Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 6, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. В.И. Каленова, В.М. Морозов, М.А. Салмина

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

К решению задачи стабилизации установившихся движений голономных механических систем, в которых управляющие силы действуют только по циклическим координатам [1, 2], применяется подход, основанный на линейной теории управления [3]. Ниже рассматривается наиболее общая структура сил, действующих на систему, и предполагается, что наложенные связи нестационарны.

Получен ряд новых критериев управляемости и наблюдаемости, основанных на редукции рассматриваемой задачи, позволяющей свести исследование этих вопросов к анализу задачи меньшей размерности.

1. Рассмотрим голономную механическую систему с нестационарными связями, среди обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ которой имеются координаты q_j ($j = r+1, \ldots, n$; $r < n$), не входящие явным образом в выражение для кинетической энергии, которая предполагается не зависящей явно от времени

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$
$$T_0 = T_0(q), \quad T_1 = \gamma^T(q)\, q^{\cdot} + \delta^T(q)\, \omega$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2} q^{\cdot T} A(q)\, q^{\cdot} + q^{\cdot T} C(q)\, \omega + \tfrac{1}{2}\omega^T B(q)\, \omega$$

Здесь

$$q = \| q_1 q_2 \ldots q_r \|^T, \quad q^{\cdot} = \| q_1^{\cdot} q_2^{\cdot} \ldots q_r^{\cdot} \|^T$$
$$\omega = \| q_{r+1}^{\cdot} q_{r+2}^{\cdot} \ldots q_n^{\cdot} \|^T$$

— матрицы-столбцы, составленные из позиционных координат, позиционных и псевдоциклических скоростей: $A(r \times r)$, $B(m \times m)$ — положительно определенные симметричные матрицы, $m = n - r$, $C(r \times m)$ прямоугольная матрица: $\gamma^T(1 \times r)$, $\delta^T(1 \times m)$ — матрицы-строки, $T_0(q)$ — скалярная функция. Элементы матриц A, B, C, γ^T, δ^T зависят только от позиционных координат q.

Обобщенные силы, отвечающие позиционным координатам, заданы и представляют сумму потенциальных и непотенциальных сил

$$Q_i(q, q^{\cdot}, \omega) = \partial U/\partial q_i + Q_i^N(q, q^{\cdot}, \omega), \quad (U = U(q))$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r)$$

Обобщенные силы, отвечающие псевдоциклическим координатам, представляют сумму заданных непотенциальных сил Q_k^N и управляющих сил F_k, подлежащих выбору:

$$Q_k(q, q^{\cdot}, \omega) = Q_k^N(q, q^{\cdot}, \omega) + F_k(q, q^{\cdot}, \omega) \quad (k = r+1,\ r+2, \ldots, n)$$

Информация о текущих значениях координат и скоростей системы $q(t)$, $q^{\cdot}(t)$, $\omega(t)$ доставляется посредством измерения $\Sigma = \Sigma(q, q^{\cdot}, \omega)$ размерности $l \times 1$.

Пусть при некоторых начальных условиях возможно установившееся движение системы

$$q(t) = q_0 = \text{const}, \quad \omega(t) = \omega_0 = \text{const}. \tag{1.1}$$

Величины q_0, ω_0 удовлетворяют уравнениям

$$-\frac{1}{2}\sum_{k,s=r+1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ks}}{\partial q_i}\right)_0 \omega_{k0}\omega_{s0} - \sum_{k=r+1}^{n}\left(\frac{\partial \delta_k}{\partial q_i}\right)\omega_{k0} - \left(\frac{\partial T_0}{\partial q_i}\right)_0 =$$

$$=\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 + Q_i^N(q_0, 0, \omega) \tag{1.2}$$

$$Q_k^N(q_0, 0, \omega_0) + F_k(q_0, 0, \omega_0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r,\ k = r+1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

$$B = \| b_{ks} \|, \quad \delta = \| \delta_{k+1} \ldots \delta_n \|^T$$

Нулевой индекс здесь и далее означает, что величина вычислена при $q = q_0$, $\omega = \omega_0$.

Уравнения (1.2), (1.3), определяющие в n-мерном пространстве переменных q, ω множество возможных установившихся движений системы, являются более сложными, чем рассмотренные ранее [4].

Можно выделить [4] класс тривиальных установившихся движений, когда уравнение (1.2) имеет решение $q = q_0$ при любых значениях ω_0; остальные установившиеся движения называются существенными.

