Прикладная математика и механика, Том 56, вып. 6, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. Г.Н. Мильштейн, Л.Б. Ряшко

УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ОРБИТ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Получены как необходимые, так и достаточные условия экспоненциальной орбитальной устойчивости в среднем квадратичном периодических движений стохастических систем, опирающиеся на метод орбитальных функций Ляпунова. На основе достаточного критерия дается метод стабилизации орбит.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dx = f(x)\,dt \tag{1.1}$$

где x – n-мерный вектор, а $f(x)$ – вектор-функция соответствующей размерности. Пусть $x = \xi(t)$ – T-периодическое решение системы (1.1), отличное от точки покоя, и γ-фазовая траектория этого решения (орбита). Необходимые и достаточные условия экспоненциальной орбитальной устойчивости, связанные с теоремой Андронова – Витта и ее аналогами [1–4], относятся к первому методу Ляпунова. В [5] разработан способ, сводящий исследование устойчивости орбиты к исследованию устойчивости точки покоя. Основным методом анализа устойчивости систем со случайными возмущениями (см. [6, 7]) является второй метод Ляпунова. Для детерминированных систем (1.1) был предложен [8] метод орбитальных функций Ляпунова, который распространяется здесь на стохастические системы вида

$$dx = f(x)\,dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(x)\,dw_r(t) \tag{1.2}$$

В (1.2) $\sigma_r(x)$ $(r = 1, \ldots, m)$ – вектор-функции соответствующей размерности, $w_r(t)$ $(r = 1, \ldots, m)$ – независимые стандартные винеровские процессы. Предполагается, что случайные помехи в (1.2) таковы, что $x = \xi(t)$ остается T-периодическим решением, т.е.

$$\sigma_r(\xi(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t < T.$$

Пусть U – окрестность орбиты γ, такая, что для любой точки $x \in U$ однозначно найдется величина $\vartheta(x)$, $0 \leqslant \vartheta(x) \leqslant T$, для которой $\xi(\vartheta(x))$ является ближайшей к x точкой траектории γ. Понятно, что вектор

$$\Delta(x) = x - \xi(\vartheta(x))$$

являющийся отклонением от орбиты, ортогонален вектору $f(\xi(\vartheta(x)))$. Предположим, что существует окрестность U с только что отмеченным свойством, являющаяся инвариантной как относительно системы (1.1), так и относительно системы (1.2). Для системы (1.1) такая окрестность U существует, если орбита γ экспоненциально орбитально устойчива. Если U инвариантна для системы (1.1) и коэффициенты диффузии $\sigma_r(x)$ $(r = 1, \ldots, m)$ обращаются в нуль вне некоторого компакта, целиком принадлежащего U, то U будет инвариантной и для стохастической системы (1.2).

Определение. Периодическое решение $\xi(t)$ системы (1.2) называется экспоненциально орбитально устойчивым в среднем квадратичном (ЭОСК-устойчивым) в инвариантной окрестности U, если существуют такие $\alpha > 0$, $K > 0$, что

$$E\,|\,\Delta(x(t))\,|^2 \leqslant Ke^{-\alpha t}\,|\,\Delta(x_0)\,|^2 \tag{1.3}$$

для любых $x_0 \in U$. В (1.3) $x(t)$ – решение (1.2), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$.

В этой работе даются как необходимые, так и достаточные условия ЭОСК-устойчивости, опирающиеся на метод орбитальных функций Ляпунова. Использование достаточного критерия позволяет решить задачу о стабилизации периодического движения $\xi(t)$ системы (1.2).

2. Важную роль при исследовании вопросов устойчивости стохастических систем (см. [7]) играет производящий дифференциальный оператор

$$Lv(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j}\sigma_{ri}(x)\sigma_{rj}(x) = \tag{2.1}$$

$$= \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x},\ f(x)\right) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\left(\sigma_r(x),\ \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}\sigma_r(x)\right)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} = \left[\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right]^T,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1}^{n}\right)$$

Введем обозначения

$$V(\tau) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 v(\xi(\tau))}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1}^{n}$$

$$F(\tau) = \left[\frac{\partial f_i(\xi(\tau))}{\partial x_j}\right]_{i,j=1}^{n},\qquad S_r(\tau) = \left[\frac{\partial \sigma_{ri}(\xi(\tau))}{\partial x_j}\right]_{i,j=1}^{n}$$

Здесь $V(\tau)$, $F(\tau)$, $S_r(\tau)$ – T-периодические $(n \times n)$-матрицы.

