Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 6, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. А.Я. Красинский

О СТАБИЛИЗАЦИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМ С ЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

Дано дальнейшее развитие метода решения задач стабилизации путем выделения управляемых подсистем возможно меньшей размерности [1, 2]. Стабилизирующее воздействие определяется решением задачи оптимальной стабилизации [3] для линейной управляемой подсистемы. Найденное управление реализуется в виде обратной связи по оценке [4] вектора состояния (или его части), построенной по измерению возмущений позиционных координат. Устойчивость невозмущенного движения в полной замкнутой системе устанавливается сведением задачи к особенному случаю теории критических случаев [5, 6], либо к задаче об устойчивости при постоянно действующих возмущениях [6].

Было предложено [7] стабилизировать установившиеся движения систем с циклическими координатами приложением управляющих воздействий по этим координатам. В гамильтоновых переменных получены [7, 8] достаточные условия разрешимости задачи стабилизации до асимптотической устойчивости по отношению к позиционным координатам и их импульсам. Проведен [9, 10] качественный анализ задач стабилизации в переменных Лагранжа. Сформулированы [11] достаточные условия асимптотической стабилизируемости установившихся движений. Получен [12] ряд критериев управляемости и наблюдаемости для задач стабилизации в лагранжевых переменных. В исследованных случаях [7–12] управления приложены по всем циклическим координатам, причем рассматривались [9–12] задачи стабилизации до асимптотической устойчивости по первому приближению относительно всех фазовых переменных.

Ниже исследуются задачи стабилизации, содержащие более слабое требование лишь устойчивости невозмущенного движения. Управления действуют только по части циклических координат.

1. Рассмотрим механическую систему, стесненную нестационарными геометрическими связями, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, \ldots$ $\ldots, q_n$. При этом кинетическая энергия системы имеет вид (предполагается, что T не зависит явно от времени):

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad T_2 = \tfrac{1}{2} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

$$T_1 = d_j(q)\dot{q}_j, \quad T_0 = T_0(q), \quad q' = (q_1, \ldots, q_n)$$

Штрих означает транспонирование; по повторяющимся индексам проводится суммирование; индексы меняются следующим образом:

$$i, j = 1, \ldots, n, \quad \rho, \nu = 1, \ldots, k, \quad r, s = k+1, \ldots, n$$

$$u, v = k+1, \ldots, k+m, \quad \omega, \epsilon = k+m+1, \ldots, n$$

Пусть система находится под действием потенциальных сил с энергией $\Pi(q)$ и непотенциальных обобщенных сил $Q_i(q, \dot{q})$. Предположим, что в некоторой открытой области фазового пространства $a_{ij}(q)$, $d_j(q)$, $T_0(q)$, потенциальная энергия $\Pi(q)$ и непотенциальные обобщенные силы $Q_i(q, \dot{q})$ являются аналитическими функциями своих переменных, причем T_2 – определенно-положительная функция скоростей.

Введем векторы и матрицы (в конкретных задачах разбиение вектора q на векторы α и β проводится в соответствии с различным характером зависимости кинетической энергии, потенциальной энергии и обобщенных сил $Q_i(q, \dot{q})$ от обобщенных координат):

$$\alpha' = (q_1, \ldots, q_k), \quad \beta' = (q_{k+1}, \ldots, q_n), \quad \alpha_1' = (\dot q_1, \ldots, \dot q_k)$$

$$a_1(q) = \| a_{\rho\nu}(q) \|, \quad a_{12}(q) = \| a_{\rho r}(q) \| = a_{21}'(q), \quad a_2(q) = \| a_{rs}(q) \|$$

$$d_\alpha'(q) = \| d_1(q), \ldots, d_k(q) \|, \quad d_\beta'(q) = \| d_{k+1}(q), \ldots, d_n(q) \|$$

Примем за переменные, характеризующие состояние системы, переменные Рауса α, α_1, β, $p = \partial T/\partial \dot\beta = a_{21}\alpha_1 + a_2\dot\beta + d_\beta$. Введем функцию Рауса и запишем уравнения движения:

$$R = T - \Pi - p'\dot\beta = \tfrac{1}{2}\alpha_1' a^* \alpha_1 + (d_\alpha' - d_\beta'\gamma' + p'\gamma')\alpha_1 -$$

$$- \tfrac{1}{2}(p' - d_\beta') b (p - d_\beta) + T_0 - \Pi(q), \qquad b(q) = a_2^{-1}(q)$$

$$a^*(q) = a_1 - \gamma a_{21}, \qquad \gamma(q) = a_{12} b$$

$$\dot\alpha = \alpha_1, \quad a^*\dot\alpha_1 = -\alpha_1'(a^*_{(\alpha)} - a^*_{(\beta)}\gamma - \tfrac{1}{2}a^*_{[\alpha]})\alpha_1 -$$

$$- \alpha_1'[a^*_{(\beta)} b(p - d_\beta) + \frac{\partial d_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial d_\alpha}{\partial \beta}\gamma' + \gamma\frac{\partial d_\beta}{\partial \beta}\gamma' - \gamma'\frac{\partial d_\beta}{\partial \alpha} +$$

$$+ (\gamma_{(\alpha)}')'(p - d_\beta) - \gamma\gamma_{(\beta)}'(p - d_\beta) - d_{\alpha[\alpha]} + \gamma d_{\beta[\alpha]} - \gamma_{[\alpha]}(p - d_\beta)] -$$

$$- [\frac{\partial d_\alpha}{\partial \beta} b - \gamma\frac{\partial d_\beta}{\partial \beta} b - d_\beta'(\gamma_{(\beta)}' b + b(\gamma_{(\beta)}')') - (d_{\beta[\alpha]})' b - d_\beta' b_{[\alpha]}]\, p -$$

$$- \gamma\dot p - p'(\gamma_{(\beta)} b + \tfrac{1}{2}b_{[\alpha]})p + \frac{\partial d_\alpha}{\partial \beta} b\, d_\beta - \gamma\frac{\partial d_\beta}{\partial \beta} b\, d_\beta -$$