В частности, для обобщенных непотенциальных сил вида

$$Q_i^N = Q_i^0(q, q^{\cdot}) + \sum_{k=r+1}^{n} Q_{ik}^1(q, q^{\cdot})\,\omega_k + \frac{1}{2}\sum_{k,s=r+1}^{n} Q_{is}^2(q, q^{\cdot})\,\omega_k\omega_s$$

условия существования тривиальных установившихся движений имеют вид

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 + \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)_0 - Q_i^0(q_0, 0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial b_{ks}}{\partial q_i}\right)_0 + Q_{iks}^2(q_0, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial \delta_k}{\partial q_i}\right)_0 + Q_{ik}^1(q_0, 0) = 0$$

$(i = 1, 2, \ldots, r;\ k, s = r+1, \ldots, n)$

Введем отклонения $x = q - q_0$, $\eta = \omega - \omega_0$ и запишем линеаризованные уравнения Лагранжа и уравнение измерений в матричной форме

$$A_0 x^{\cdot\cdot} + D_0 x^{\cdot} + W_0 x + C_0 \eta^{\cdot} - P_0^T \eta = 0$$

$$B_0 \eta^{\cdot} + C_0^T x^{\cdot\cdot} + S_0 x^{\cdot} + R_0 x + L_0 \eta = F_0 u \tag{1.4}$$

$$\sigma = H_1 x + H_2 x^{\cdot} + H_3 \eta \tag{1.5}$$

Здесь $F_0 u$ – линейная часть управляющей силы F; матрица F_0 имеет размерность $m \times m$; $\sigma(l \times 1)$ – линейная часть вектора измерений Σ.

Матрицы H_1, H_2 имеют размерность $l \times r$; $H_3 - l \times m$; $A_0, D_0, W_0 - r \times r$; B_0, $L_0 - m \times m$; $P_0, R_0, S_0 - m \times r$; $C_0 - r \times m$ соответственно. Элементы этих матриц определяются выражениями:

$$A_0 = A(q_0), \quad B_0 = B(q_0), \quad C_0 = C(q_0), \quad D = \| D_{ij} \|$$

$$D_{ij} = -\left[\frac{\partial Q_i^N}{\partial q_j^{\cdot}} + \sum_{k=r+1}^{n}\left(\frac{\partial C_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial C_{jk}}{\partial q_i}\right)\omega_k + \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \gamma_j}{\partial q_i}\right)\right]\Bigg|_0$$

$$W = \| W_{ij} \|, \quad P_0^T = \| P_{i,\,k-r} \|$$

$$W_{ij} = \left[-\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{1}{2}\sum_{k,s=r+1}^{n}\frac{\partial^2 b_{ks}}{\partial q_i \partial q_j}\omega_k\omega_s - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 T_0}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial Q_i^N}{\partial q_j} - \sum_{k=r+1}^{N}\frac{\partial^2 \delta_k}{\partial q_i \partial q_j}\omega_k\right]\Bigg|_0$$

$$L_0 = \| L_{k-r,\,s-r} \|, \quad L_{k-r,\,s-r} = \frac{\partial Q_k^N}{\partial \omega_s}\Big|_0$$

$$P_{i,\,k-r} = \Big[\frac{\partial Q_i^N}{\partial \omega_k} + \frac{\partial \delta_k}{\partial q_i} + \sum_{s=r+1}^{n} \frac{\partial b_{ks}}{\partial q_i}\omega_s \Big]\Big|_0$$

$$S_{k-r,\,i} = \Big[\sum_{s=r+1}^{n} \frac{\partial b_{ks}}{\partial q_i}\omega_s + \frac{\partial \delta_k}{\partial q_i} - \frac{\partial Q_k^N}{\partial q_i^{\cdot}} \Big]\Big|_0$$

$$S_0 = \| S_{k-r,\,i} \|, \quad R_0 = \| R_{k-r,\,i} \|, \quad R_{k-r,\,i} = -\frac{\partial Q_k^N}{\partial q_i}\Big|_0$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, r) \quad (k, s = r+1, \ldots, n)$$

Если связи, наложенные на систему, стационарны ($T_1 \equiv 0$, $T_0 \equiv 0$), непотенциальные силы, действующие по циклическим координатам Q_k^N, отсутствуют, а действующие по позиционным координатам диссипативны $Q_j^N = Q_j d$, то в уравнениях (1.4) $S_0 = P_0$, $R_0 = 0$, $L_0 = 0$. Такой случай был рассмотрен ранее [3].