Следующая лемма является распространением на стохастический случай соответствующей леммы из [8].

Лемма. Пусть в окрестности U орбиты γ достаточно гладкая функция $v(x)$ удовлетворяет условиям $v(x) \geqslant 0$, $v(\xi(\tau)) = 0$, $0 \leqslant \tau < T$. Тогда

$$V(\tau) f(\xi(\tau)) = 0 \tag{2.2}$$

и при $x \in U$

$$v(x) = (x - \xi(\tau))^T V(\tau)(x - \xi(\tau)) + \delta_1(x, \xi(\tau)) \tag{2.3}$$

$$R(x) \triangleq Lv(x) = (x - \xi(\tau))^T W(\tau)(x - \xi(\tau)) + \delta_2(x, \xi(\tau)) \tag{2.4}$$

$$\left(W(\tau) = \dot V(\tau) + F^T(\tau)V(\tau) + V(\tau)F(\tau) + \sum_{r=1}^{m} S_r^T(\tau)V(\tau)S_r(\tau)\right)$$

а функции $\delta_i(x, y)$ таковы, что $|\,\delta_i(x, y)\,| \leqslant \beta_i\,|\,x - y\,|^3$, $\beta_i > 0$ $(i = 1, 2)$.

Обозначим через $P(f)$ матрицу, соответствующую оператору проектирования на подпространство, ортогональное вектору $f \neq 0$; $P(f) = I - |f|^{-2} f f^T$, I – единичная матрица. Обозначим $P_\tau = P(f(\xi(\tau)))$. Квадратичную форму $x^T A x$, а также симметрическую матрицу A будем называть $P(f)$ – положительно-определенной и писать $A \overset{P(f)}{>} 0$ ($P(f)$ – неотрицательно-определенной и писать $A \overset{P(f)}{\geqslant} 0$), если для любого вектора $x \neq 0$, ортогонального вектору f, выполняется неравенство $x^T A x > 0$ $(x^T A x \geqslant 0)$.

Теорема 1. Пусть для некоторой T-периодической P_τ-положительно-определенной матрицы $C(\tau)$ существует T-периодическая положительно-определенная матрица $V(\tau)$, такая, что

$$\dot{V}(\tau)+F^T(\tau)V(\tau)+V(\tau)F(\tau)+\sum_{r=1}^{m} S_r^T(\tau)V(\tau)S_r(\tau)=-P_\tau C(\tau)P_\tau \tag{2.5}$$

Пусть коэффициенты диффузии $\sigma_r(x)$ системы (1.2) обращаются в нуль вне r-трубы $U_r=\{x\colon \Delta^T(x)V(\vartheta(x))\Delta(x)<r\}$ при достаточно малом r. Тогда T-периодическое решение $\xi(t)$ системы (1.2) является ЭОСК-устойчивым в множестве U_{r_1}, при некотором $r_1>r$.

Если T-периодическое решение $\xi(t)$ системы (1.2) является ЭОСК-устойчивым в некоторой инвариантной окрестности U, то для любой T-периодической P_τ-положительно-определенной матрицы $C(\tau)$ существует T-периодическая P_τ-положительно-определенная матрица $V(\tau)$, удовлетворяющая уравнению (2.5).

Доказательство. Достаточность. Пусть $V(\tau)$ – матрица, удовлетворяющая условиям теоремы. Существует некоторое $r_0>0$, для которого функция $\vartheta(x)$ определена в области U_{r_0}. Тогда в U_{r_0} определена и функция $v(x)=\Delta^T(x)V(\vartheta(x))\Delta(x)$. Из леммы (в (2.4) полагаем $\tau=\vartheta(x)$) и (2.5) следует соотношение

$$Lv(x)=-\Delta^T(x)C(\vartheta(x))\Delta(x)+\delta_2(x,\xi(\vartheta(x))) \tag{2.6}$$

