Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 6, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. А.В. Карапетян, И.Д. Сахокиа

О БИФУРКАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДВУХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ

Рассматривается плоское движение системы двух взаимно гравитирующих тел, одно из которых – шар со сферическим распределением масс, а другое – однородный стержень. Найдены все стационарные движения рассматриваемой системы, получены условия их устойчивости как в вековом смысле, так и в силу уравнений первого приближения. Отмечена возможность гироскопической стабилизации стационарных движений, степень неустойчивости которых равна двум. Результаты исследования представлены в виде бифуркационных диаграмм.

1. Рассмотрим плоское движение двух взаимно гравитирующих тел, одно из которых – материальная точка массы M (или шар со сферическим распределением масс), а другое – однородный стержень массы m и длины $2a$. Положение рассматриваемой системы будем определять расстоянием r между центрами масс тел, углом θ между прямой, соединяющей центры масс, и некоторым неподвижным в плоскости движения направлением, а также углом φ между стержнем и прямой, соединяющей его середину с точкой M.

Кинетическая и потенциальная энергии системы (f – гравитационная постоянная) [1]

$$T=\frac{1}{2}\mu M(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)+\frac{1}{6}ma^2(\dot\varphi+\dot\theta)^2,\quad \mu=\frac{m}{M+m}$$

$$\Pi=-f\frac{Mm}{2a}\ln\frac{r\cos\varphi+a+\Phi^+}{r\cos\varphi-a+\Phi^-},\quad \Phi^\pm=(r^2\pm 2ra\cos\varphi+a^2)^{1/2}$$

не зависят от переменной θ. Следовательно, рассматриваемая система помимо интеграла энергии $T+\Pi=\text{const}$ допускает интеграл площадей

$$\partial T/\partial\dot\theta\equiv m(\mu r^2+{}^1\!/_3a^2)\dot\theta+{}^1\!/_3ma^2\dot\varphi=k=\text{const}\tag{1.1}$$

и может совершать стационарные движения вида

$$r=\text{const},\quad \varphi=\text{const},\quad \dot\theta=\omega=\text{const}\tag{1.2}$$

При этом тела вращаются с одной и той же постоянной угловой скоростью ω вокруг их общего центра масс, причем стержень неподвижен относительно точки M.

Игнорируя циклическую координату θ, введем функцию Рауса

$$R=(T-\Pi-k\dot\theta)\equiv R_2+R_1-W$$

$$R_2=\frac{1}{2}\mu M[\dot r^2+\frac{1}{3}\frac{a^2r^2}{J}\dot\varphi^2],\quad R_1=\frac{1}{3}\frac{a}{J}k\dot\varphi$$

$$W=\Pi+\frac{1}{2}\frac{k^2}{J},\quad J=\mu Mr^2+\frac{1}{3}ma^2$$

Стационарным движениям исходной системы отвечают положения равновесия приведенной системы, описываемой функцией Рауса R. При этом постоянные r и φ в (1.2) определяются из системы

$$\partial W/\partial\varphi = 0, \quad \partial W/\partial r = 0 \tag{1.3}$$

Приведенный потенциал W π-периодичен по φ, поэтому будем изучать систему (1.3) при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Первое уравнение системы (1.3) тождественно (по r) удовлетворяется при

$$1)\ \varphi = 0, \quad 2)\ \varphi = \pi/2 \pmod{\pi} \tag{1.4}$$

При этом второе уравнение системы (1.3) принимает вид

$$\frac{k^2}{f(M+m)} = F_i(r) \quad (i = 1, 2) \tag{1.5}$$

$$F_1 = \frac{J^2}{(r^2 - a^2)r} \quad (\varphi = 0), \quad F_2 = \frac{J^2}{r^2\sqrt{r^2 + a^2}} \quad (\varphi = \frac{\pi}{2})$$

2. Рассмотрим стационарные движения вида

$$\varphi = 0, \quad r = r_1(k^2) \tag{2.1}$$

где $r_1(k^2)$ – решение уравнения (1.5) при $i = 1$ (при этом, очевидно, предполагается, что $r > a$).