Отметим, что для гироскопически несвязанных систем (ГНС) ($C_0 = 0$) при $P_0 = 0$ управление u не влияет на позиционные координаты. Матрица P_0 обращается в нуль, в частности, при стационарных связях ($\delta = 0$), отсутствии непотенциальных сил ($Q_i^N = 0$) и для тривиальных установившихся движений ($\partial b_{ks}/\partial q_i|_0 = 0$). Однако из выражений для элементов $P_{i,\,k-r}$ следует, что матрица P_0 может обращаться в нуль также при соответствующем выборе непотенциальных сил Q_i^N, действующих по позиционным координатам. В общем случае даже в ГНС для тривиальных установившихся движений система (1.4) не расщепляется на две подсистемы, одна из которых не чувствительна к управлению, что представляет дополнительные возможности для стабилизации тривиальных установившихся движений ГНС.

Обсудим различные постановки задачи управления механическими системами с циклическими координатами в окрестности установившегося движения. При этом ограничимся рассмотрением задач, в которых управляющие воздействия вводятся только по циклическим координатам. Такая задача впервые была сформулирована в работах В.В. Румянцева и Л.К. Лилова [1, 2]. Наиболее распространенной является задача 1, заключающаяся в выборе управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость установившегося движения по позиционным и циклическим скоростям [1, 2]. Возможна и другая постановка задачи управления (задача 2), когда целью управления системой является обеспечение асимптотической устойчивости установившегося движения с наперед заданной скоростью затухания [3]. В задаче оптимальной стабилизации требуется выбрать управляющие воздействия так, чтобы обеспечить минимизацию некоторого функционала, характеризующего определенные требования к системе [5]. В этой связи аналогично постановке задачи об устойчивости по части переменных возможна также постановка задачи стабилизации по части переменных [6]. Фактически к этой задаче сводится задача стабилизации установившихся движений силами, приложенными по части циклических координат (это соответствует условию $\operatorname{rank} F_0 = m_1 < m$ в уравнениях (1.4). Подобная задача при отсутствии непотенциальных сил решалась методами теории устойчивости [7].

Решение всех перечисленных задач в первую очередь требует ответа на вопрос об их принципиальной разрешимости, что сводится к исследованию управляемости и стабилизируемости системы (1.4). При этом свойство стабилизируемости связано с задачей 1, а свойство управляемости – с задачей 2. Далее следует путем анализа наблюдаемости системы (1.4), (1.5) определить рациональный состав измерительной информации о состоянии системы (о величинах x, $x^{\cdot}$, η), необходимой для построения стабилизирующего управления. Затем на основе определенной измерительной информации можно построить алгоритм стабилизации, реализующий требуемые свойства замкнутой системы, например, решая задачу об оптимальной стабилизации, или вводя обратную связь по оценке вектора состояния [3].

2. Рассмотрим вопрос об управляемости (стабилизируемости) системы (1.4). Стандартный критерий управляемости Калмана приводит к необходимости анализа ранга матрицы размером $(n + r) \times (n + r)_m$. Специфика структуры системы (1.4) позволяет получить, осуществив редукцию задачи, новые эффективные критерии управляемости.

В общем случае если $m_1 < m$, при помощи линейного преобразования вектора управления $u = T_u v$, $(T_u(m \times m)$, $\det T_u \neq 0)$ вектор $F_0 u$ можно представить в виде

$$F_0 u = F_0 T_u v = \left\| \begin{matrix} E_{m_1} & 0 \\ F_{21} & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \right\| = F_v v_1 \tag{2.1}$$

$$\left(F_v = \left\| \begin{matrix} E_{m_1} \\ F_{21} \end{matrix} \right\|\right)$$

Матрицы F_v, F_{21}, v_1 имеют размеры

$m \times m_1$, $(m - m_1) \times m_1$, $m_1 \times 1$

Теорема 1. Система (1.4) порядка $n + r$ управляема (стабилизируема) тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\operatorname{rank} \left\| \begin{matrix} A_0\lambda^2 + D_0\lambda + W_0 \\ (C_{21}^T - F_{21}C_{11}^T)\lambda^2 + (S_{21} - F_{21}S_{11})\lambda + (R_{21} - F_{21}R_{11}) \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} C_0\lambda - P_0^T \\ (B_{21} - F_{21}B_{11})\lambda + (L_{21} - F_{21}L_{11}) \end{matrix} \right\| = n - m_1$$

