Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 6, 1992

УДК 531.36:534.1

© 1992 г. М. У. Ахметов, Н.А. Перестюк

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Исследуется задача существования и устойчивости периодических и почти периодических решений сильно нелинейных импульсных систем. Метод Пуанкаре [1] обосновывается в случае изолированного порождающего решения. В качестве примера рассматривается динамическая система, состоящая из шарика на вибрирующей плоскости.

Метод малого параметра для исследования систем с разрывными решениями применялся раннее [2, 3] в случае, когда периодическое решение неизолированно.

Ниже используется метод сведения исследования систем уравнений с импульсным воздействием на поверхностях к уравнениям с фиксированными моментами импульсного воздействия.

1. Основные определения. Пусть G_x – область из R^n, имеющая компактное замыкание, $\mu_0 > 0$ – фиксированное действительное число. На множестве

$$G = \{(\mathbf{x}, t, i, \mu) \mid \mathbf{x} \in G_x, t \in R, i = 0, \pm 1, \ldots, -\mu_0 < \mu < \mu_0\}$$

рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях, имеющую вид

$$\begin{aligned} &d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \mu \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mu), \quad t \neq t_i(\mathbf{x}) + \mu \tau_i(\mathbf{x}, \mu) \\ &\Delta \mathbf{x}|_{t = t_i(\mathbf{x}) + \mu \tau_i(\mathbf{x}, \mu)} = \mathbf{I}_i(\mathbf{x}) + \mu \mathbf{W}_i(\mathbf{x}, \mu) \\ &\mathbf{f} \in C^{(0,2)}(G) \cap C^{(1,2)}(G_0), \mathbf{g} \in C^{(0,1,1)}(G) \cap C^{(1,2,2)}(G_0) \end{aligned} \tag{1.1}$$

в которой $\Delta \mathbf{x}/_{t=\theta} = \mathbf{x}(\theta +) - \mathbf{x}(\theta)$, $\mathbf{I}_i, t_i, \mathbf{W}_i, \tau_i$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции, G_0 – объединение некоторых окрестностей поверхностей $t = t_i(\mathbf{x})$.

Процесс, определяемый (1.1) при фиксированном μ, происходит следующим образом: изображающая точка $P_t = (t;\ \mathbf{x}(t))$, выйдя из точки $(t_0, \mathbf{x}_0)$, движется по кривой $\{t;\ \mathbf{x}(t)\}$, определяемой решением $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ уравнения

$$d\mathbf{x}/dt = f(t, \mathbf{x}) + \mu \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mu) \tag{1.2}$$

Движение по этой кривой осуществляется до момента $t = \theta_i$, в который точка P_t попадает на одну из поверхностей разрыва так, что $\theta_i = t_i(\mathbf{x}(\theta_i)) + \mu \tau_i(\theta_i), \mu)$.

В этот момент точка P_t совершает скачок на величину $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{I}_i(\mathbf{x}(\theta_i)) + \mu \mathbf{W}(\mathbf{x}(\theta_i), \mu)$ и движется дальше по кривой $\{t;\ \mathbf{x}(t)\}$, описываемой решением $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \theta_i, \mathbf{x}(\theta_i +))$ системы (1.2) и т.д. Таким образом, решением уравнения (1.1) является кусочно-непрерывная, непрерывная слева, с разрывами первого рода функция. Основные результаты теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием изложены в [4].

Сложность исследования системы (1.1) заключается в том, что точки разрыва различных решений, вообще говоря, не совпадают. Поэтому, чтобы лучше описывать асимптотические свойства решений и их зависимость от начальных данных и параметра введем следующие определения.

Пусть $\mathbf{x}(t)$ решение системы (1.1), определенное на промежутке U (U может быть отрезком, вещественной прямой или полуосью).

Будем говорить, что решение $y(t)$ этой системы находится в ϵ-окрестности решения $x(t)$, если: 1) мера симметрической разности областей существования этих решений не больше, чем ϵ; 2) точки разрыва решения $y(t)$ расположены в ϵ-окрестности точек разрыва решения $x(t)$; 3) для всех $t \in U$, лежащих вне ϵ-окрестности точек разрыва решения $x(t)$, справедливо неравенство $\|x(t) - y(t)\| < \epsilon$.

Топологию, определенную при помощи ϵ-окрестностей кусочно-непрерывных функций, назовем B-топологией.

