^*(t_1 - t)] = [((t_1 - t)^{r-1}/(r-1)!) I_m, \ldots, ((t_1 - t)^2/2!) I_m, (t_1 - t) I_m, I_m]$$

$$K_{ij} = (T^{2r-i-j+1}/((2r - i - j + 1)(r - i)!(r - j)!)) I_m, \quad i, j = 1, \ldots, r \tag{3.16}$$

где K_{ij} $(i, j = 1, \ldots, r)$ – $m \times m$-блоки матрицы K (3.13). Используя (3.14)–(3.16), представим вспомогательное программное управление в виде

$$w_p(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\beta_k (t_1 - t)^{r-1-k}}{(r - 1 - k)!}, \quad t \in [t_0, t_1] \tag{3.17}$$

где m-мерные векторы β_k $(k = 0, \ldots, r - 1)$ таковы, что

$$\beta = \mathrm{col}(\beta_0, \ldots, \beta_{r-1}) = K^{-1}(x_{p1} - (\sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^k T^k}{k!}) x_{p0}) \tag{3.18}$$

Используя (3.17), (3.18) и соотношения

$$e^{P(t_1 - t_0)} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^k (t_1 - t_0)^k}{k!}, \qquad e^{P(t - \tau)} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^k (t - \tau)^k}{k!}$$

построим программное движение (3.9), (3.10), соответствующее программному управлению (3.17), (3.18), в виде

$$x_p(t) = (\sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^k (t - t_0)^k}{k!}) x_{p0} + \int_{t_0}^{t} (\sum_{k=0}^{r-1} \frac{P^k (t - \tau)^k}{k!}) Q \times$$

$$\times (\sum_{k=0}^{r-1} \frac{\beta_k (t_1 - \tau)^{r-1-k}}{(r - 1 - k)!}) d\tau, \quad t \in [t_0, t_1] \tag{3.19}$$

Подставляя найденные выражения (3.17)–(3.19) соответственно для $w_p(t)$ и $x_p(t)$

в (3.4), получим искомое программное управление для ОУС в канонических переменных (2.13), (2.14). Используя $w = w_p(t)$ (3.17), (3.18) и $x = x_p(t)$ (3.19), преобразование координат (2.10), получим программное управление (3.5) и соответствующее ему программное движение $z_p(t) = \Phi(x_p, t)$, $t \in [t_0, t_1]$ для исходной ОУС (1.1), (2.1)–(2.4).

4. Стабилизируемость и алгоритмы стабилизации программных движений. Из управляемости линейной системы (3.2) следует, что существует постоянная $(m \times m)$-матрица Γ_0, такая, что матрица

$$\Gamma = P + Q\Gamma_0 \tag{4.1}$$

устойчива, т.е.

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\Gamma) < 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.2}$$

где $\lambda_i(\Gamma)$ $(i = 1, \ldots, n)$ – собственные числа Γ.

Введем вспомогательный закон управления с обратной связью по x:

$$w = Q^* \dot{x}_p + \Gamma_0(x - x_p) = Q^*(\dot{x}_p + \Gamma(x - x_p)) = w_p + \Gamma_0(x - x_p) \tag{4.3}$$

Тогда уравнение переходных процессов (ПП)

$$e_x = e_x(t) = x(t) - x_p(t), \quad t \geqslant t_0 \tag{4.4}$$

в замкнутой системе (3.2), (4.1)–(4.3) имеет вид

$$\dot{e}_x = \Gamma e_x, \quad e_x(t_0) = e_{x_0} = x_0 - x_p(t_0), \quad t \geqslant t_0 \tag{4.5}$$

Следовательно, программное движение $x_p(t)$ системы (3.2), (4.1)–(4.3) асимптотически устойчиво в целом. При этом ПП e_x (4.4) в системе удовлетворяет оценке

$$\begin{gathered} | e_x(t) | \leqslant c_1 \exp(\gamma(t - t_0)) | e_x(t_0) |, \quad t \geqslant t_0 \\ \gamma = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(\Gamma) \quad (i = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{4.6}$$

где $c_1 > 0$ – параметр, зависящий только от Γ.