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad \Lambda = \left\{ \lambda_i\colon \det \left\| \begin{matrix} A_0\lambda^2 + D_0\lambda + W_0 & C_0\lambda - P_0^T \\ C_0^T\lambda^2 + S_0\lambda + R_0 & B_0\lambda + L_0 \end{matrix} \right\| = 0 \right\} \tag{2.2}$$

$(\forall \lambda \in \Lambda^+$, $\Lambda^+ = \{\lambda \in \Lambda, \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$

Здесь матрицы

$$C_0^T = \left\| \begin{matrix} C_{11}^T \\ C_{21}^T \end{matrix} \right\|, \quad S_0 = \left\| \begin{matrix} S_{11} \\ S_{21} \end{matrix} \right\|, \quad B_0 = \left\| \begin{matrix} B_{11} \\ B_{21} \end{matrix} \right\|, \quad R_0 = \left\| \begin{matrix} R_{11} \\ R_{21} \end{matrix} \right\|, \quad L_0 = \left\| \begin{matrix} L_{11} \\ L_{21} \end{matrix} \right\|$$

$C_1^T(m_1 \times r)$, $C_{21}^T((m - m_1) \times r)$, $B_{11}(m_1 \times m)$, $B_{21}((n - m_1) \times m)$

разбиты на блоки в соответствии с представлением (2.1).

Для доказательства теоремы следует представить систему (1.4) в форме Коши (при учете соотношения (2.1))

$$M_z z^{\cdot} = A_z z + B_z v_1 \tag{2.3}$$

$$M_z = \left\| \begin{matrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & C_0 \\ 0 & C_0^T & B_0 \end{matrix} \right\|, \quad A_z = \left\| \begin{matrix} 0 & E_r & 0 \\ -W_0 & -D_0 & P_0^T \\ -R_0 & -S_0 & -L_0 \end{matrix} \right\|$$

$$B_z = \| 0 \;\; 0 \;\; F_v^T \|^T, \quad z = \| x^T \;\; x^{\cdot T} \;\; \eta^T \|^T$$

и воспользоваться критерием управляемости [8]: система (2.3) управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}(A_z - \lambda M_z, B_z) = n + r, \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

$$\Lambda = \{\lambda_i\colon \det(A_z - \lambda M_z) = 0\}$$

Если множество Λ содержит нулевой корень кратности ν, т.е.

$$\operatorname{rank} \left\| \begin{matrix} W_0 & -P_0^T \\ R_0 & L_0 \end{matrix} \right\| = n - \nu$$

то из доказательства теоремы 1 следует утверждение: для управляемости системы

(1.4), когда ее характеристическое уравнение содержит нулевой корень кратности ν, необходимо, чтобы размерность вектора управления удовлетворяла условию $m_1 \geqslant \nu$.

Заметим, что это утверждение для управления механической системой с циклическими координатами в окрестности установившегося движения соответствует утверждению для управления механической системой в окрестности положения равновесия [9, 10]. Из теоремы 1, когда количество управляющих воздействий равно числу циклических координат ($m_1 = m,\ F_v = E_m$), следует

Теорема 2. Система (1.4) порядка $n + r$ управляема (стабилизируема) тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\operatorname{rank} \| A_0\lambda^2 + D_0\lambda + W_0 \quad C_0\lambda - P_0^T \| = r \tag{2.4}$$

$$\forall \lambda \in \Lambda_1 \quad (\forall \lambda \in \Lambda_1^+)$$

$$\Lambda_1 = \{\lambda_i \quad \det(A_0\lambda^2 + D_0\lambda + W_0) = 0\}$$

Сопоставляя условие (2.4) с критериями управляемости и наблюдаемости для систем второго порядка [11], сформулируем утверждение, позволяющее свести исследование управляемости исходной системы (1.4) порядка $m + 2r$ к анализу наблюдаемости некоторой системы порядка $2r$.

Теорема 3. Для управляемости системы (1.4) необходимо и достаточно, чтобы наблюдалась система

$$A_0 y^{\cdot\cdot} + D_0^T y^{\cdot} + W_0^T y = 0, \qquad \sigma = -P_0 y + C_0^T y^{\cdot} \tag{2.5}$$

порядка $2r$.