$$- d_\beta'\gamma_{(\beta)}' b\, d_\beta - (d_{\beta[\alpha]})' b\, d_\beta - \frac{1}{2} d_\beta' b_{[\alpha]} d_\beta + \frac{\partial T_0}{\partial \alpha} - \Pi_\alpha + Q_\alpha(q, \alpha_1, p)$$

$$\dot\beta = -\gamma'\alpha_1 + b(p - d_\beta)$$

$$\dot p = \tfrac{1}{2}\alpha_1' a^*_{[\beta]}\alpha_1 + \alpha_1'(d_{\alpha[\beta]} - \gamma d_{\beta[\beta]} + \gamma_{[\beta]}(p - d_\beta) +$$

$$+ (d_{\beta[\beta]}' b + d_\beta' b_{[\beta]})p - \tfrac{1}{2}p' b_{[\beta]} p - \tfrac{1}{2}d_\beta' b_{[\beta]} d_\beta -$$

$$- d_{\beta[\beta]}' b\, d_\beta + \frac{\partial T_0}{\partial \beta} - \Pi_\beta + Q_\beta(q, \alpha_1, p)$$

$$\Pi_\alpha = \partial\Pi/\partial\alpha, \qquad \Pi_\beta = \partial\Pi/\partial\beta$$

$$Q_\alpha'(q, \alpha_1, p) = (Q_1, \ldots, Q_k), \qquad Q_\beta'(q, \alpha_1, p) = (Q_{k+1}, \ldots, Q_n)$$

а $X_{(q)}$, $X_{[q]}$ для произвольной матрицы $X(q) = \| x_{ij}(q) \|$ означают соответственно "векторы" с матричными компонентами $\| \partial x_{i\nu}/\partial q_j \|$, $\| \partial x_{ij}/\partial q_\nu \|$, где ν – номер компоненты "вектора", $X_{(\alpha)}'$, $(X_{(\alpha)}')'$ – векторы соответственно с компонентами $\| \partial x_{\nu i}/\partial q_j \|$, $(\| \partial x_{\nu i}/\partial q_j \|)'$.

2. Допустим, что координаты $\beta' = (q_{k+1}, \ldots, q_n)$ – циклические, т.е. от них не зависят кинетическая энергия, силовая функция и обобщенные силы, причем отсутствуют обобщенные силы, отвечающие координатам β. Тогда система допускает циклические интегралы и при определенных условиях может совершать стационарные движения

$$q_\rho = q_\rho^\circ = \text{const}, \quad p_r = \delta_r = \text{const} \tag{2.1}$$

Как известно, движение (2.1) всегда устойчиво относительно возмущений циклических импульсов (без приложения дополнительных управлений). Имея в виду это свойство собственных естественных движений системы, рассмотрим задачу стабилизации неустойчивого движения (2.1) до устойчивости по всем фазовым переменным приложением линейных управлений по части циклических координат. Будем строить управления возможно меньшей размерности и такой структуры, при которой для формирования управления требуется возможно меньше измерительной информации. Введем обозначения для возмущений $q_\rho = \overset{\circ}{q}_\rho + x_\rho$, $p_u = \delta_u + y_u$, $p_\omega = \delta_\omega + z_\omega$ и составим уравнения возмущенного движения, выделив в них первое приближение:

$$
\begin{aligned}
&x^{\cdot} = x_1, \quad Ax_1^{\cdot} + (G+D)x_1 + (C+P)x + \Gamma_1 y^{\cdot} + (H_1+B_1)y + \\
&+\Gamma_2 z^{\cdot} + (H_2+B_2)z = N(x, x_1, y, z, u), \quad y^{\cdot} = u, \quad z^{\cdot} = 0
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

$$A = \| \{a^*_{\rho\nu}\}_0 \|, \qquad W(\alpha, p) = ½(p' - d'_\beta)\, b\,(p - d_\beta) - T_0 + \Pi$$

$$C = \| c_{\nu\rho} \| = \left\| \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial q_\nu \partial q_\rho} \right\}_0 \right\|, \qquad H_1 = \left\| \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial q_\nu \partial p_u} \right\}_0 \right\| =$$

$$= \left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial q_\nu} [(\delta_\upsilon - d_\upsilon) b_{u\upsilon} + (\delta_\omega + d_\omega) b_{u\omega}] \right\}_0 \right\|, \qquad H_2 = \left\| \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial q_\nu \partial p_\epsilon} \right\}_0 \right\| =$$

$$= \left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial q_\nu} [(\delta_\upsilon - d_\upsilon) b_{\upsilon\epsilon} + (\delta_\omega - d_\omega) b_{\omega\epsilon}] \right\} \right\|, \qquad G = \| \{k_{\nu\rho}\}_0 \|$$

$$K(\alpha, p) = \| k_{\nu\rho} \| = \left\| \frac{\partial d_\nu}{\partial q_\rho} - \gamma_{\nu r} \frac{\partial d_r}{\partial q_\rho} + \frac{\partial \gamma_{\nu r}}{\partial q_\rho}(p_r - d_r) - \frac{\partial d_\rho}{\partial q_\nu} + \gamma_{\rho r} \frac{\partial d_r}{\partial q_\nu} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \gamma_{\rho r}}{\partial q_\nu}(p_r - d_r) \right\|, \qquad \Gamma_1 = \| \{ a_{\rho u} b_{u\upsilon} + a_{\rho\omega} b_{\omega\upsilon} \}_0 \|, \qquad B_1 = \left\| \left\{ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_u} \right\}_0 \right\|$$

$$\Gamma_2 = \| \{ a_{\rho u} b_{u\omega} + a_{\rho\omega} b_{\omega\epsilon} \}_0 \|, \qquad P = \left\| \left\{ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} \right\}_0 \right\|, \qquad D = \left\| \left\{ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha_1} \right\}_0 \right\|$$

$$B_2 = \left\| \left\{ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\omega} \right\}_0 \right\|, \qquad K'^1 = K(\alpha, p) - G, \qquad A_* = a^*(q) - A$$

$$Q_\alpha(\alpha, \alpha_1, p) = \{Q_\alpha\}_0 + Px + Dx_1 + B_1 y + B_2 z + Q'^2_\alpha$$