Решение $x(t)$ назовем B-сустойчивым, если $U = \{t \in R / t \geqslant t_0\}$, $t_0 \in R$, и для любого $\epsilon > 0$ существует действительное число $\delta > 0$ такое, что решение $y(t)$, удовлетворяющее условию $\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta$ находится в ϵ-окрестности решения $x(t)$. (Точка t_0 не должна являться точкой разрыва решений $x(t)$ и $y(t)$).

B-устойчивое решение $x(t)$ называется B-асимптотически устойчивым, если существует такое число $\delta > 0$, что для любого действительного $\epsilon > 0$ найдется вещественное число $\theta > t_0$ такое, что решение $y(t)$, для которого справедливо неравенство $\|x(t_0) - - y(t_0)\| < \delta$, принадлежит ϵ-окрестности решения $x(t)$ при $U = \{ t \in R / t \geqslant \theta \}$.

Пусть $x(t) = x(t, \mu_0)$, $x(t_0) = x_0$ – решение системы (1.1), U – ограниченное множество. Решение $y(t) = x(t, \mu_0 + \Delta\mu)$ также удовлетворяет начальному условию $y(t_0) = x_0$, θ_i и ξ_i соответственно точки разрыва решений $x(t)$ и $y(t)$.

Кусочно-непрерывную функцию $u(t)$ назовем B-производной решения $x(t)$ по параметру μ, если для всех точек $t \in U$, расположенных вне промежутков $(\theta_i, \xi_i]$ при $\theta_i \leqslant \xi_i$ или вне промежутков $(\xi_i, \theta_i]$ при $\xi_i < \theta_i$, справедливо соотношение $y(t) = = x(t) + u(t)\Delta\mu + o(|\Delta\mu|)$ и, кроме того, существует последовательность действительных чисел r_i, таких, что для каждого i, $\xi_i = \theta_i + r_i\Delta\mu + o(|\Delta\mu|)$.

Аналогично можно дать определение B-производных решения системы (1.1) по начальным данным [5].

Кусочно-непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная и равномерно ограниченная на множестве R, имеющая разрывы первого рода в точках последовательности θ_i, $\theta_i \to \to \pm\infty$ при $i \to \pm\infty$, равномерно непрерывная на совокупности интервалов (θ_i, θ_{i+1}), $i = 0, \pm 1, \ldots$ называется почти периодической (п.п.), если для любого вещественного $\epsilon > 0$ существует относительно плотное множество ϵ-почти периодов τ таких, что каждая функция $\varphi(t + \tau)$ находится в ϵ-окрестности $\varphi(t)$.

Рассмотрим порождающую для уравнения (1.1) систему

$$dx/dt = f(t, x); \; t \neq t_i(x), \; \Delta x|_{t = t_i(x)} = I_i(x) \tag{1.3}$$

Будем предполагать, что существует действительное число $\omega > 0$ и целое число $p > 0$, для которых равномерно в области G выполняются равенства $f(t + \omega, x) = = f(t, x)$, $t_{i+p}(x) = t_i(x) + \omega$, $I_{i+p}(x) = I_i(x)$, уравнение (1.3) допускает решение $x = \psi(t)$ периода ω с точками разрыва $t = \theta_i$, $0 < \theta_1 < \theta_2, \ldots < \theta_p < \omega$.

Пусть Γ – некоторая окрестность интегральной кривой решения $\psi(t)$ в множестве $G_x \times R$,

$$M = \sup_{\Gamma} \|f\|, \quad C = \sup_{\Gamma} \left\| \frac{\partial t_i}{\partial x} \right\|$$

и справедливы соотношения

$$\min \inf_{\Gamma} (t_i(x) - t_i(x + I_i(x))) > 0, \quad MC < 1 \tag{1.4}$$

$$\min (\inf_{G_x} t_i(x) - \sup_{G_x} t_{i-1}(x)) = \gamma > 0 \tag{1.5}$$

Дальше f, x, I и их производные будем считать векторами-столбцами; а производные функций t_i – векторами-строками. Произведение векторов и матриц определим как обычное произведение прямоугольных матрица. Значения функций в точках $(\theta_i, \psi(\theta_i))$ и $(\theta_i, \psi(\theta_i+))$ будем записывать без указания значений аргументов, отличая второй случай верхним индексом плюс.