Отметим, что для анализа наблюдаемости системы (2.5) могут быть использованы критерии и другого типа. В частности, если связи, наложенные на систему, стационарны и $Q_k^N = 0$ $(k = r + 1, \ldots, n)$, $Q_j^N = Q_{jd}$ $(j = 1, \ldots, r)$, то из теорем 2, 3 следуют теоремы, приведенные ранее [3].

Для ГНС ($C_0 = 0$) теорема 3 может быть сформулирована в следующем виде.

Следствие 3.1. Для управляемости ГНС (1.4) порядка $2r + m$ необходимо и достаточно, чтобы была управляема система

$$A_0 y^{\cdot\cdot} + D_0 y^{\cdot} + W_0 y = P_0^T u$$

порядка $2r$.

Для гироскопически связанной системы (ГСС) $P_0 = 0$ из теорем 2, 3 можно вывести следующее

Следствие 3.2. Если в ГСС (14) матрица $P_0 = 0$, то эта система управляема тогда и только тогда, когда $\det W_0 \neq 0$ и управляема система

$$A_0 y^{\cdot\cdot} + D_0 y^{\cdot} + W_0 y = C_0 u$$

Следствие 3.3. Если в системе одна позиционная координата ($r = 1$), то система (1.4) управляема тогда и только тогда, когда

$$\lambda C_0 \neq P_0^T \quad \text{A}\, \lambda \in \Lambda_1$$

3. Рассмотрим вопрос о наблюдаемости системы (1.4).

В общем случае, когда измерения представляются в виде (1.5) и $H_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, условия наблюдаемости можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4. Система (1.4) порядка $n + r$ наблюдаема по измерению (1.5) тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\operatorname{rank} N = n \quad \forall \lambda \in \Lambda \tag{3.1}$$

$$A_0\lambda^2 + D_0\lambda + W_0 \qquad C_0\lambda - P_0^T$$

$$N = \left\| \begin{matrix} C_0\lambda^2 + S_0\lambda + R_0 & B_0\lambda + L_0 \\ H_2\lambda + H_1 & H_3 \end{matrix} \right\|$$

Если среди корней характеристического уравнения системы (1.4) содержится нулевой корень кратности ν, т.е. выполнено условие (2.4), то из теоремы 4 следуют утверждения.

Следствие 4.1. Для наблюдаемости системы (1.4) в том случае, когда множество Λ содержит нулевой корень кратности ν, необходимо, чтобы число измерений l удовлетворяло условию $l \geqslant \nu$.

Следствие 4.2. Система (1.4) ненаблюдаема по измерению $\sigma = H_1x + H_2x^{\boldsymbol{\cdot}}$, если $P_0 = 0$ и $L_0 = 0$.

Пусть измеряются только позиционные координаты ($H_2 = 0$, $H_3 = 0$) и $\operatorname{rank} H_1 = l < r$) или позиционные скорости ($H_1 = 0$, $H_3 = 0$, $\operatorname{rank} H_2 = l < r$). Преобразовав измерение, представим в первом случае матрицу H_1 в виде $H_1 = \| E_l H_{12} \|$, а во втором – матрицу H_2 в виде $H_2 = \| E_l H_{22} \|$.

Введем матрицу

$$N_i = \left\| \begin{matrix} (A_{12} - A_{11}H_{i2})\lambda^2 + (D_{12} - D_{11}H_{i2})\lambda + \\ \quad + (W_{12} - W_{11}H_{i2}) & C_0\lambda - P_0^T \\ \\ (C_{12}^T - C_{11}^T H_{i2})\lambda^2 + (S_{12} - S_{11}H_{i2})\lambda + \\ \quad + (R_{12} - R_{11}H_{i2}) & B_0\lambda + L_0 \end{matrix} \right\|$$

Следствие 4.3. Система (1.4) порядка $n + r$ по измерению позиционных координат $\sigma = H_1x$ наблюдаема тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} N_1 = n - l \quad \forall \lambda \in \Lambda$.

Следствие 4.4. Система (1.4) порядка $n + r$ по измерению позиционных скоростей $\sigma = H_2x^{\boldsymbol{\cdot}}$ наблюдаема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank} N_2 = n - l \quad \forall \lambda \in \Lambda,$$

причем множество Λ не содержит значений $\lambda = 0$.