Благодаря $P_{\vartheta(x)}$-положительно-определенности матриц $V(\vartheta(x))$, $C(\vartheta(x))$ найдутся такие положительные числа m, M и α, что

$$\begin{gathered} m\,|\Delta(x)|^2\leqslant v(x)\leqslant M\,|\Delta(x)|^2\\ \alpha\,|\Delta(x)|^2\leqslant \Delta^T(x)C(\vartheta(x))\Delta(x)\end{gathered} \tag{2.7}$$

Из (2.7) вытекает

$$-\Delta^T(x)C(\vartheta(x))\Delta(x)\leqslant -\alpha M^{-1}v(x) \tag{2.8}$$

Из леммы и (2.7) следуют неравенства

$$|\delta_2(x,\xi(\vartheta(x)))|\leqslant \beta_2\,|\Delta(x)|^3\leqslant \beta_2 m^{-1}|\Delta(x)|\,v(x) \tag{2.9}$$

Из (2.6), (2.8) и (2.9) получаем неравенство, справедливое в U_{r_0}

$$Lv(x)\leqslant(\beta_2 m^{-1}|\Delta(x)|-\alpha M^{-1})v(x)$$

Всегда найдется такое $r_1\leqslant r_0$, что в $U_{r_1}\subseteq U_{r_0}$ будет справедливо неравенство

$$\beta_2 m^{-1}|\Delta(x)|-\alpha M^{-1}\leqslant -\tfrac{1}{2}\alpha M^{-1}$$

откуда в свою очередь следует

$$Lv(x)\leqslant -\tfrac{1}{2}\alpha M^{-1}v(x) \tag{2.10}$$

Предположим теперь, что коэффициенты диффузии системы (1.2) обращаются в нуль вне U_r, при некотором $r<r_1$. В этом случае область U_{r_1}, будучи инвариантной для детерминированной системы (1.1) (это вытекает из того, что V – функция Ляпунова для детерминированной системы), остается инвариантной и для стохастической системы (1.2). Из формулы Ито получаем

$$\frac{d}{dt}\,[Ev(x(t))]=ELv(x(t)) \tag{2.11}$$

Из (2.10), (2.11) следует, что для любого $x_0\in U_{r_1}$ выполняется неравенство

$$Ev(x(t))\leqslant \exp(-\tfrac{1}{2}\alpha M^{-1}t)Ev(x_0)$$

Наконец, используя (2.7), получим

$$E\,|\,\Delta(x(t))\,|^2 \leqslant Mm^{-1}\exp(-\tfrac{1}{2}\alpha M^{-1}t)E\,|\,\Delta(x_0)\,|^2$$

ЭОСК-устойчивость доказана.

Необходимость. Благодаря ЭОСК-устойчивости системы (1.2) в U определена функция

$$v(x) = E\int_0^\infty \Delta^T(x(s))C(\vartheta(x(s)))\Delta(x(s))ds$$

где $x(t)$ – решение системы (1.2) с начальным условием $x(0) = x$. Из P_τ-положительно-определенности матрицы $C(\tau)$ следует, что функция $v(x)$ удовлетворяет условиям леммы, а матрица $V(\tau) = \tfrac{1}{2}[\partial^2 v(\xi(\tau))/\partial x_i\partial x_j]_{i,j=1}^n$ является P_τ-положительно-определенной. Поскольку

$$Ev(x(t)) - v(x) = -E\int_0^t \Delta^T(x(s))C(\vartheta(x(s)))\Delta(x(s))\,ds$$

то

$$d/dt\,Ev(x(t)) = -\Delta^T(x)C(\vartheta(x))\Delta(x) \tag{2.12}$$

С другой стороны, из формулы Ито и (2.4) следует, что

$$d/dt\,Ev(x(0)) = ELv(x) = \Delta^T(x)W(\vartheta(x))\Delta(x) + \delta_2(x, \xi(\vartheta(x))) \tag{2.13}$$

где

$$W(\tau) = V^{\cdot}(\tau) + F^T(\tau)V(\tau) + V(\tau)F(\tau) + \sum_{r=1}^m S_r^T(\tau)V(\tau)S_r(\tau)$$

Из (2.12), (2.13) вытекает, что $P_\tau W(\tau)P_\tau = -P_\tau C(\tau)P_\tau$. Поскольку $P_\tau W(\tau)P_\tau = W(\tau)$, то справедливо равенство (2.5). Необходимость доказана.