$$\Gamma'^1 = \| a_{\rho u} b_{u\upsilon} + a_{\rho\omega} b_{\omega\upsilon} \| - \Gamma_1, \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \left\{ \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right\}_0 + Cx + H_1 y + H_2 z + \Pi'^2$$

$$\Phi(x, x_1, y, z, u) = -x'_1 (a^*_{(\alpha)} - ½ a^*_{[\alpha]}) x_1 - \Pi'^2 - \Gamma'^1 u - K'^1 x_1 + Q'^2_\alpha$$

$$L = -(G+D)x_1 - (C+P)x - (H_1+B_1)y - (H_2+B_2)z - \Gamma_1 u$$

$$N(x, x_1, y, z, u) = \Phi + AA_*^{-1}(L + \Phi)$$

Знак $\{\ldots\}_0$ означает, что выражение, стоящее в скобках, вычислено на движении (2.1); верхний индекс после запятой равен порядку младших членов в разложении соответствующего выражения. Очевидно, для существования движения (2.1) должно быть выполнено

$$\left\{ \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right\}_0 + \left\{ Q_{\alpha\, 0} \right\} = 0$$

Замечание 2.1. Матрица $C + P$ коэффициентов линейных позиционных сил в отличие от рассмотренных ранее случаев [1, 2, 11, 12], вообще говоря, не симметрична. Кососимметричная составляющая у нее появится не только при наличии непотенциальных позиционных сил в векторе Q_α. Такие члены могут возникнуть и при действии сил, содержащих циклические скорости. Пусть, например, действуют только силы, линейные по скоростям:

$$Q_\alpha(\alpha, \alpha^{\cdot}, p) = D_1(\alpha)\,\alpha_1 + D_2(\alpha)\,\beta^{\cdot} = (D_1 - D_2\gamma')\,\alpha_1 + D_2 b(p - d_\beta)$$

Выделяя в разложении этого вектора в окрестности движения (2.1) линейные члены, получим

$$Q_\alpha = \{Q_\alpha\}_0 + [\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\{D_2 b\}\}_0(\delta - \{d_\beta\}_0) - \{D_2 b\}_0\{\frac{\partial d_\beta}{\partial\alpha}\}_0]\, x +$$
$$+ \{D_1 - D_2\gamma'\}_0 x_1 + \{D_2 b\}_0 y_1 + Q_\alpha'^2, \qquad y_1' = (y', z')$$

как видим, появление кососимметричной составляющей возможно даже при действии линейных по циклическим скоростям сил с постоянными коэффициентами, если кинетическая энергия зависит от координат.

Выделяя управляемую подсистему

$$\xi^{\cdot} = F\xi + \Psi u, \qquad \xi' = (x', x_1', y'), \qquad \Psi' = (0 - \Gamma_1' A^{-1}, E_m)$$
$$F = \begin{Vmatrix} F_1 & 0 \\ & -A^{-1}(H_1 + B_1) \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad F_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -A^{-1}(C+P) & -A^{-1}(G+D) \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

получим критерий стабилизируемости [3] движения (2.1)

$$\operatorname{rank} Y = \operatorname{rank}(\Psi F \Psi \ldots F^{2k+m-1}\Psi) = 2k + m$$

который, используя структуру последней строки коагулированной матрицы Y, перепишем в виде

$$\operatorname{rank} Y_1 = \operatorname{rank}(\Psi_1 F_1 \Psi_1 \ldots F_1^{2k-1}\Psi_1) = 2k, \tag{2.4}$$
$$\Psi_1' = (-\Gamma_1' A^{-1}, \; [\Gamma_1' A^{-1}(G+D)' - H_1 - B_1']A^{-1})$$

Введем критерий качества (Ω_1, Ω_2 — определенно-положительные квадратичные формы своих аргументов)

$$I = \int_0^\infty [\Omega_1(\xi) + \Omega_2(u)]\, dt \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. Условие (2.4) является достаточным для стабилизируемости движения (2.1) линейными управлениями, приложенными по части циклических координат при действии по позиционным координатам потенциальных сил с энергией $\Pi(q)$ и произвольных непотенциальных сил $Q_\alpha(\alpha, \alpha_1, p)$. Стабилизирующее воздействие $u^* = M\xi$ может быть найдено решением задачи оптимальной (в смысле минимума интеграла (2.5)) задачи стабилизации для управляемой подсистемы (2.3) и зависит только от переменных, входящих в эту подсистему.

Доказательство аналогично доказательству теоремы [2].

В полной системе (2.2) при действии u^* будет иметь место критический случай, для сведения которого к особенному требуется [5, 6], вообще говоря, нелинейная замена по переменным x, y. Вследствие этого управление u^* обеспечивает асимптотическую устойчивость по позиционным скоростям и, вообще говоря, устойчивость по позиционным координатам и циклическим скоростям.

Замечание 2.2. Если управление прикладывать по всему вектору циклических координат, то условие (2.4) перейдет в условие асимптотической стабилизируемости движения (2.1) при действии по позиционным координатам, кроме потенциальных еще произвольных непотенциальных обобщенных сил.

Замечание 2.3. По структуре коагулированной матрицы Y_1 видно, что управляемость существенно зависит от коэффициентов линейных членов в разложении непотенциальных обобщенных сил. При этом могут появиться некоторые дополнительные по сравнению с ранее рассмотренными случаями [2, 12] возможности стабилизации. Например, для гироскопически несвязанных (по выбранной части циклических координат, возмущения импульсов которых входят в управляемую подсистему) систем ($\Gamma_1 = 0$) возникает возможность стабилизации тривиальных ($H_1 = 0$) по этим координатам движений при $B_1 \neq 0$. В частности, имеет место

Следствие 2.1. Если при $H_1 = 0$ ранг матрицы B_1 равен числу позиционных координат, то гироскопически несвязанная (по управляемым циклическим координатам) подсистема всегда управляема (ср. с теоремой 2.1 [12]).

В задачах стабилизации движений системы с несколькими циклическими координатами возникает вопрос об уменьшении размерности управляющего воздействия. Используя структуру уравнений возмущенного движения и [13], оценим число управляемых циклических координат.