Функция $F_1(r)$ ограничена снизу, положительна, стремится к бесконечности как при $r \to +\infty$, так и при $r \to a + 0$, и достигает минимума в единственной точке $r_{1\,0} > a$, в которой обращается в нуль ее производная, причем

$$r_{1\,0} = a\left(\frac{4 - 3\mu + \sqrt{(4 - 3\mu)^2 - 4/3(1 - \mu)}}{2(1 - \mu)}\right)^{1/2} \tag{2.2}$$

$(F_1' \gtrless 0$ при $r \gtrless r_{1\,0})$.

Таким образом, если стержень располагается вдоль прямой, соединяющей его середину с точкой M, то при достаточно малых значениях постоянной интеграла площадей ($k^2 < k_{1\,0}^2 = f(M + m)F_1(r_{1\,0})$) стационарных движений нет (уравнение (1.5) при $i = 1$ не имеет решений); при $k^2 = k_{1\,0}^2$ существует единственное решение $r = r_{1\,0}$, а при $k^2 > k_{1\,0}^2$ – два семейства стационарных движений $r = r_1^+(k^2)$ и $r = r_1^-(k^2)$, причем $r_1^+(k^2) > r_{1\,0} > r_1^-(k^2)$.

Вычисляя коэффициенты матрицы второй вариации измененного потенциала на стационарных движениях (2.1), имеем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2} = fMm\frac{a^2 r}{(r^2 - a^2)^2} > 0, \quad \forall r, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial\varphi\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = \mu M\frac{k^2}{(r^2 - a^2)}\frac{F_1'}{F_1^2} \gtrless 0 \quad \text{при} \quad r \gtrless r_{1\,0}$$

Таким образом, семейство стационарных движений $\varphi = 0$, $r = r_1^+(k^2)$ всегда устойчиво, а семейство стационарных движений $\varphi = 0$, $r = r_1^-(k^2)$ всегда неустойчиво (степень неустойчивости равна единице).

Заметим также, что угловая скорость вращения точки M и стержня вокруг их общего центра масс на стационарных движениях (2.1) задается соотношением

$$\omega_1^2 = \left\{\frac{f(M + m)}{r(r^2 - a^2)}\right\}_{r = r_1(k^2)} \tag{2.3}$$

3. Рассмотрим стационарные движения вида

$$\varphi=\pi/2, \quad r=r_2(k^2) \tag{3.1}$$

где $r_2(k^2)$ – решение уравнения (1.5) при $i=2$ (при этом, очевидно, предполагается, что $r>0$).

Функция $F_2(r)$ ограничена снизу, положительна, стремится к бесконечности как при $r\to+\infty$, так и при $r\to+0$, и достигает минимума в единственной точке $r_{20}>0$, в которой обращается нуль ее производная, причем

$$r_{20}=a\left(\frac{2\mu-1+\sqrt{(2\mu-1)^2+8/3(1-\mu)}}{2(1-\mu)}\right)^{1/2} \tag{3.2}$$

(при этом $F_2'\gtrless 0$ при $r\gtrless r_{20}$).

Таким образом, если стержень ортогонален прямой, соединяющей его середину с точкой M, то при $k^2<k_{20}^2=f(M+m)F_2(r_{20})$ стационарных движений нет; при $k^2=k_{20}^2$ существует единственное решение $r=r_{20}$, а при $k^2>k_{20}^2$ – два семейства стационарных движений $r=r_2^+(k^2)$ и $r=r_2^-(k^2)$, причем $r_2^+(k^2)>r_{20}>r_2^-(k^2)$.

Вычисляя коэффициенты матрицы второй вариации измененного потенциала на стационарном движении (3.1), имеем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}=-fMm\frac{a^2}{(r^2+a^2)^{3/2}}<0, \quad \forall r, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial\varphi\partial r}=0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}=\mu M\frac{k^2}{r(r^2+a^2)^{1/2}}\frac{F_2'}{F_2^2}\gtrless 0 \quad \text{при} \quad r\gtrless r_{20}$$

Следовательно, все стационарные движения вида (3.1) неустойчивы в вековом смысле, причем степень неустойчивости семейства $\varphi=\pi/2$, $r=r_2^+(k^2)$ равна единице (т.е. это семейство неустойчиво по Ляпунову), а степень неустойчивости семейства $\varphi=\pi/2$, $r=r_2^-(k^2)$ равна 2 (т.е. возможна гироскопическая стабилизация; см. ниже).