Подставляя (4.1)–(4.3), в (3.3), используя (3.4), для ОУС (2.13)–(2.14) получим стабилизирующий закон управления в канонических переменных

$$\begin{aligned} u &= S^{-1}(x, t)(Q^* \dot{x}_p + \Gamma_0(x - x_p) - R(x, t)) = \\ &= S^{-1}(x, t)(Q^*(\dot{x}_p + \Gamma(x - x_p)) - R(x, t)) = \\ &= S^{-1}(x, t)(w_p + \Gamma_0(x - x_p) - R(x, t)) = \\ &= S^{-1}(x, t)(S(x_p, t) u_p + R(x_p, t) + \Gamma_0(x - x_p) - R(x, t)) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Уравнение ПП в замкнутой системе (2.13)–(2.14), (4.7), (4.1), (4.2) имеет вид (4.5), (4.1), (4.2), и, следовательно, программное движение $x_p(t)$ асимптотически устойчиво в целом, т.е. программное движение $x_p(t)$ стабилизируемо, причем для ПП справедлива оценка (4.6).

Можно показать, что программное движение $z_p(t)$ в исходной ОУС (1.1), (2.1)–(2.4) стабилизируемо.

Подставляя (2.10) в (4.7), (4.1), (4.2), получим стабилизирующий закон управления в исходных "физических" координатах

$$\begin{aligned} u &= S^{-1}(\Psi(z, t), t)(Q^* \dot{\Psi}(z_p, t) + \Gamma_0(\Psi(z, t) - \Psi(z_p, t)) - R(\Psi(z, t), t)) = \\ &= S^{-1}(\Psi(z, t), t)(S(\Psi(z_p, t), t) u_p + R(\Psi(z_p, t), t) + \Gamma_0(\Psi(z, t) - \Psi(z_p, t)) - R(\Psi(z, t), t)) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Уравнение ПП в замкнутой системе (1.1), (2.1)–(2.4), (4.8), (4.1), (4.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{e}_z &= F(e_z + z_p, S^{-1}(\Psi(e_z + z_p, t), t)(S(\Psi(z_p, t), t) u_p + R(\Psi(z_p, t), t) + \Gamma_0(\Psi(e_z + z_p, t) - \Psi(z_p, t)) - \\ &- R(\Psi(e_z + z_p, t), t)), t) - F(z_p, u_p, t), \quad t \geqslant t_0, \quad e_z = z - z_p \end{aligned} \tag{4.9}$$

Оценим ПП в (3.15). Предположим, что для каждой из вектор-функций C_i ($i = 1, \ldots, r$) и матриц-функций D_i ($i = 1, \ldots, r$) в (2.3), (2.4) при всех возможных значениях аргументов справедливы оценки

$$|C_i(z^i, t)| \leqslant a_{1i} + a_{2i}|z^i|^{k_i}, \quad |D_i(z^i, t)| \leqslant a_{3i}, \quad i = 1, \ldots, r \tag{4.10}$$

где $a_{1i} \geqslant 0$, $a_{2i} \geqslant 0$, $a_{3i} > 0$ ($k_i \geqslant 1$) – некоторые постоянные. Будем считать, что аналогичные оценки имеют место для частных производных от C_i и D_i по их аргументам.

Тогда, используя оценки для конечных приращений вектор-функции $\Phi(e_x + x_p, t) - \Phi(x_p, t)$, можно показать, что ПП $e_z(t) = z(t) - z_p(t)$ удовлетворяет оценке:

$$|e_z(t)| = |z(t) - z_p(t)| = |\Phi(e_x(t) + x_p(t), t) - \Phi(x_p(t), t)| =$$

$$= |\int_0^1 \partial(\Phi(\nu e_x(t) + x_p(t), t)) - \Phi(x_p(t), t)/\partial e_x(t) d\nu e_x(t)| \leqslant$$

$$\leqslant |\int_0^1 \partial(\Phi(\nu e_x(t) + x_p(t), t - \Phi(x_p(t), t))/\partial e_x(t) d\nu|\,|e_x(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0(t)|e_x(t)| \leqslant \mu(t) c_1 \exp(\gamma(t - t_0))|e_x(t_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \mu(t) \exp(\gamma(t - t_0))|\Psi(z(t_0), t_0) - \Psi(z_p(t_0), t_0)|, \quad t \geqslant t_0 \tag{4.11}$$

где $\mu_0(t) = a_1 + a_2|e_x^{r-1}(t)|^s$, $\mu(t) = \mu_0(t) c_1$, $a_1 > 0$, $a_2 \geqslant 0$, $s \geqslant 1$ – некоторые постоянные; $e_x^{r-1}(t) = x^{r-1}(t) - x_p^{r-1}(t)$.

Из (4.11), (4.6), (4.2) следует, что программное движение $z_p(t)$ в исходной системе (2.1), (1.1), (2.4) с законом управления (4.8), (4.1), (4.2) асимптотически устойчиво в целом, т.е. программное движение $z_p(t)$ стабилизируемо.