Следствие 2.2. Минимальное число управляемых циклических координат, необходимое для выполнения достаточного условия (2.4) стабилизируемости движения (2.1), равно числу r нетривиальных многочленов матрицы F_1.

Замечание 2.4. Рассматриваемая нами задача существенно отличается от исследованной в [14] задачи о наименьшей размерности вектора управлений, стабилизирующих нулевое решение нелинейной системы (с выделенной линейной частью)

$$x = f(x) + \varphi(x, u) = Ax + Bu + \ldots$$

до асимптотической устойчивости и по первому приближению по всем переменным. В рассматриваемой задаче с изменением размерности управления изменяется размерность всей управляемой подсистемы, вследствие чего изменятся обе матрицы F и Ψ, играющие роль матриц A и B (в [14] при изменении размерности u изменяется только число столбцов матрицы B). Кроме того, здесь матрица F имеет по крайней мере m нулевых собственных чисел.

Таким образом, при решении конкретных задач стабилизации проверку выполнения критерия (2.4) надо начинать с $m = r$. При наличии нескольких циклических импульсов каждому набору управляемых импульсов соответствует своя матрица Ψ_1, так как во вторую ее строку входит матрица $H_1 + B_1$ и, кроме того, будет изменяться и матрица Γ_1. Если же общее число циклических координат меньше, чем r, достаточное условие (2.4) выполнено быть не может.

3. Во многих работах по стабилизации неявно предполагается, что в каждый момент времени известны все переменные, необходимые для формирования управления. Однако трудно рассчитывать, что в большинстве практических ситуаций все нужные компоненты вектора состояния доступны измерению (либо потому, что ограничено число измерительных устройств, либо потому, что часть переменных состояния в принципе нельзя измерить – например y, z в общем случае). Обычно выходными величинами объекта управления служат лишь отдельные компоненты вектора состояния, либо линейные комбинации таких компонент. Поэтому, чтобы воспользоваться возможностями, предоставляемыми управлением с обратной связью по состоянию, нужно по выходным величинам найти приемлемую оценку [4] для всего вектора состояния системы (или его части). С этих позиций в [12] в переменных Лагранжа исследовалась задача стабилизации установившихся движений до асимптотической устойчивости по всем фазовым переменным задачи. Управления зависели от всех фазовых переменных и действовали по всем циклическим координатам.

В рассматриваемых здесь задачах стабилизации управления приложены только по части циклических координат и зависят только от фазовых переменных управляемой подсистемы, которая может не содержать возмущений многих циклических импульсов. Естественно ожидать и уменьшения объема измерительной информации, необходимой для формирования стабилизирующих воздействий при таком способе стабилизации. При этом следует обратить внимание на качественное отличие в смысле непосредственной наблюдаемости (измерения) переменных y, z (возмущений циклических импульсов) от переменных x, x_1, так как для получения значений лишь одной из компонент y, z может потребоваться информация о всех позиционных координатах α и всех (в том числе и циклических) скоростях $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$.

Поэтому рассмотрим вопрос о наблюдаемости в системе (2.2) без измерения возмущений циклических импульсов y, z. Исследуем для определенности вопрос о возможности формирования управлений при наличии измерительной информации только о возмущениях позиционных координат.

Утверждение 3.1. Если выполнено условие

$$\operatorname{rank}(H_1 + B_1, H_2 + B_2) = n - k \tag{3.1}$$

то система (2.2) в окрестности движения (2.1) вполне наблюдаема по измерениям возмущений позиционных координат.

Утверждение 3.2. Если в уравнениях возмущенного движения (2.2) отсутствуют линейные по возмущениям неуправляемых импульсов члены (т.е. $H_2+B_2=0$), то при условии

$$\operatorname{rank}(H_1 + B_1) = m \tag{3.2}$$

в системе (2.2) наблюдаемыми в окрестности невозмущенного движения (2.1) по измерениям возмущений позиционных координат являются переменные x, x_1, y.

Справедливость утверждений следует из структуры системы (2.2) и [15].

Замечание 3.1. Условие (3.1) полной наблюдаемости системы не может быть выполнено, если число позиционных координат меньше числа циклических: ранг матрицы не больше числа ее строк. При $Q_\alpha = D_1 \alpha_1'$, $T = T_2$ аналогичный результат в переменных Лагранжа получен в [12].

Замечание 3.2. При отсутствии в системе (2.2) линейных по z членов, аналогично предыдущему, для выполнения условия (3.2) необходимо, чтобы число позиционных координат было не меньше числа управляемых циклических импульсов, т.е. $k \geqslant m$.

Замечание 3.3. Согласно условиям (3.1), (3.2) непотенциальные обобщенные силы влияют и на наблюдаемость. В частности в отличие от [12] в окрестности тривиального ($H_1 = 0, H_2 = 0$) движения возможна полная наблюдаемость системы (2.2) по измерениям возмущений позиционных координат. Для этого достаточно, чтобы $\operatorname{rank}(B_1, B_2) = n - k$.

При условии (3.1) для системы

$$\begin{aligned} &\dot\eta = F_2\eta + \Psi_2 u, \quad \sigma = S_1\eta, \quad \Psi_2' = (\Psi', 0), \quad S = (E_k, 0, 0) \\ &\eta' = (\xi', z'), \quad S_1 = (S, 0), \quad F_2 = \begin{Vmatrix} F & H_2 + B_2 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \end{aligned} \tag{3.3}$$

существует асимптотический идентификатор (система асимптотической оценки) [4]

$$\dot\eta^\circ = F_2\eta^\circ + L(\sigma - S_1\eta^\circ) + \Psi_2 u$$

вектора состояния η по измерению σ.

При $H_2 + B_2 = 0$ и условии (3.2) для управляемой подсистемы (2.3) существует асимптотический идентификатор

$$\dot\xi^\circ = F\xi^\circ + L_1(\sigma_1 - S\xi^\circ) + \Psi u \tag{3.4}$$

вектора состояния этой подсистемы по измерению $\sigma_1 = S\xi$.