Теорема 2. Пусть вместо предположения в теореме 1 о P_τ-положительной определенности матрица $C(\tau)$ удовлетворяет условиям

$$C(\tau) - \alpha(\tau)I \overset{P_\tau}{\geqslant} 0 \tag{2.14}$$

$$\int_0^T \alpha(\tau)d\tau > 0 \tag{2.15}$$

где $\alpha(\tau)$ – некоторая T-периодическая функция. Тогда выполняется утверждение об ЭОСК-устойчивости.

Доказательство. В теореме 1 рассмотрен случай $\alpha(\tau) \geqslant \alpha > 0$. Сведем теперь более общий случай (2.15) к рассмотренному. Для этого достаточно по матрице $V(\tau)$ из теоремы 2 построить матрицу $Z(\tau)$, удовлетворяющую равенству

$$Z^{\cdot}(\tau) + F^T(\tau)Z(\tau) + Z(\tau)F(\tau) + \sum_{r=1}^m S_r^T(\tau)Z(\tau)S_r(\tau) = -P_\tau D(\tau)P_\tau \tag{2.16}$$

с матрицей $D(\tau)$, такой, что при некотором $\mu > 0$ матрица $D(\tau) - \mu I$ является P_τ-неотрицательно-определенной. Матрицу $Z(\tau)$ будем строить в виде $Z(\tau) = \rho(\tau)V(\tau)$, где $\rho(\tau) > 0$ – дифференцируемая T-периодическая функция. Благодаря (2.5) и равенству $V(\tau) = P_\tau V(\tau)P_\tau$ соотношение (2.16) будет выполняться, если положить

$$D(\tau) = -\rho'(\tau)V(\tau) + \rho(\tau)C(\tau)$$

Из (2.14) следует неравенство

$$D(\tau) \overset{P_\tau}{\geqslant} -\rho'(\tau)V(\tau) + \rho(\tau)\alpha(\tau)I$$

Далее, из (2.7) вытекает, что

$$D(\tau) \overset{P_\tau}{\geqslant} [-\rho'(\tau)+\alpha(\tau)M^{-1}\rho(\tau)]\,V(\tau) \overset{P_\tau}{\geqslant} m[-\rho'(\tau)+\alpha(\tau)M^{-1}\rho(\tau)]\,I \tag{2.17}$$

Пусть $\rho(\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\rho'(\tau)-\alpha(\tau)M^{-1}\rho=-k\rho \tag{2.18}$$

где k – некоторая постоянная. Решением этого уравнения является положительная функция

$$\rho(t)=\exp\int_0^t(\alpha(s)M^{-1}-k)ds$$

Из требования ее T-периодичности получим относительно k уравнение

$$1=\exp\int_0^T(\alpha(s)M^{-1}-k)\,ds$$

из которого найдем

$$k=\frac{1}{TM}\int_0^T\alpha(s)ds$$

Из (2.17), (2.18) следует неравенство

$$D(\tau) \overset{P_\tau}{\geqslant} mk\rho(\tau)I \overset{P_\tau}{\geqslant} mk\min_{[0,T]}\rho(\tau)I$$

т.е. в качестве $\mu>0$ можно взять $\mu=mk\min\limits_{[0,T]}\rho(\tau)$. Теорема 2 доказана

Ранее [9] вопрос об устойчивости точки покоя сложной стохастической системы с несколькими шумами сводится к отысканию значения некоторого критерия, вычисляемого для более простой системы с меньшим числом шумов (в частности, для детерминированной системы). Возможности такого подхода при исследовании ЭОСК-устойчивости демонстрируются в следующей теореме.