Таким образом, синтезированные законы управления (4.7), (4.1), (4.2) и (4.8), (4.1), (4.2) обеспечивают асимптотическую устойчивость программных движений $x_p(t)$ и $z_p(t)$ в целом для соответствующих ОУС (2.13), (2.14) и (1.1), (2.1)–(2.4) с оценками (4.6) и (4.11) для ПП.

За счет выбора матрицы коэффициентов усиления Γ_0 можно обеспечить желаемый характер затухания ПП. Так, например, для получения апериодического ПП в замкнутых системах достаточно, чтобы спектр матрицы Γ (4.1) состоял только из вещественных отрицательных чисел.

В случае, когда матрица Γ_0 в (4.1) состоит из диагональных ($m \times m$)-блоков $\Gamma_{0k} = \operatorname{diag}(\Gamma_{0ki})_{i=1}^m$ ($k = 0, \ldots, r-1$), так что $\Gamma_0 = [-\Gamma_{00}, \ldots, -\Gamma_{0,r-1}]$, удается обеспечить декомпозицию уравнения ПП (4.5) в замкнутой системе (ОУС в канонической форме (2.13), (2.14) с законом управления (4.7), (4.1), (4.2)) на m-независимых уравнений r-го порядка вида

$$e_{x_{1i}}^{(r)} + \Gamma_{0,r-1,i} e_{x_{1i}}^{(r-1)} + \ldots + \Gamma_{00i} e_{x_{1i}} = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

Здесь $e_{x_{1i}}^{(k)}$ – k-я производная по времени от координаты $e_{x_{1i}} = e_{x_{1i}}^{(0)} = x_{1i} - x_{1ip}$, причем ПП e_x (4.4) представим в виде $e_x = \operatorname{col}(e_{x_1}, \ldots, e_{x_r})$, $e_{x_1} = \operatorname{col}(e_{x_{11}}, \ldots, e_{x_{1m}}) = x_1 - x_{1p}$, $e_{x_i} = e_{x_{i-1}}^{\cdot}$, $i = 2, \ldots, r$.

Приложение 1. При учете соотношений (2.9), (2.3) и невырожденности матриц D_i ($i = 1, \ldots, r-1$) можно получить преобразования координат (2.10), связывающие x и z. Имеем:

$$x = \Psi(z, t) = \operatorname{col}(\Psi_1(z^1, t), \ldots, \Psi_r(z^r, t)) \tag{П 1.1}$$

Здесь

$$\Psi_1(z^1, t) = x_1 = z_1 = z_1^1 = K_1 + L_1 z_1$$

$$\Psi_2(z^2, t) = x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\Psi}_1(z^1, t) = \dot{z}_1 = F_1(z^2, t) =$$

$$= C_1(z^1, t) + D_1(z^1, t) z_2 = K_2(z^1, t) + L_2(z^1, t) z_2$$

$$\Psi_i(z^i, t) = x_i = \dot{x}_{i-1} = \dot{\Psi}_{i-1}(z^{i-1}, t) = \dot{K}_{i-1}(z^{i-2}, t) + (L_{i-1}(z^{i-2}, t) z_{i-1})^{\cdot} = \tag{П.1.2}$$

$$= \dot{K}_{i-1}(z^{i-2}, t) + \dot{L}_{i-1}(z^{i-2}, t) z_{i-1} + L_{i-1}(z^{i-2}, t) F_{i-1}(z^i, t) =$$

$$= \dot{K}_{i-1}(z^{i-2}, t) + \dot{L}_{i-1}(z^{i-2}, t) z_{i-1} + L_{i-1}(z^{i-2}, t)(C_{i-1}(z^{i-1}, t) +$$

$$+ D_{i-1}(z^{i-1}, t) z_i) = K_i(z^{i-1}, t) + L_i(z^{i-1}, t) z_i, \quad i = 3, \ldots, n$$

где K_i $(i = 1, \ldots, r)$ – вектор и L_i $(i = 1, \ldots, r)$ – матрицы-функции вида

$$K_1 = 0, \quad L_1 = \mathrm{I}_m, \quad K_2(z^1, t) = C_1(z^1, t), \quad L_2(z^1, t) = L_1 D_1(z^1, t)$$

$$K_i(z^{i-1}, t) = \dot{K}_{i-1}(z^{i-2}, t) + \dot{L}_{i-1}(z^{i-2}, t)\, z_{i-1} + L_{i-1}(z^{i-2}, t)\, C_{i-1}(z^{i-1}, t) \quad (\text{П } 1.3)$$

$$L_i(z^{i-1}, t) = L_{i-1}(z^{i-2}, t)\, D_{i-1}(z^{i-1}, t), \quad i = 3, \ldots, r$$