При этом постоянные матрицы L, L_1 соответствующих размерностей, определяющие характер стремления ошибок оценивания к нулю, могут быть найдены решением задачи оптимальной стабилизации соответственно для систем

$$\dot\zeta = F_2'\zeta + S_1' w \tag{3.5}$$

$$\dot\mu = F'\mu + S' v \tag{3.6}$$

по заданным квадратичным критериям качества, что следует из дуальности задач управления и наблюдения [4] для систем (3.3) и (3.5) (соответственно (2.3) и (3.6)) и [3].

Замечание 3.4. В данной работе для простоты используется одна и та же достаточно богатая внешняя информация – измерение возмущений всех позиционных координат, что в общем случае, конечно, не обязательно. В частности, можно измерять возмущения только части позиционных координат. Тогда в качестве матрицы S в системах (3.3), (3.4) следует взять матрицу

$$S_* = (I_*, 0, 0), \quad I_* = \begin{Vmatrix} E_l & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad l < k$$

а вместо условий (3.1), (3.2) потребовать выполнения соответственно условий

$$\operatorname{rank}(S_{1*}' F_2' S_{1*}' \ldots F_2'^{\,n+k-l} S_{1*}') = n + k, \quad S_{1*} = (S_*, 0)$$

$$\operatorname{rank}(S_*' F' S_*' \ldots F'^{\,2k+m-l} S_*') = 2k + m$$

Используя специфические особенности системы (2.2) уравнений возмущенного движения, можно уменьшить размерность системы оценивания, рассматривая в качестве идентификатора систему (3.4) независимо от присутствия в уравнениях (2.2) линейных по z членов.

Теорема 3.1. Пусть для механической системы, описываемой уравнениями (2.2), в окрестности невозмущенного движения (2.1) выполнены условия (2.4) и (3.2). Тогда движение (2.1) стабилизируется до устойчивости по всем переменным приложением по части циклических координат линейного управления $u = M\xi^\circ$, где матрица M определена решением задачи оптимальной стабилизации для управляемой подсистемы (2.3), а ξ° – оценка вектора ξ, полученная из системы оценивания (3.4) по измерению σ_1. Матрица L_1 находится решением задачи оптимальной стабилизации для системы (3.6).

Доказательство. При условии (2.4) для системы

$$\xi^{\cdot} = F\xi + \Psi u + N_2, \quad N_2 = N_1 \mid_{z=0}, \quad N_1' = (0, N'A^{-1}, 0) \tag{3.7}$$

управление $u^* = M\xi$, определенное из решения задачи оптимальной стабилизации для подсистемы (2.3) по критерию (2.5), обеспечит асимптотическую устойчивость решения $\xi = 0$ по первому приближению. Условие (3.2) в силу [15] и структуры системы является достаточным условием наблюдаемости системы (3.7) в окрестности движения $\xi = 0$ по измерению σ_1. А тогда существует [4] идентификатор (3.4), причем матрица L_1 может быть [3] определена из решения задачи оптимальной стабилизации решения $\mu = 0$ системы (3.6) по критерию

$$I_1 = \int_0^\infty [\Omega_3(\mu) + \Omega_4(v)]\, dt$$

где Ω_3, Ω_4 – определенно-положительные квадратичные формы. Поэтому в замкнутой системе

$$\begin{aligned} \xi^{\cdot} &= F\xi + \Psi u + N_2, \qquad \sigma_1 = S\xi \\ \xi^{\cdot\circ} &= F\xi^\circ + L_1(\sigma_1 - S\xi^\circ) + \Psi u, \qquad u = M\xi^\circ \end{aligned} \tag{3.8}$$

действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны ([4], теорема 7.7). Следовательно, решение $\xi = 0$, $\xi^\circ = 0$ системы (3.8) асимптотически устойчиво. Замкнутая система

$$\begin{aligned} \xi^{\cdot} &= F\xi + \Psi u + Hz + N_1, \qquad z^{\cdot} = 0, \quad \sigma_1 = S\xi, \quad u = M\xi^\circ \\ \xi^{\cdot\circ} &= F\xi^\circ + L_1(\sigma_1 - S\xi^\circ) + \Psi u, \qquad H' = (0, -(H_2 + B_2)'A^{-1}, 0) \end{aligned} \tag{3.9}$$

всей задачи получается из системы (3.8) при действии постоянных возмущений, возникающих при $z(t) = z_0 = \text{const} \neq 0$. Согласно теореме об устойчивости при постоянно действующих возмущениях ([6], § 70), точка $\xi = 0$, $\xi^\circ = 0$ для системы (3.9) устойчива.

Замечание 3.4. Отметим связь полученного результата с теоремой Рауса [16] об условной устойчивости стационарных движений и дополнением Ляпунова [17] к этой теореме. Уравнение (3.7) описывает (управляемое) возмущенное движение системы в окрестности движения (2.1) при невозмущаемости неуправляемых циклических импульсов. Поэтому замкнутая система (3.8) обеспечивает стабилизацию движения (2.1) до асимптотической устойчивости по первому приближению при условии $z_0 = 0$ на начальные возмущения. При снятии же этого условия движение (2.1) становится (безусловно) неасимптотически устойчивым.

Замечание 3.5. Согласно доказанной теореме, условия (2.4), (3.2) являются достаточными условиями разрешимости задачи стабилизации управлением с обратной связью по оценке вектора состояния независимо от присутствия в системе (2.2) линейных по возмущениям неуправляемых импульсов членов (ср. с утверждениями 3.1, 3.2). При выполнении этих условий не только уменьшается размерность задачи управления по сравнению с [7–12], но и размерность идентификатора по сравнению с [12]. Общая размерность линейной замкнутой системы, для которой определяются матрицы M, L_1, равна $2(2k+m)$ против $2(n+k)$ в [12], т.е. уменьшена на удвоенное число неуправляемых циклических импульсов. Но в рассматриваемой задаче, в отличие от изучавшейся [12], в замкнутой системе будет иметь место только неасимптотическая устойчивость.