Теорема 3. Пусть T-периодическое решение $\xi(t)$ детерминированной системы (1.1) экспоненциально орбитально устойчиво, коэффициенты диффузии системы (1.2) вне достаточно малой окрестности U_r равны нулю, а в U_r удовлетворяют неравенству

$$\sum_{r=1}^m|\sigma_r(x)|^2\leqslant\mu(\vartheta(x))\Delta^T(x)\Gamma(\vartheta(x))\Delta(x) \tag{2.19}$$

где $\mu(\tau)\geqslant0$ – T-периодическая функция, $\Gamma(\tau)$ – T-периодическая P_τ-положительно-определенная матрица. Пусть $V(\tau)$ – T-периодическая P_τ-положительно-определенная матрица – решение детерминированного уравнения Ляпунова

$$V^{\cdot}(\tau)+F^T(\tau)V(\tau)+V(\tau)F(\tau)=-P_\tau\Gamma(\tau)P_\tau \tag{2.20}$$

Тогда неравенство

$$\frac{1}{T}\int_0^T\mu(s)\,\mathrm{tr}\,V(s)ds<1 \tag{2.21}$$

является достаточным условием ЭОСК-устойчивости решения $\xi(t)$ системы (1.2) в U_{r_1} при некотором $r_1>r$.

Доказательство. Пусть $v(x)=\Delta^T(x)V(\vartheta(x))\Delta(x)$, где $V(\tau)$ – T-периодическая P_τ-положительно-определенная матрица решения детерминированного уравнения Ляпунова (2.20). (Отметим, что, благодаря ЭО-устойчивости, такая матрица всегда существует.) При условии (2.19) для функции $R(x) = Lv(x)$ существует мажоранта

$$\bar{R}(x) = (\frac{\partial v(x)}{\partial x}, f(x))' + \mu(\vartheta(x))\Delta^T(x)\Gamma(\vartheta(x))\Delta(x) \operatorname{tr} [\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}]$$

Далее, используя, как и в лемме, разложения для $(\partial v(x)/\partial x, f(x))$ и $\frac{1}{2}\partial^2 v(x)/\partial x^2$, получим

$$\bar{R}(x) = \Delta^T(x)\bar{W}(\vartheta(x))\Delta(x) + \delta(x, \xi(\vartheta(x)))$$

где

$$\bar{W}(\tau) = V'(\tau) + F^T(\tau)V(\tau) + V(\tau)F(\tau) + \mu(\tau)P_\tau\Gamma(\tau)P_\tau \operatorname{tr} V(\tau)$$

$$|\delta(x, \xi(\vartheta(x)))| \leqslant \beta |\Delta(x)|^3, \qquad \beta > 0$$

Из неравенства $R(x) \leqslant \bar{R}(x)$ следует неравенство $W(\tau) \overset{P_\tau}{\leqslant} \bar{W}(\tau)$, откуда для $C(\tau) = -W(\tau)$ и $\bar{C}(\tau) = -\bar{W}(\tau)$ получим $C(\tau) \overset{P_\tau}{\geqslant} \bar{C}(\tau)$. Поскольку $\bar{C}(\tau) = (1 - \mu(\tau) \times$ $\times \operatorname{tr} V(\tau))P_\tau\Gamma(\tau)P_\tau$, то

$$C(\tau) \overset{P_\tau}{\geqslant} (1 - \mu(\tau) \operatorname{tr} V(\tau))P_\tau\Gamma(\tau)P_\tau.$$

В силу P_τ-положительной определенности матрицы $\Gamma(\tau)$ найдется такое положительное число ν, что $P_\tau\Gamma(\tau)P_\tau \overset{P_\tau}{\geqslant} \nu I$.

Таким образом, для $C(\tau)$ выполняется неравенство (2.14), в котором $\alpha(\tau) = \nu(1 - \mu(\tau)\operatorname{tr} V(\tau))$. При этом условие (2.15) непосредственно следует из (2.21). Поэтому решение $\xi(t)$ системы (1.2) будет по теореме 2 ЭОСК-устойчивым в окрестности U_{r_1}, при некотором $r_1 > r$. Теорема доказана.

3. Рассмотрим задачу стабилизации периодического движения системы с управлением

$$dx = (f(x) + B(\vartheta(x))u)\,dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(x)\,dw_r(t) \tag{3.1}$$

где $B(\tau)$ – T-периодическая $(n \times k)$-матрица, u – k-мерное управление.