Из условий (1.4) следует [4], что при достаточно малом $|\mu|$ отсутствует "биение" решений (11.) о поверхности разрыва.

Система уравнений в вариациях [5] относительно решения $\mathbf{x} = \psi(t)$ имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}, \quad t \neq \theta_i, \quad \Delta\mathbf{u}\,|_{t=\theta_i} = \mathbf{P}_i\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \psi(t))}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{P}_i = (\mathbf{f} - \mathbf{f}^+)\frac{\partial t_i}{\partial \mathbf{x}}\left(1 - \frac{\partial t_i}{\partial \mathbf{x}}\cdot \mathbf{f}\right)^{-1} + \tag{1.6}$$

$$+\frac{\partial \mathbf{I}_i}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{E} + \mathbf{f}\frac{\partial t_i}{\partial \mathbf{x}}\left(1 - \frac{\partial t_i}{\partial \mathbf{x}}\cdot \mathbf{f}\right)^{-1}\right)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная $(n \times n)$-матрица.

Зафиксируем i. Пусть $\mathbf{x}_0(t)$ – решение системы (1.2) с начальным условием $\mathbf{x}_0(\theta_i) = \mathbf{x}$, $t = \xi_i$ – момент встречи этого решения с поверхностью $t = t_i(\mathbf{x}) + \mu\tau_i(\mathbf{x}, \mu)$, $\mathbf{x}_1(t)$ – решение задачи Коши $\mathbf{x}_1(\xi_i) = \mathbf{x}_0(\xi_i) + \mathbf{I}_i(\mathbf{x}_0(\xi_i)) + \mu\mathbf{W}_i(\mathbf{x}_0(\xi_i), \mu)$ системы (1.2). Предполагая, существование решений $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_1$, определим отображение

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{x}, \mu) = \int_{\theta_i}^{\xi_i} [\mathbf{f}(u, \mathbf{x}_0(u)) + \mu\mathbf{g}(u, \mathbf{x}_0(u), \mu)]\,du +$$

$$+ \mathbf{I}_i\left(\mathbf{x} + \int_{\theta_i}^{\xi_i} [\mathbf{f}(u, \mathbf{x}_0(u)) + \mu\mathbf{g}(u, \mathbf{x}_0(u), \mu)]\,du\right) +$$

$$+ \int_{\xi_i}^{\theta_i} [\mathbf{f}(u, \mathbf{x}_1(u)) + \mu\mathbf{g}(u, \mathbf{x}_1(u), \mu)]\,du$$

и построим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени, имеющую вид

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) + \mu\mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mu), t \neq \theta_i \\ &\Delta\mathbf{y}|_{t=\theta_i} = \mathbf{J}_i(\mathbf{y}, \mu) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Можно проверить, что справедливо следующее свойство [6] A: если $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ решения соответственно уравнений (1.1) и (1.7), имеющие одинаковые начальные условия и общую область существования, $t = \xi_i$ – точки разрыва решения $\mathbf{x}(t)$, то для каждого i справедливо равенство $\mathbf{x}(\theta_i) = \mathbf{y}(\theta_i)$, если $\theta_i \leqslant \xi_i$ или $\mathbf{x}(\theta_i) = \mathbf{y}(\theta_i+)$, если $\xi_i < \theta_i$.

Так, что, если обозначить $\mathbf{J}_i(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{Q}_i(\mathbf{x})$, то решение $\psi(t)$ системы (1.3) является также решением уравнения

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad t \neq \theta_i, \quad \Delta\mathbf{x}|_{t=\theta_i} = \mathbf{Q}_i(\mathbf{x}) \tag{1.8}$$

Доказываемые в работе теоремы 1 и 2 являются обобщениями соответствующих утверждений из [1].

2. Периодические решения. Предположим дополнительно к условиям разд. 1, что равномерно в области G справедливы равенства $\mathbf{g}(t + \omega, \mathbf{x}, \mu) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mu)$, $\mathbf{W}_{i+p} = \mathbf{W}_i$, $\tau_{i+p} = \tau_i$.

Теорема. 1. Пусть системы (1.1) и (1.3) удовлетворяют перечисленным условиям и мультипликаторы уравнения (1.6) не равны единице.