Замечание 3.6. Для однозначного определения матриц L, L_1 из решения дуальной задачи стабилизации могут оказаться эффективными методы синтеза законов стабилизации, рассмотренные в [18] (см. далее пример 5.1)

4. Исследуем возможность стабилизации движения (2.1) приложением по части циклических координат линейных управлений, не зависящих от возмущений циклических импульсов:

$$u_1 = M_1 x + M_2 x_1 \tag{4.1}$$

где M_1, M_2 – подлежащие определению матрицы. В управляемой подсистеме

$$x^{\cdot} = x_1, \quad x_1^{\cdot} = -A^{-1}(C+P)x - A^{-1}(G+D)x_1 - A^{-1}\Gamma_1 u_1 - A^{-1}(H_1+B_1)_y \tag{4.2}$$

возможны две принципиально разные ситуации. Первая из них характеризуется тем, что существует воздействие (4.1), стабилизирующее точку

$$x = 0, \quad x_1 = 0, \quad y = 0 \tag{4.3}$$

в силу уравнений (4.2) до асимптотической устойчивости по всем переменным этой системы. Выяснить, сохраняется ли такая возможность, можно при помощи критерия Рауса–Гурвица для уравнения

$$\begin{vmatrix} E_k\lambda & -E_k & 0 \\ C+P+\Gamma_1 M_1 & A\lambda + D + G + \Gamma_1 M_2 & H_1 + B_1 \\ -M_1 & -M_2 & E_m\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.4}$$

Очевидно, для этого при $\det(C+P) \neq 0$ необходимо, чтобы

$$\det(C+P)\det(M_1(C+P)^{-1}(H_1+B_1)) > 0 \tag{4.5}$$

так как этот определитель равен свободному члену уравнения (4.4)

Замечание 4.1. При $m > k$ определитель (4.5) обращается в нуль [19]. Следовательно, управление вида (4.1) не может обеспечить асимптотическую стабилизируемость, если число циклических координат больше числа позиционных.

Замечание 4.2. Эффективных алгоритмов построения управления вида (4.1), обеспечивающих асимптотическую стабилизируемость точки (4.3) в силу (4.2) в общем случае нет. Обращения в нуль коэффициентов при части фазовых переменных в управлении можно добиться подбором коэффициентов в критерии качества [20]. Для однозначного определения матриц M_1, M_2 можно воспользоваться методом построения субоптимальных управлений [21]. Но гарантировать нахождение такого управления в общем случае нельзя, так как выполнение критерия Рауса–Гурвица для уравнения (4.4) является только необходимым условием существования субоптимального управления.

Перейдем к анализу второй ситуации, возможной в системе (4.2) при действии управления (4.1), которая характеризуется тем, что такие управления в принципе не могут обеспечить асимптотическую устойчивость точки (4.3) в силу (4.2). Один из простейших случаев такого рода возникает при $H_1 + B_1 = 0$. Для гироскопически связанных относительно управляемых импульсов систем (т.е. $\Gamma_1 \neq 0$) при определенных условиях сохраняется возможность стабилизации движения (2.1) управлением (4.1), если в качестве управляемой подсистемы взять следующую:

$$\xi_1^{\cdot} = F_1\xi + Q_1 u_1, \quad \xi_1' = (x', x_1'), \quad Q_1' = (0, -\Gamma_1' A^{-1}) \tag{4.6}$$

Теорема 4.1. Если для гироскопически связанной по части циклических импульсов механической системы при условии

$$\operatorname{rank}(Q_1 F_1 Q_1 \dots F_1^{2k-1} Q_1) = 2k \tag{4.7}$$

уравнения возмущенного движения (2.2) не содержат свободно входящих возмущений циклических импульсов, то невозмущенное движение (2.1) стабилизируется до асимптотической устойчивости по возмущениям позиционных координат и их скоростям и устойчивости по циклическим скоростям приложением по части циклических координат линейного управления $u_2 = M_3 \xi_1^\circ$. Управление формируется в виде обратной связи по оценке ξ_1°, полученной для вектора ξ_1 по измерению $\sigma_2 = S_2 \xi_1$, $S_2 = (E_k, 0)$ из системы

$$\dot{\xi}_1^\circ = F_1 \xi_1^\circ + L_2(\sigma_2 - S_2 \xi_1^\circ) + Q_1 u$$

где матрица L_2 определена решением задачи стабилизации для системы

$$\dot{\nu} = F_1' \nu + S_2' w_1 \tag{4.8}$$

Доказательство. Асимптотическая устойчивость замкнутой системы

$$\dot{\xi}_1 = F_1 \xi_1 + Q_1 u_2 + N_4, \quad \sigma_2 = S_2 \xi_1, \quad N_4 = N_3 \mid_{z, y = 0}, \quad N_3' = (0\, N' A'^{-1})$$
$$\dot{\xi}_1^\circ = F_1 \xi_1^\circ + L_2(\sigma_2 - S_2 \xi_1^\circ) + Q_1 u_2, \quad u_2 = M_3 \xi_1^\circ$$

доказывается так же, как в теореме 3.1, поскольку при условии (4.6) разрешима [3] задача оптимальной стабилизации точки $\xi_1 = 0$ по заданному критерию ($\Omega_5(\xi_1)$, $\Omega_6(u_1)$ – определенно-положительные квадратичные формы)

$$\int_0^\infty [\Omega_5(\xi_1) + \Omega_6(u_1)]\, dt$$

Наблюдаемость по измерению σ_2, как нетрудно убедиться, имеет место при любых матрицах во второй строке коагулированной матрицы F_1. Следовательно, можно определить [3, 18] матрицу L_2 решением задачи стабилизации для системы (4.8). Указанная в формулировке теоремы устойчивость в замкнутой системе

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_1 = F_1 \xi_1 + Q_1 u_2 + N_3, \quad \sigma_2 = S_2 \xi_1, \quad \dot{y}_1 = u_2, \quad \dot{z} = 0 \\ &\dot{\xi}_1^\circ = F_1 \xi_1^\circ + L_2(\sigma_2 - S_2 \xi_1^\circ) + Q_1 u_2, \quad u_2 = M_3 \xi_1^\circ \end{aligned} \tag{4.9}$$

следует из теоремы Ляпунова–Малкина [5, 6] об устойчивости в особенном случае $n - k$ нулевых корней.