Теорема 4. Пусть управление в (3.1) формируется в виде

$$u = -K(\vartheta(x))\Delta(x) \tag{3.2}$$

с весовой матрицей

$$K(\tau) = R^{-1}(\tau)B^T(\tau)V(\tau)$$

где $R(\tau)$ – T-периодическая, определенно-положительная матрица размера $k \times k$, $V(\tau)$ – решение матричного уравнения Риккати

$$\begin{aligned} &V'(\tau) + F^T(\tau)V(\tau) + V(\tau)F(\tau) - V(\tau)B(\tau)R^{-1}(\tau)B^T(\tau)V(\tau) + \\ &+ \sum_{r=1}^{m} S_r^T(\tau)V(\tau)S_r(\tau) = -P_\tau C(\tau)P_\tau \end{aligned} \tag{3.3}$$

Пусть $V(\tau)$ и $C(\tau)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда, если коэффициенты диффузии в (3.1) обращаются в нуль вне U_r при достаточно малом r, орбита γ системы (3.1) с управлением (3.2) является ЭОСК-устойчивой.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1.

Было показано [8], что в детерминированном случае подобное стабилизирующее управление было близким к оптимальному в задаче минимизации некоторого функционала. По-видимому, и здесь регулятор (3.2), (3.3) близок к оптимальному для функционала

$$J = E\int_0^\infty [\Delta^T(x)C(\vartheta(x))\Delta(x) + u^T R(\vartheta(x))u]\,dt$$

4. В последующих примерах в качестве v используется функция

$$v(x) = \Delta^T(x)G(\vartheta(x))\Delta(x)$$

где $G(\tau)$, $0 \leqslant \tau < T$, – T-периодическая неотрицательно-определенная матрица. Можно показать, что для этой функции

$$V(\tau) = G(\tau) - \frac{2}{f^T(\tau)f(\tau)}G(\tau)f(\tau)f^T(\tau) + \frac{f^T(\tau)G(\tau)f(\tau)}{[f^T(\tau)f(\tau)]^2}f(\tau)f^T(\tau)$$

В частности, при $G = I$

$$V(\tau) = I - \frac{1}{f^T(\tau)f(\tau)}f(\tau)f^T(\tau) = P_\tau$$

Приведем формулу для

$$W \triangleq V^\cdot + F^T V + VF + \sum_{r=1}^m S_r^T V S_r \quad \text{при} \quad G = I.$$

Имеем

$$W = \frac{1}{f^T f}[ff^T(F + F^T) + (F + F^T)ff^T] - (F + F^T) - \frac{f^T(F + F^T)f}{(f^T f)^2}ff^T - \sum_{r=1}^m S_r^T\left[I - \frac{ff^T}{f^T f}\right]S_r \tag{4.1}$$

Можно доказать, что

$$W(\tau)P_\tau = W(\tau) \tag{4.2}$$

Благодаря (4.2) в качестве C в соотношении (2.5) получается матрица $C = -W$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля с мультипликативными шумами, записанное в виде системы

$$x_1^\cdot = x_2, \quad x_2^\cdot = -x_1 + \epsilon x_2(1 - x_1^2) + \sigma(x_1, x_2)w^\cdot \tag{4.3}$$

Как известно, асимптотически устойчивая орбита $x = \xi(\tau)$ детерминированного уравнения Ван-дер-Поля при малых $\epsilon > 0$ мало отличается от окружности радиуса 2, что используется в дальнейших расчетах. Пусть

$$\sigma(x_1, x_2) = \mu(x_1 - \xi_1(\vartheta(x))) \tag{4.4}$$

где $\mu > 0$ – некоторая постоянная, так что исследуемая орбита является решением системы (4.3). Интенсивность шумов определяется коэффициентом μ. Найдем величину μ_0, такую, что при $\mu < \mu_0$ орбита ЭОСК-устойчива (при этом в соответствии с полученными результатами предполагается, что шум имеет вид (4.4) в достаточной близости от орбиты, обращаясь вне некоторой трубы орбиты в нуль).