Тогда при достаточно малом $|\mu|$ система (1.1) допускает единственное ω-периодическое решение, которое при $\mu \to 0$ стремится в B-топологии к решению $\mathbf{x} = \psi(t)$, порождающего уравнения (1.3). Если к тому же все мультипликаторы системы (1.6) расположены внутри единичного круга, что ω-периодическое решение системы (1.1) B-асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}(t, \eta, \mu)$, $\mathbf{x}(0, \eta, \mu) = \eta$ – решение уравнения (1.1), $\psi(t) = \mathbf{x}(t, \eta_0, 0)$ – ω-периодическое решение системы (1.3). Для того, чтобы $\mathbf{x}(t, \eta, \mu)$ было ω-периодическим решением необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{D}(\eta, \mu) \equiv \mathbf{x}(\omega, \eta, \mu) - \eta = 0 \tag{2.1}$$

было разрешимо относительно η.

Не нарушая общности, можно считать, что точка $(\eta_0, 0)$ вместе с некоторой своей окрестностью не принадлежит ни одной из поверхностей $t = t_i(\mathbf{x})$. Отсюда и из дифференцируемости функций $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{W}$, t_i, τ_i согласно теореме о существовании B-производных решений импульсных систем по начальным данным [5] следует, что якобиан $\mathbf{D}'_\eta(\eta, \mu)$ существует и непрерывен в окрестности точки $(\eta_0, 0)$.

Пусть теперь $\mathbf{X}(\omega)$ – матрица монодромии системы (1.6). По определению системы уравнений в вариациях $\mathbf{D}'_\eta(\eta_0, 0) = \det(\mathbf{X}(\omega) - \mathbf{E})$, и следовательно, в силу предположения о мультипликаторах $\mathbf{D}'_\eta(\eta_0, 0) \neq 0$. Отсюда следует существование единственного ω-периодического решения $\mathbf{x}(t, \eta, \mu)$. Стремление в B-топологии к $\psi(t)$ для этого решения вытекает из теоремы о непрерывной зависимости решений импульсной системы от начальных данных и параметров [7].

Пусть теперь все мультипликаторы системы (1.6) по модулю меньше единицы. В силу условий теоремы существуют B-производные решения $\mathbf{x}(t, \eta, \mu)$ по начальным данным η_j $(j = 1,2,\ldots,n)$, которые образуют нормированную фундаментальную матрицу решений, соответствующей $\mathbf{x}(t, \eta, \mu)$ системы уравнений в вариациях. Данная фундаментальная матрица решений в точке $t = \omega$ является матрицей монодромии. Так B-производные непрерывно зависят от μ, то соответствующие мультипликаторы будут при достаточно малом $|\mu|$ по модулю меньше единицы. Следовательно, в силу обобщения теоремы Ляпунова–Пуанкаре [5] ω-периодическое решение системы (1.1) B-асимптотически устойчивое. Теорема доказана.

3. Почти периодические решения. Пусть для (1.1) выполняются условия из разд. 1 и, кроме того, функция $\mathbf{g}$ п.п. по t в смысле Бора, а последовательности $\mathbf{W}_i$, τ_i п.п. равномерно в области G. Пусть также параметр μ в дополнение к перечисленным условиям малости удовлетворяет неравенству

$$|\mu| \sup_G |\tau_i| < \gamma/2.$$

На основании этих предположений аналогично доказательству леммы 5 [6] можно проверить, что последовательность $\mathbf{J}_i$ п.п. равномерно относительно $\mathbf{x}$ и μ. Кроме того, по лемме 1.5 функции $\mathbf{J}_i$ имеют по переменным x_j, $j = \overline{1,n}$, μ непрерывные производные второго порядка[1]. Применив лемму Адамара, найдем, что для каждого i справедливо представление $\mathbf{J}_i(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{Q}_i(\mathbf{x}) + \mu \mathbf{H}_i(\mathbf{x}, \mu)$, где $\mathbf{H}_i$ непрерывно-дифференцируемые функции, $\mathbf{Q}_i$ – дважды непрерывно-дифференцируемые функции и $\mathbf{H}_i$, $\mathbf{Q}_i$ – п.п. последовательности. Можно проверить также, что $\partial \mathbf{Q}_i(\psi(\theta_i))/\partial \mathbf{x} = \mathbf{P}_i$. Таким образом, в некоторой окрестности интегральной кривой решения $\mathbf{x} = \psi(t)$ в G (1.7) можно записать

---

[1] *Самойленко А.М., Перестюк Н.А., Ахметов М.У.* Дифференциальные свойства решений и интегральных поверхностей нелинейных импульсных систем: Препринт № 37. Киев, Ин-т математики. 1990. 50 с.