Замечание 4.4. Если y, z входят в уравнения (2.2) свободно от x, x_1 только в нелинейных членах, то линейное управление u_2 не может обеспечить стабилизацию движения (2.1) при $m = 1$. При действии u_2 и наличии нелинейных по y, z членов задача об устойчивости нулевого решения системы (4.9) сведется к задаче об устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{\xi}_1 = F_1 \xi_1 + Q_1 u_2, \quad \dot{y} = u_2 \tag{4.10}$$

при постоянно действующих возмущениях $z = z_0 = \text{const}$.

Для устойчивости в системе (4.9) должна иметь место [6] асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (4.10) при $z_0 = 0$. Такая устойчивость при $m = 1$ возможна, когда [5, 6] y входит в нелинейные члены свободно от x, x_1 в нечетной степени. Здесь же эта степень равна только двум.

5. Рассмотрим примеры. 5.1. В качестве приложения метода стабилизации, предлагаемого в теореме 4.1, решим в общем виде задачу стабилизации стационарных движений систем с одной позиционной и несколькими циклическими координатами в ситуации, охватываемой этой теоремой. Таким образом, имеем уравнения возмущенного движения

$$\dot{x} = x_1, \quad \dot{x}_1 = ax + bx_1 + gu + N_5(x, x_1, y, z, u), \quad \dot{y} = u, \quad \dot{z} = 0 \tag{5.1}$$

где a, b, g – постоянные числа, N_5, x, x_1, y – скаляры, z – вектор, причем $g \neq 0$, $N_5(0, 0, y, z, 0) \equiv$

$\equiv 0$. Вводя простейший критерий качества

$$I = \int_0^\infty (x^2 + x_1^2 + u^2)\, dt \tag{5.2}$$

найдем (см. уравнения (111.13) [3]) коэффициенты оптимальной в смысле минимума (5.2) функции Ляпунова, откуда получим

$$u_2 = g^{-1}[dx^0 + (b + (b^2 + g^2 + 2d)^{1/2} x_1^0], \qquad d = a + (a^2 + g^2)^{1/2} \tag{5.3}$$

Здесь вектор (x°, x_1°) – оценка для вектора (x, x_1), полученная из системы

$$\begin{aligned} x^{\cdot\circ} &= l_1(x - x^\circ) + x_1^\circ, & l_1 &= \alpha + b \\ x_1^{\cdot\circ} &= ax^\circ + bx_1^\circ + l_2(x - x^\circ) + gu, & l_2 &= \tfrac{1}{2}(\alpha + b)(\alpha + 2b) \end{aligned} \tag{5.4}$$

(где α – достаточное большое положительное число) по измерению x. Матрица $L_3' = (l_1, l_2)$ определена решением дуальной задачи стабилизации способом, предложенным А.А. Красовским (см. [18], с. 97).

5.2. Рассмотрим несимметричный гироскоп. Функция Рауса системы имеет вид [2]:

$$R = R_2 + R_1 + R_0 = \tfrac{1}{2}[a - \Delta^{-1}(b_{22}c_1^2 - 2b_{12}c_1c_2 + b_{11}c_2^2)]\,\theta^{\cdot 2} + \Delta^{-1}[b_{22}c_1 - b_{12}c_2)p_1 +$$

$$+ (b_{11}c_2 - b_{12}c_1)p_2]\,\theta^{\cdot} + (m_2 + m_3)gy_2 \sin\epsilon\cos\theta - \tfrac{1}{2}\Delta^{-1}[b_{22}p_1^2 - 2p_1p_2b_{12} + b_{11}p_2^2],$$

$$\Delta = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$$

для параметров гироскопа сохранены обозначения [10]. Уравнения многообразия установившихся движений $\partial R_0/\partial\theta = 0$ кроме движения

$$\theta_0 = 0, \quad p_2 = \delta_2 = \text{const}, \quad p_1 = \delta_1 = \text{const} \tag{5.5}$$

допускают и другие решения. В частности, при дополнительном условии $\lambda = 0$ (ось маховика параллельна оси η_2, так как ранее [10] допущено $\nu = 0$) при достаточно большом δ_2 существует действительное решение

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \tfrac{1}{2}\pi, \quad p_2 = \delta_2, \quad p_1 = \tfrac{1}{2}\mu_1^{-1}(1 \pm \sqrt{1 - 4\mu_1(m_2 + m_3)gy_2\delta_2^{-2}})\, b_{11}^*\delta_2 \\ b_{11}^* &= J + A_2\cos^2\epsilon + B_0 + C_2\sin^2\epsilon + m_3(x_1^2\sin^2\epsilon + y_1^2 + z_1^2\cos^2\epsilon) \\ \mu_1 &= (G_2 + m_3x_1y_1)\cos\epsilon \end{aligned} \tag{5.6}$$

При $(G_2 + m_3x_1y_1)y_2\cos\epsilon > 0$ из (5.6) можно получить решение

$$\theta_0 = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \tfrac{1}{2}\delta_2^* = \pm\sqrt{\mu_1(m_2 + m_3)gy_2}, \quad \delta_1^* = \tfrac{1}{2}\mu_1^{-1}b_{11}^*\delta_2^{*2} \tag{5.7}$$

Анализ возможности стабилизации движения (5.5) приложением управлений по обеим циклическим координатам проведен в [10], в работе [12] определено измерение, доставляющее информацию, необходимую для формирования управлений при стабилизации движения (5.5) таким же способом. Для рассматриваемой системы в уравнениях (2.2)

$$\Gamma_1 = \{b_{22}c_1 - b_{12}c_2\}_0, \quad \Gamma_2 = \{b_{11}c_2 - b_{12}c_1\}_0, \quad H_1 + B_1 = \left\{\frac{\partial b_{12}}{\partial\theta}\delta_2\Delta^{-1} + \right.$$

$$\left. + b_{22}\frac{\partial\Delta}{\partial\theta}\delta_1\Delta^{-2} - b_{12}\frac{\partial\Delta}{\partial\theta}\delta_2\Delta^{-2}\right\}_0, \quad H_2 + B_2 = \left\{\frac{\partial b_{12}}{\partial\theta}\delta_1\Delta^{-1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial\theta}\delta_2\Delta^{-1} + \right.$$

$$\left. + (b_{11}\delta_2 - b_{12}\delta_1)\Delta^{-2}\frac{\partial\Delta}{\partial\theta}\right\}_0$$