Заметим также, что угловая скорость вращения точки M и стержня вокруг их общего центра масс на стационарных движениях (3.1) задается соотношением

$$\omega_2^2=\left\{\frac{f(M+m)}{r^2(r^2+a^2)^{1/2}}\right\}_{r=r_2(k^2)} \tag{3.3}$$

4. Исследуем возможность гироскопической стабилизации стационарных движений

$$\varphi=\pi/2, \quad r=r_2^-(k^2) \tag{4.1}$$

степень неустойчивости которых равна 2.

Линеаризованные в окрестности решения (4.1) уравнения возмущенного движения приведенной системы можно привести к виду

$$Ax^{\cdot\cdot}+Gy^{\cdot}-Cx=0, \quad By^{\cdot\cdot}-Gx^{\cdot}-Dy=0 \tag{4.2}$$

$$A=1, \quad B=\left\{\frac{r^2}{3(1-\mu)r^2+a^2}\right\}, \quad G=\left\{\frac{2a\sqrt{f(M+m)}}{[3(1-\mu)r^2+a^2](r^2+a^2)^{1/4}}\right\}$$

$$C=f(M+m)\left\{\frac{2a^4-3(1-2\mu)a^2r^2-3(1-\mu)r^4}{[3(1-\mu)r^2+a^2]r^2(r^2+a^2)^{3/2}}\right\}, \quad D=\frac{f(M+m)}{\{(r^2+a^2)^{3/2}\}}$$

$(x=r-r_2^-(k^2),\ y=a(\varphi-\pi/2))$

Фигурные скобки означают, что содержащиеся в них выражения вычисляются для $r=r_2^-(k^2)$.

Достаточные условия гироскопической стабилизации нулевого решения системы (4.1) имеют вид (ср. с [3])

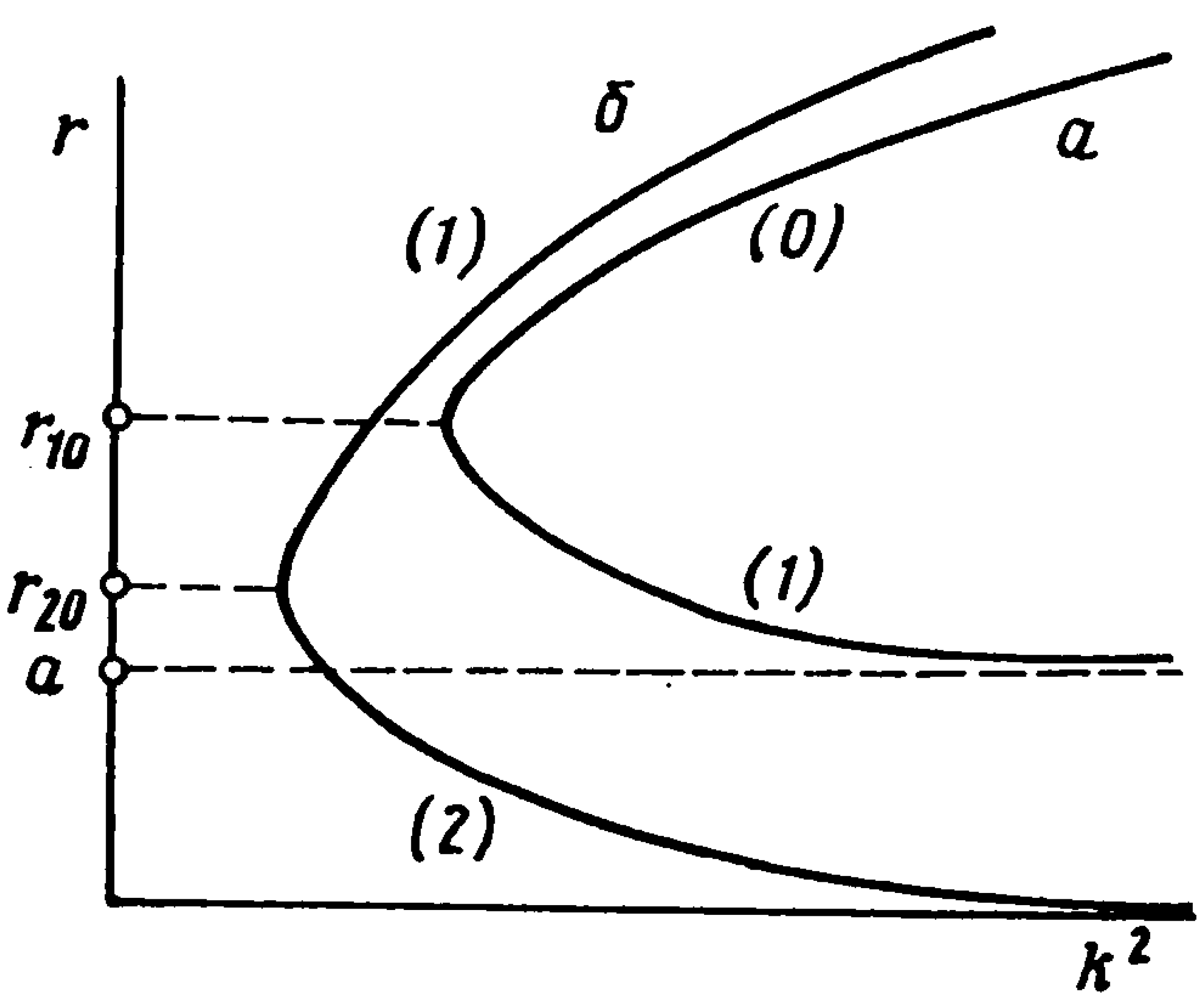
$$G^2 > AD + BC + 2\sqrt{ABCD} \tag{4.3}$$