в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \mu \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mu), \quad t \neq \theta_i$$
$$\Delta \mathbf{x}|_{t=\theta_i} = \mathbf{Q}_i(\mathbf{x}) + \mu \mathbf{H}_i(\mathbf{x}, \mu). \tag{3.1}$$

Осуществив в уравнении (3.1) замену $\mathbf{x} = \psi(t) + \mathbf{z}$, перейдем к системе

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{z} + \Psi(t, \mathbf{z}) + \mu \mathbf{g}(t, \psi(t), 0) + \mu \mathbf{F}(t, \mathbf{z}, \mu), \quad t \neq \theta_i$$
$$\Delta \mathbf{z}|_{t=\theta_i} = \mathbf{P}_i \mathbf{z} + \mathbf{S}_i(\mathbf{z}) + \mu \mathbf{H}_i(\psi(\theta_i), 0) + \mu \mathbf{V}_i(\mathbf{z}, \mu) \tag{3.2}$$

в которой

$$\Psi(t, \mathbf{z}) = \mathbf{f}(t, \psi(t) + \mathbf{z}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) - \mathbf{A}(t)\mathbf{z}$$
$$\mathbf{F}(t, \mathbf{z}, \mu) = \mathbf{g}(t, \psi(t) + \mathbf{z}, \mu) - \mathbf{g}(t, \psi(t), 0)$$
$$\mathbf{S}_i(\mathbf{z}) = \mathbf{Q}_i(\psi(\theta_i) + \mathbf{z}) - \mathbf{Q}_i(\psi(\theta_i)) - \mathbf{P}_i \mathbf{z}$$
$$\mathbf{V}_i(\mathbf{z}, \mu) = \mathbf{H}_i(\psi(\theta_i) + \mathbf{z}, \mu) - \mathbf{H}_i(\psi(\theta_i), 0)$$

Можно проверить, что функции Ψ, $\mathbf{F}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{V}$ при всех i и $\mathbf{z}$ удовлетворяют неравенствам

$$\|\Psi(t, \mathbf{z})\| + \|\mathbf{S}_i(\mathbf{z})\| \leqslant m \|\mathbf{z}\|^2$$
$$\|\Psi(t, \mathbf{z}_1) - \Psi(t, \mathbf{z}_2)\| + \|\mathbf{S}_i(\mathbf{z}_1) - \mathbf{S}_i(\mathbf{z}_2)\| \leqslant$$
$$\leqslant l(\|\mathbf{z}_1\| + \|\mathbf{z}_2\|)\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|$$
$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{z}_1, \mu_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{z}_2, \mu_2)\| + \|\mathbf{V}_i(\mathbf{z}_1, \mu_1) -$$
$$- \mathbf{V}_i(\mathbf{z}_2, \mu_2)\| \leqslant k(\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\| + |\mu_1 - \mu_2|)$$

где m и k – неотрицательные постоянные, а функция $l(u) \to 0$ при $u \to 0$. Рассмотрим уравнение

$$d\mathbf{z}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{z} + \mu \mathbf{g}(t, \psi(t), 0), \quad t \neq \theta_i$$
$$\Delta \mathbf{z}|_{t=\theta_i} = \mathbf{P}_i \mathbf{z} + \mu \mathbf{H}_i(\psi(\theta_i), 0) \tag{3.3}$$

Если предположить, что мультипликаторы (1.6) не лежат на единичной окружности, то [4] существует функция Грина (3.3) $\Omega(t, s)$, для которой существуют постоянные $K \geqslant 1$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\|\Omega(t, s)\| \leqslant K \exp(-\alpha |t - s|), \quad -\infty < t, \ s < +\infty$$

Введем обозначения

$$L = \sup_t \|\mathbf{g}(t, \psi(t), 0)\| + \sup_i \|\mathbf{H}_i(\psi(\theta_i), 0)\|$$
$$K_0 = K \max\left(\frac{2}{\alpha}, \frac{2}{1 - e^{-\alpha\gamma}}\right)$$

Так как $\mathbf{g}(t, \psi(t), 0)$ п.п. функция, а $\mathbf{H}_i(\psi(\theta_i), 0)$ – п.п. последовательность, то функция

$$\varphi_0(t) = \mu \int_{\infty}^{\infty} \Omega(t, u) \mathbf{g}(u, \psi(u), 0)\, du + \mu \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Omega(t, \theta_i) \mathbf{H}_i(\psi(\theta_i), 0)$$

есть единственное п.п. решение уравнения (3.3) и для него верно неравенство $\|\varphi_0(t)\| \leqslant |\mu| K_0 L$ [4].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если система (1.1) удовлетворяет перечисленным условиям, то при достаточно малом $|\mu|$ она допускает единственное п.п. решение $\zeta(t)$, которое при $\mu \to 0$ стремится в B-топологии к ω-периодическому решению $x = \psi(t)$ порождающего уравнения (1.3).