В окрестности движения (5.5) $\Gamma_1 \neq 0$, $\Gamma_2 \neq 0$, $H_1 + B_1 = 0$, $H_2 + B_2 = 0$, причем уравнения возмущенного движения не содержат свободно входящих y, z. Согласно теореме 4.1, задача стабилизации движения (5.5) решается приложением по одной из циклических координат управления, определяемого формулой (5.3), где вектор (x°, x_1°) получен из системы (5.4). Заметим, что при стабилизации движения (5.5) при помощи управления, построенного в [2], хотя число позиционных координат в отличие от [12] равно числу циклических, входящих в управляемую подсистему, условие (3.2) не выполнено. Поэтому при стабилизации движения (5.5) управлением [2] придется, как и в [12], измерять возмущения циклических скоростей. Ввиду невыполнения условия (4.5) из-за $H_1 + B_1 = 0$, $H_2 + B_2 = 0$ уменьшить объем информации за счет исключения из управления возмущения управляемого импульса нельзя.

В окрестности движения (5.7)

$$\Gamma_2 = 0, \quad \Gamma_1 = A_0[A_2 + B_0 + m_3(y_1^2 + z_1^2)]\cos\epsilon \neq 0, \quad H_2 + B_2 = [(m_2 + m_3)gy_2\ \mu^{-1}]^{1/2}\sin\epsilon$$

причем имеются свободно входящие y, z. При выполнении условия управляемости

$$a_1 g_K^2 - b g_K h_K - h_K^2 \neq 0, \quad \kappa = 1, 2, \quad g_K = -A^{-1}\Gamma_K, \quad h_K = -A^{-1}(H_K + B_K)$$

$$A = a - [b_{22}c_1^2(\theta_0) - 2b_{12}(\theta_0)c_1(\theta_0) - b_{11}(\theta_0)c_2]/\Delta(\theta_0), \quad a_1 = -A^{-1}\{\partial^2 R_0/\partial\theta^2\}_0$$

задача разрешима приложением линейного момента по одной из циклических координат. При стабилизации управлением, действующим вокруг оси внешнего кольца подвеса, для его формирования придется измерять и возмущения циклических скоростей, так как условие наблюдаемости (3.2) не выполнено. Если же стабилизировать движение (5.7) моментом, приложенным вокруг оси собственного вращения, условия теоремы 3.1 выполнены; для формирования управления достаточно измерять только x, по которому можно построить идентификатор вида (3.4).

В окрестности движения (5.6)

$$\Gamma_1 \neq 0, \quad \Gamma_2 = 0, \quad H_1 + B_1 = -(b_{11}^*)^{-1}\sin\epsilon\delta_2\sqrt{1 - 4\delta_2^{-2}\mu_1(m_2 + m_3)gy_2} \neq 0$$

$$H_2 + B_2 = \delta_2\sin\epsilon(1 \pm \sqrt{1 - 4\delta_2^{-2}(m_2 + m_3)\mu_1 gy_2}) \neq 0$$

Условие полной наблюдаемости (3.1) не выполнено в силу замечания 3.1. Тем не менее, используя теорему 3.1 и выполняя условия (3.2), можем построить замкнутую систему вида (3.9) при измерении только x. В задаче стабилизации движения (5.6) можно построить и управление вида (4.1). Уравнение (4.4) при стабилизации моментом, приложенным вокруг оси собственного вращения, получит форму

$$A\lambda^3 + d\lambda^2 + \lambda(m_2 H_3 + C) + m_1 H_3 = 0, \quad C = \{\partial^2 R_0/\partial\theta^2\}_0, \quad H_3 = H_2 + B_2'$$

из критерия Рауса–Гурвица имеем

$$m_2 H_3 + C > 0, \quad m_1 > (AH_3)^{-1}d(m_2 H_3 + C)$$

Отметим, что в отличие от предыдущих случаев стабилизации, когда задача могла быть решена и при отсутствии диссипации, т.е. $d = 0$, в последнем случае диссипация по позиционной скорости необходима.

Автор благодарит В.В. Румянцева за внимание к работе и обсуждение, а также рецензента за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красинский А.Я.* О математическом моделировании в задачах оптимальной стабилизации установившихся движений // Всесоюз. школа-семинар "Математическое моделирование в науке и технике". Тез. докл. Пермь: УНЦ АН СССР, 1986. С. 184–185.
2. *Красинский А.Я., Ронжин В.В.* К стабилизации установившихся движений механических систем с циклическими координатами // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 542–548.
3. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
4. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
5. *Ляпунов А.М.* Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 473 с.
6. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
7. *Румянцев В.В.* Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 966–976.
8. *Лилов Л.К.* О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 977–985.
9. *Самсонов В.А.* О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 512–520.
10. *Клоков А.С., Самсонов В.А.* О стабилизируемости тривиальных установившихся движений гироскопически связанных систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 199–202.
11. *Атанасов В.А., Лилов Л.К.* О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 713–718.
12. *Каленова В.И., Морозов В.М., Салмина М.А.* К задаче стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 707–714.
13. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 507 с.

14. *Лилов Л.К.* Об определении наименьшего числа управлений, стабилизирующих положения равновесия // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 788–795.
15. *Красовский А.А.* Условие наблюдаемости нелинейных процессов // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. № 6. С. 1265–1268.
16. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
17. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
18. *Фурасов В.Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977. 245 с.
19. *Мишина А.П., Проскуряков И.В.* Высшая алгебра. М.: Наука, 1965. 300 с.
20. *Красовский А.А.* Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М.: Наука, 1968. 240 с.
21. *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977. 400 с.

Ташкент

Поступила в редакцию
14.XI.1991