Поскольку матрицы L_i невырождены, то, разрешая уравнение (П 1.2) относительно z_i $(i = 1, \ldots, r)$, получим преобразование

$$z = \Phi(x, t) = \mathrm{col}(\Phi_1(x^1, t), \ldots, \Phi_r(x^r, t)) \quad (\text{П } 1.4)$$

Здесь:

$$\Phi_1(x^1, t) = M_1 + N_1 x_1, \quad \Phi_i(x^i, t) = M_i(x^{i-1}, t) + N_i(x^{i-1}, t)\, x_i$$

$$i = 2, \ldots, r; \quad x^i = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_i), \quad x^r = x$$

$$M_1 = 0, \quad N_1 = \mathrm{I}_m, \quad M_i(x^{i-1}, t) = -L_i^{-1}(\Phi^{i-1}(x^{i-1}, t), t)\, K_i(\Phi^{i-1}(x^{i-1}, t), t),$$

$$N_i(x^{i-1}, t) = L_i^{-1}(\Phi^{i-1}(x^{i-1}, t), t) \quad (\text{П } 1.5)$$

$$\Phi^{i-1}(x^{i-1}, t) = \mathrm{col}(\Phi_1(x^1, t), \ldots, \Phi_{i-1}(x^{i-1}, t))$$

Приложение 2. Вектор-функция $R(x, t)$ и матрица-функция $S(x, t)$, входящие в (2.13), при учете соотношений (2.10), (П 1.1) – (П 1.5) определяются из выражения для x_r. Действительно

$$\dot{x}_r = \dot{\Psi}_r(z^r, t) = \dot{K}_r(z^{r-1}, t) + (L_r(z^{r-1}, t)\, z_r)^{\cdot} =$$

$$= \dot{K}_r(z^{r-1}, t) + \dot{L}_r(z^{r-1}, t)\, z_r + L_r(z^{r-1}, t)\, \dot{z}_r =$$

$$= \dot{K}_r(z^{r-1}, t) + \dot{L}_r(z^{r-1}, t)\, z_r + L_r(z^{r-1}, t)(C_r(z, t) + D_r(z, t)\, u) =$$

$$= R(x, t) + S(x, t)\, u \quad (\text{П } 2.1)$$

Здесь

$$R(x, t) = \dot{K}_r(\Phi^{r-1}(x^{r-1}, t), t) + \dot{L}_r(\Phi^{r-1}(x^{r-1}, t), t)\, \Phi_r(x^r, t) +$$

$$+ L_r(\Phi^{r-1}(x^{r-1}, t), t)\, C_r(\Phi(x, t), t) \quad (\text{П } 2.2)$$

$$S(x, t) = L_r(\Phi^{r-1}(x^{r-1}, t), t)\, D_r(\Phi(x, t), t)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимофеев А.В., Экало Ю.В.* Устойчивость и стабилизация программных движений робота-манипулятора // Автоматика и телемеханика. 1976. № 10. С. 148–156.
2. *Павлов В.А., Тимофеев А.В.* Построение и стабилизация программных движений подвижного робота-манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1976. № 6. С. 91–101.
3. *Гинзбург А.Р., Тимофеев А.В.* Об адаптивной стабилизации программных движений механических систем // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 859–869.
4. *Тимофеев А.В.* Адаптивное управление программным движением динамических систем // Автоматика. 1978. № 3. С. 36–43.
5. *Тимофеев А.В.* Построение адаптивных систем управления программным движением. Л.: Энергия, 1980. 85 с.
6. *Козлов В.В., Макарычев В.П., Тимофеев А.В., Юревич Е.И.* Динамика управления роботами. М.: Наука, 1984. 334 с.
7. *Тимофеев А.В.* Адаптивное управление роботами: Учеб. пособие. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 240 с.
8. *Тимофеев А.В.* Адаптивное управление роботами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 1. С. 154–165.
9. *Попов Е.П., Тимофеев А.В.* Управляемость на подпространстве и адаптивные модальные регуляторы // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 5. С. 1070–1073.
10. *Попов Е.П., Тимофеев А.В.* Принцип скоростного управления в задаче аналитического синтеза автоматов стабилизации // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 5. С. 1073–1076.
11. *Тимофеев А.В.* Адаптивная стабилизация программных движений и оценка времени адаптации // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. № 3. С. 545–549.
12. Справочник по теории автоматического управления // Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 711 с.
13. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 616 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
7.XII.1990