Доказательство. Зафиксируем положительно число N и построим множество П всех разрывных п.п. функций $\varphi(t)$, имеющих разрывы в точках последовательности θ_i и, удовлетворяющих неравенству $\|\varphi(t) - \varphi_0(t)\| \leqslant |\mu| N$ при $t \in R$. Определим в этом пространстве норму

$$\|\varphi\|_0 = \sup_t \|\varphi(t)\|.$$

Пусть в П действует оператор Ф:

$$\Phi(\varphi(t)) = \varphi_0(t) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(t, u) [\Psi(u, \varphi(u)) + \mu F(u, \varphi(u), \mu)] du +$$

$$+ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Omega(t, \theta_i) [S_i(\varphi(\theta_i)) + \mu V_i(\varphi(\theta_i), \mu)]$$

Проверим, что при достаточно малом $|\mu|$ для каждого $\varphi \in$ П справедливо соотношение $\Phi(\varphi) \in$ П. Во первых, имеем

$$\|\Phi(\varphi(t)) - \varphi_0(t)\| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} Ke^{-\alpha|t-u|} [\mu^2 m (N + K_0 L)^2 +$$

$$+ \mu^2 k (N + K_0 + 1)] du + \sum_{i=-\infty}^{\infty} Ke^{-\alpha|t-\theta_i|} [\mu^2 m (N + K_0 L)^2 +$$

$$+ \mu^2 k (N + K_0 + 1)] \leqslant \mu^2 K_0 [m (N + K_0 L)^2 + (N + K_0 + 1)]$$

и поэтому, если предположить справедливым условие

$$|\mu| < N[K_0 (m (N + K_0 L)^2 + (N + K_0 + 1))]^{-1}$$

то выполняется неравенство $\|\Phi(\varphi(t)) - \varphi_0(t)\| \leqslant |\mu| N$.

Затем из почти перодичности функций $\Psi(t, \varphi(t))$, $F(t, \varphi(t), \mu)$ и последовательностей $S_i(\varphi(\theta_i))$, $V_i(\varphi(\theta_i), \mu)$, используя лемму 24.4 [4], найдем, что функция $\Phi(\varphi(t))$ почти периодическая. Пусть теперь $\varphi_1, \varphi_2 \in$ П. Для этих функций имеем

$$\|\Phi(\varphi_1) - \Phi(\varphi_2)\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} Ke^{-\alpha|t-u|} [l(2|\mu|N) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_0 + |\mu| k \|\varphi_1 - \varphi_2\|_0] du +$$

$$+ \sum_{i=-\infty}^{\infty} Ke^{-\alpha|t-\theta_i|} [l(2|\mu|N) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_0 +$$

$$+ |\mu| k \|\varphi_1 - \varphi_2\|_0] \leqslant K_0 (l(2|\mu|N) + |\mu| k) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_0$$

Отсюда при условии $K_0 (l(2|\mu|N) + |\mu| k) < 1$ следует, что Ф в пространстве П является оператором сжатия. Таким образом, если $|\mu|$ достаточно мало, то последовательность п.п. функций φ_k, где φ_0 – решение (3.3), а $\varphi_{k+1} = \Phi(\varphi_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ сходится к п.п. функции $v(t)$, которая является решением уравнения $z = \Phi(z)$.

Дифференцируя выражение $v = \Phi(v)$ в точках $t \neq \theta_i$ и проверяя выполнимость условий разрыва, убедимся, что v есть решение системы (3.2). Тогда функция $\eta = \psi(t) +$

$+ \mathbf{v}(t)$ является п.п. решением уравнения (3.1) и одновременно системы (1.7). Для нее справедливо неравенство

$$\| \eta(t) - \psi(t) \| \leqslant |\mu| \, (K_0 L + N) \qquad (3.4)$$

В силу свойства A найдем, что при достаточно малом $|\mu|$ система (1.1) допускает п.п. решение $\zeta(t)$.