В отличие от случая стационарных связей и отсутствия непотенциальных сил, действующих по циклическим координатам, когда множество всегда содержит нулевые корни и система (1.4) ненаблюдаема по измерению $\sigma = H_2x^{\boldsymbol{\cdot}}$ [3], здесь, как показывает следствие 4.4, ненаблюдаемость возможна.

Рассмотрим случай, когда измеряются лишь циклические скорости

$$H_1 = H_2 = 0, \qquad \operatorname{rank} H_3 = l < m$$

Представив матрицу H_3 в виде $H_3 = \| H_{31} E_l \|$ и проведя соответствующее разбиение матриц B_0, L_0 и P_0, C_0 на блоки вида

$$\| \Phi_{21} \quad \Phi_{22} \| \quad \text{и} \quad \| \psi_{21} \quad \psi_{22} \|$$

$$(\Phi_{21}(m \times (m - l)), \quad \Phi_{22}(m \times l), \quad \psi_{21}(r \times (m - l)), \quad \psi_{22}(r \times l))$$

сформулируем

Следствие 4.5. Система (1.4) порядка $n + r$ по измерению циклических скоростей $\sigma = H_3\eta$ наблюдаема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank} \left\| \begin{matrix} A_0\lambda^2 + D_0\lambda + W_0 & (-P_{21}^T + P_{22}^T H_{31}) + (C_{21} - C_{22}H_{31})\lambda \\ S_2\lambda + R_2 & (B_{21} - B_{22}H_{31})\lambda + (L_{21} - L_{22}H_{31}) \end{matrix} \right\| = n - l \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Здесь $S_2 = S_0 - C_0^T A_0^{-1} D_0$, $R_2 = R_0 - C_0^T A_0^{-1} W_0$

Это утверждение можно доказать, используя равенство

$$\begin{Vmatrix} A_0\lambda^2 + D_0\lambda + W_0 & C_0\lambda - P_0^T \\ C_0^T\lambda^2 + S_0\lambda + R_0 & B_0\lambda + L_0 \\ 0 & H_3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} E_r & 0 & 0 \\ C_0^T A_0^{-1} & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_l \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_0\lambda^2 + D_0\lambda + W & -P_0^T + C_0\lambda \\ S_2\lambda + R_2 & B_0\lambda + L_0 \\ 0 & H_3 \end{Vmatrix}$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда измеряются либо все позиционные координаты ($\sigma = x$), либо все позиционные скорости ($\sigma = x^{\cdot}$), либо все циклические скорости ($\sigma = \eta$). Целесообразность такого рассмотрения определяется тем, что в этих случаях исследование наблюдаемости системы (1.4) порядка $n + r$ сводится к исследованию наблюдаемости системы меньшего порядка.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 5. Для наблюдаемости системы (1.4) порядка $2r + m$ по измерению всех позиционных координат необходимо и достаточно, чтобы была наблюдаема система порядка m

$$B_0\chi^{\cdot} + L_0\chi = 0, \quad \sigma = P_2^T\chi \tag{3.2}$$

$$P_2^T = P_0^T + C_0 B_0^{-1} L_0$$

Система (3.2) наблюдаема тогда и только тогда, когда выполнено условие [8]

$$\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} P_2^T \\ B_0\lambda + L_0 \end{Vmatrix} = m, \quad \forall\lambda \in \Lambda_2$$

$$\Lambda_2 = \{\lambda\colon \det(B_0\lambda + L_0) = 0\}$$

Теорема 6. Для наблюдаемости системы (1.4) по измерению всех позиционных скоростей необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\det\begin{Vmatrix} W_0 & -P_0^T \\ R_0 & L_0 \end{Vmatrix} \neq 0$$

и была наблюдаема система (3.2) порядка m.

Теорема 7. Для наблюдаемости системы (1.4) порядка $2r + m$ по измерению всех циклических скоростей необходимо и достаточно, чтобы была наблюдаема система $A_0\chi^{\cdot\cdot} + D_0\chi^{\cdot} + W_0\chi = 0$, $\sigma = S_2\chi^{\cdot} + R_2\chi$ порядка $2r$.