откуда следует, что гироскопическая стабилизация невозможна при $r_2^-(k^2) \to 0$ и заведомо имеет место при $r_2^-(k^2) \to r_{20}$, $\mu \to 1$. Действительно, соотношение (4.3) не выполняется при $r = 0$ и всегда выполняется при $r = r_{20}$, $\mu = 1{-}0$.

В заключение отметим, что рассматриваемая система не может совершать стационарных движений, отличных от (1.4), (1.5), поскольку первое уравнение системы (1.3)

$$\frac{\mu(1-\mu)}{2a} r\sin\varphi \left\{ \frac{\Phi^+ + a}{\Phi^+[\Phi^+ + (r\cos\varphi + a)]} - \frac{\Phi^- - a}{\Phi^-[\Phi^- + (r\cos\varphi - a)]} \right\} = 0 \tag{4.4}$$

удовлетворяется только значениями $\varphi = 0$, $\pi/2 \,(\mathrm{mod}\,\pi)$. Действительно, при $\varphi \neq 0$, $\pi/2\,(\mathrm{mod}\,\pi)$ уравнение (4.4) эквивалентно уравнению $\Phi^+ - \Phi^- + 2a = 0$, которое не имеет решений.



Кроме того, заметим, что критические значения r_{10} и r_{20} функций F_1 и F_2 удовлетворяют неравенству $r_{10} > r_{20}$ $\forall \mu \in (0,1)$, а сами эти функции – неравенству $F_1 > F_2 \forall r > a$.

При учете последних замечаний результаты исследования можно представить в виде бифуркационной диаграммы на плоскости (r, k^2) (фигура). Кривые *а* и *б* отвечают решениям (2.1) и (3.1), а цифрами (0), (1), (2) – отмечена степень неустойчивости соответствующих ветвей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sulikashvili R.S.* On straightline libration points in the restricted plane problem of three bodies // Applied Mechanics. Beijing: Intern. Acad. Publ, 1989. V. 1. P. 358–362.
2. *Белецкий В.В., Пономарева О.Н.* Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле. Космические исследования // 1990. Т. 28. № 5. С. 664–675.
3. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.

Москва, Тбилиси

Поступила в редакцию
5.III.1992