Взяв в качестве $C(\tau)$ матрицу $-W(\tau)$ согласно (4.1), подсчитаем (Cx, x) для вектора x, ортогонального вектору $f(\tau)$ с нормой $|x| = 1$. Получим

$$(Cx, x) = 2\epsilon\xi_2^2(2\xi_1^2 - 1) - \tfrac{1}{4}\mu^2\xi_1^2 + \xi_2^2 + O(\epsilon^2) + O(\epsilon\mu^2)$$

Если $\alpha(\tau)$ положить равным найденному значению (Cx, x), то матрица $C(\tau) - \alpha(\tau)I$ будет P_τ-неотрицательно-определенной (точнее, P_τ-нулевой). Учитывая, что $\xi_1 = 2\cos\tau + O(\epsilon)$, $\xi_2 = -2\sin\tau + O(\epsilon)$, $T = 2\pi + O(\epsilon)$, найдем

$$\int_0^T \alpha(\tau)d\tau = 4\pi\epsilon - \pi\mu^2 + O(\epsilon^2) + O(\epsilon\mu^2)$$

Поэтому, если $\mu^2 < 4\epsilon$, то при достаточно малых ϵ орбита системы (4.3) будет ЭОСК-устойчивой. Таким образом, $\mu_0 = 2\sqrt{\epsilon}$.

Пример 2. Рассмотрим снова систему (4.3), но уже с функцией σ, имеющей вблизи орбиты вид

$$\sigma(x_1, \dot{x}_2) = \mu \mid \Delta(x_1, \dot{x}_2) \mid = \mu[(x_1 - \xi_1(\vartheta))^2 + (x_2 - \xi_2(\nu))^2]^{1/2} \tag{4.5}$$

У этой функции не существует производных

$$\partial\sigma(\xi(\vartheta))/\partial x_1, \qquad \partial\sigma(\xi(\vartheta))/\partial x_2$$

Однако результаты предыдущих разделов могут быть без особых затруднений перенесены на системы (1.2), в которых коэффициенты при шумах имеют вид: $\sigma_r(x) = \varphi_r\alpha_r(\rho_r)$, где φ_r – вектор, $\rho_r = [(x - \xi(\vartheta(x)))^T\Gamma_r(\vartheta(x))(x - \xi(\vartheta(x)))]^{1/2}$ – скаляр, Γ_r-неотрицательно-определенная матрица, $\alpha_r(\rho)$ – скалярная, гладкая, при $\rho \geqslant 0$ функция, не равная нулю разве лишь вблизи нуля и $\alpha_r(0) = 0$. В этом случае все результаты разд. 2 остаются прежними с заменой уравнения (2.5) на уравнение

$$W \triangleq V^{\cdot} + F^T V + VF + \sum_{r=1}^{m} (\alpha_r'(0))^2 (\varphi_r^T V\varphi_r) P_T\Gamma_r P_T = -P_T C P_T \tag{4.6}$$

При исследовании устойчивости и стабилизации точек покоя рассматривались [9] аналогичные шумы (шумы второго типа).

Для системы (4.3), (4.5) $m = 1$, $\Gamma = I$, вектор $\varphi = (0, \mu)^T$, $\alpha'(0) = 1$. Взяв в качестве $v(x)$ ту же функцию, что и в примере 1, снова подсчитаем (Cx, x), пользуясь равенством $C = -W$ (соотношение (4.2) выполняется и здесь), где W находится согласно (4.6). Получим

$$(Cx, x) = 2\epsilon\xi_2^2(3\xi_1^2 - 1) - \mu^2\xi_2^2 + O(\epsilon^2) + O(\epsilon\mu^2)$$

Здесь для соответствующего $\alpha(\tau)$

$$\int_0^T \alpha(\tau)d\tau = 4\pi\epsilon - 4\pi\mu^2 + O(\epsilon^2) + O(\epsilon\mu^2)$$

и поэтому

$$\mu_0 = \sqrt{\epsilon}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А.А., Витт А.А.* Об устойчивости по Ляпунову // ЖЭТФ. 1933, Т. 2. Вып. 5. С. 373–374.
2. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во. иностр. лит., 1958. 474 с.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
5. *Зубов В.И.* Теория колебаний. М.: Высш. шк. 1979. 400 с.
6. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 809–823.
7. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
8. *Мильштейн Г.Н.* Устойчивость и стабилизация периодических движений автономных систем // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 744–749.
9. *Ряшко Л.Б.* Стабилизация линейных стохастических систем с возмущениями, зависящими от состояния и управления // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 612–620.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
27. I. 1992