Это утверждение равносильно условию [11]

$$\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} A_0\lambda^2 + D_0\lambda + W_0 \\ S_2\lambda + R_2 \end{Vmatrix} = r, \quad \forall\lambda \in \Lambda_1$$

Доказательства этих теорем можно получить, основываясь на представлении системы (1.4) в форме (2.3) и используя теорему [12] об эквивалентности условий наблюдаемости системы (2.3) с измерением $\sigma = H_2 z$ и системы

$$M_z z = (A_z - K_z H_z) z + B_z v_1, \quad \sigma = H_z z$$

$$(K_z = \text{const})$$

Установив при помощи сформулированных выше теорем условия управляемости и наблюдаемости системы (1.4), (1.5), можно построить алгоритм стабилизации аналогично сделанному ранее [3].

4. ***Пример.*** Рассмотрим задачу стабилизации установившихся движений симметричного ротора массы m, закрепленного с некоторым эксцентриситетом l посередине упругого вала. Здесь, как и во многих работах, примем (см., например, [13–15]) предположение о том, что ротор совершает плоскопараллельное движение. В плоскости движения выберем начало подвижной системы координат в точке O пересечения этой плоскости с прямой, соединяющей центры опор вала. Ось x_1 направим параллельно отрезку $G\epsilon$ ($|G\epsilon| = l$), соединяющему центр масс ротора G и точку ϵ закрепления его на валу. Обозначим: $x_1 x_2$ – координаты центра масс G, φ – угол между осью x_1 и некоторым неподвижным направлением ξ_1.

Кинетическая энергия ротора и силовая функция упругого взаимодействия имеют вид [14]

$$T = \tfrac{1}{2}m[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\dot\varphi(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) + \dot\varphi^2(x_1^2 + x_2^2)] + \tfrac{1}{2}J\dot\varphi^2$$

$$U = \tfrac{1}{2}[c_1x_2^2 + c_2(x_1 + l)^2]$$

Здесь c_1, c_2 – главные жесткости вала при изгибе. Центральный момент инерции ротора обозначим через $J = m\rho^2$, где ρ – радиус инерции ротора.

Будем считать, что на ротор действуют силы внешнего и внутреннего трения, при этом предполагая силу внешнего трения пропорциональной абсолютной скорости центра масс, а силу внутреннего трения – относительной скорости [14].

Рассматриваемая система гироскопически связана: координаты x_1, x_2 являются позиционными, φ – циклической. Координате φ отвечает обобщенная управляющая сила F (момент привода), подлежащая выбору.

Уравнения движения допускают частное решение, описывающее установившееся движение ротора

$$x_{10} = c_1\kappa_2 l/\Delta, \quad x_{20} = -c_1 a\omega_0 l/\Delta, \quad \dot\varphi = \omega_0 = \text{const}$$
$$\Delta = \kappa_1\kappa_2 + a^2\omega_0^2, \quad \kappa_j = c_j - \omega_0^2 \quad (j = 1, 2) \tag{4.1}$$

Момент F_0, соответствующий установившемуся движению (4.1), определяется соотношением $F_0 = a\omega_0(x_{10}^2 + x_{20}^2)$. В частности, при $a = 0$ установившееся движение (4.1) существует при $\kappa_j \neq 0$.

Известно [14], что существует область изменения угловой скорости ω_0, в которой установившееся движение (4.1) неустойчиво, и для его стабилизации необходимо дополнительное управляющее воздействие.

Линеаризованные уравнения возмущенного движения ротора имеют вид (1.4), где $x = \| x_1 x_2 \|^T$, η – скаляр, причем:

$$A_0 = E_2, \quad D_0 = (a + b)E_2 + 2\omega_0 I_2, \quad W_0 = \left\| \begin{matrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{matrix} \right\| + a\omega_0 I_2$$

$$C_0^T = \| -x_{20} \;\; x_{10} \|, \quad P_0 = S_0 = \| 2\omega_0 x_{10} - ax_{20}, \; 2\omega_0 x_{20} + ax_{10} \|$$

$$B_0 = \rho^2, \quad R_0 = \| 2a\omega_0 x_{10} \;\; 2a\omega_0 x_{20} \|, \quad L_0 = ar_0^2$$

$$r_0^2 = x_{10}^2 + x_{20}^2, \quad F_0 = 1, \quad I_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Условие управляемости в этой задаче, полученное на основании теоремы 2, имеет вид

$$[\lambda^2 + (a + b)\lambda + \kappa_1][\lambda^2 + (a + b)\lambda + \kappa_2] + \omega_0^2(2\lambda + a)^2 \neq 0$$
$$\lambda = -\frac{\omega_0 r_0^2(2\kappa_1 + a^2) + \epsilon x_{10}(2\omega_0 x_{10} - ax_{20})}{\omega_0 r_0^2(3a + 2b) + \epsilon x_{10}x_{20}}, \quad \epsilon = \kappa_2 - \kappa_1 \tag{4.2}$$

Условие (4.2) нарушается лишь при определенном соотношении между параметрами системы. Отметим ряд частных случаев.

1°. *Круглый вал* ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, $\epsilon = 0$). Условие нарушения управляемости имеет вид

$$\kappa = \tfrac{1}{4}a(\tfrac{1}{2}a + b) \tag{4.3}$$

В частности, при $a = 0$ система всегда управляема в окрестности движения (4.1). Заметим, что в работе [16], где рассмотрен только случай $a = 0$, $\kappa_1 = \kappa_2$, при получении условий управляемости была допущена неточность, в результате которой возникло несуществующее условие нарушения управляемости.

2°. ***Внешнее трение отсутствует*** ($a = 0$). Условие нарушения управляемости имеет вид

$$\kappa_1 = \kappa_2 - 4\omega_0^2 - \kappa_2^2/b^2 \tag{4.4}$$

Условие (4.4) может быть выполнено только при $\kappa_1 \neq \kappa_2$ и $b > 2\sqrt{c_1 + 3\omega_0^2}$.

Можно показать, что при измерении позиционных координат (x_1, x_2) система (1.4) для рассматриваемой задачи всегда наблюдаема; при измерении позиционных скоростей $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ система наблюдаема всегда, за исключением случая, когда параметры системы удовлетворяют условию

$$a[(\kappa_1\kappa_2 + 3a^2\omega_0^2)r_0 + 4\omega_0^2(\kappa_2 x_{10}^2 + \kappa_1 x_{20}^2) - 2a\omega_0 x_{10}x_{20}\epsilon] = 0$$

Очевидно, что при отсутствии внешнего трения $(a = 0)$ система ненаблюдаема.

По измерению циклической скорости $(\sigma = \eta)$ рассматриваемая система согласно теореме 7 всегда наблюдаема, за исключением следующих случаев:

1) $(\kappa_1 - ab)(\kappa_2 - ab) + a^2\omega_0^2 = 0$

2) $[\lambda^2 + (a + b)\lambda + \kappa_1][\lambda^2 + (a + b)\lambda + \kappa_2] + \omega_0^2(2\lambda + a)^2 = 0$

$$\left(\lambda = -\frac{2\omega_0(r_0^2\kappa_1 + \epsilon x_{10}^2)}{(a + 2b)\omega_0 r_0^2 - \epsilon x_{10}x_{20}}\right)$$

Для круглого вала условие нарушения наблюдаемости совпадает с условием (4.3). При отсутствии внешнего трения условие нарушения наблюдаемости совпадает с условием (4.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В.В.* Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 966–976.
2. *Лилов Л.К.* О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 977–985.
3. *Каленова В.И., Морозов В.М., Салмина М.А.* К задаче стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 707–714.
4. *Самсонов В.А.* О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1983. Т. 45. Вып. 3. С. 512–520.
5. *Румянцев В.В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем. // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 440–456.
6. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
7. *Красинский А.Я., Ронжин В.В.* К стабилизации установившихся движений механических систем с циклическими координатами. // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 542–548.
8. *Hautus M.L.J.* Controllability and observability conditions of linear autonomous systems // Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Ser. A. 1969. V. 72. P. 443–448.
9. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
10. *Лилов Л.К.* О некоторых свойствах размерности воздействия стабилизирующего механическую систему // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 2. С. 290–299.
11. *Laub A.J., Arnold W.F.* Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models // IEEE Trans. Automat. Control. 1984. V. AC–29. n2. P. 163–165.
12. *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970. 453 с.
13. *Диментберг Ф.М.* Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во АН СССР. 1959. 247 с.
14. *Пановко Я.Г.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1985. 287 с.
15. *Клоков А.С., Самсонов В.А.* Стабилизируемость вращения ротора, эксцентрично закрепленного на гибком валу // Проблемы механики управляемых систем и механизмов. Тр. МЭИ. 1985. № 77. С. 38–42.
16. *Атанасов В.А., Лилов Л.К.* О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 713–718.

Москва

Поступила в редакцию
22.VII.1991