Перейдем к доказательству единственности п.п. решения $\zeta(t)$. Вновь используя свойство A и замену $\mathbf{x} = \psi(t) + \mathbf{z}$ найдем, что доказательство сводится к проверке единственности п.п. решения системы (3.2). Предположим противное, что ψ_1 и ψ_2 – различные п.п. решения (3.2). Из свойств функции Грина $\Omega(t, s)$ следует, что для $j = 1,2$ справедливо равенство

$$\psi_j = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(t, u) \, [\Psi(u, \psi_j) + \mu \mathbf{F}(u, \psi_j, \mu)] \, du +$$

$$+ \sum_{-\infty}^{\infty} \Omega(t, \theta_i) \, [\mathbf{S}_i(\psi(\theta_i)) + \mu \mathbf{V}_i(\psi(\theta_i), \mu)]$$

Отсюда вытекает соотношение

$$\| \psi_1 - \psi_2 \| \leqslant K_0 \; (l(2|\mu| N) + |\mu| k) \; \| \psi_1 - \psi_2 \|_0, \; t \in R.$$

Но это неравенство возможно лишь при условии $\| \psi_1 - \psi_2 \|_0 = 0$, т.е. $\psi_1(t) \equiv \psi_2(t)$.

Наконец из неравенства (3.4) и непрерывной зависимости решений системы (1.1) от начальных данных и параметра следует сходимость $\zeta(t) \to \psi(t)$ в B-топологии при $\mu \to 0$.

Теорема доказана.

4. Пример. Рассмотрим динамическую систему, состоящую из шарика, прыгающего на платформе. Такая система исследовалась раннее в [8]. Предположим, что платформа не реагирует на удары шарика и движется по закону $X = X_0 \sin \omega t$. Движение шарика между соударениями определяется формулой

$$x = -g(t - \varphi)^2/2 + x_0^{\bullet} \, (t - \varphi) + x_0$$

где x_0 и $x_0^{\bullet}$ – значения координаты и скорости шарика в момент $t = \varphi$ сразу после удара.

Исследуемая динамическая система при условии

$$\omega^2 > \frac{\pi g}{X_0} \, \frac{1 - R}{1 + R} \qquad (4.1)$$

допускает движение $x = \psi(t)$ с периодом $T = 2\pi/\omega$, которое в момент $t = \varphi$, определяемый из соотношения

$$\cos \varphi = \frac{\pi g}{X_0 \omega^2} \, \frac{1 - R}{1 + R}$$

(R – коэффициент восстановления) имеет начальные значения

$$x_0 = X_0 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}, \quad x_0^{\bullet} = \pi g/\omega$$

Если обозначить $x = x_1$, $dx/dt = x_2$ $\arcsin(x_1/X_0)/\omega = t_0(x_1)$, то для рассматриваемой динамической системы можно построить адекватную математическую модель в виде следующей нелинейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$dx_1/dt = x_2, \; dx_2/dt = -g, \; t \neq t_0(x_1)$$

$$\Delta x_2 \, |_{t = t_0(x_1)} = (1 + R)[X_0 \, \omega \cos(\arcsin \frac{x_1}{X_0}) - x_2] \qquad (4.2)$$

Исходя из T-периодичности задачи, модель построена лишь для участка $[0, T]$. Для того чтобы рассматривать весь промежуток $-\infty < t < +\infty$, достаточно в системе (4.2) заменить поверхность $t = t_0(x_1)$ на поверхности $t = \tau_i \equiv t_0(x_1) + 2\pi i/\omega$.

Очевидно, что (4.2) является сильно идеализированной моделью. В нем не учтены сопротивление среды, неизбежные возмущения платформы, возможные упругие связи. Поэтому естественным является рассмотреть систему вида

$$
\begin{aligned}
&dx_1/dt = x_2\\
&dx_2/dt = -g + \mu f(t, x, \mu), \ t \neq t_l(x) + \mu\tau_l(x, \mu)\\
&\Delta x_2 \,|_{t = t_l(x) + \mu\tau_l(x,\mu)} = (1+R)\,[\,X_0\,\omega\cos(\arcsin \frac{x_1}{X_0}) - x_2\,] + \mu I_l(x, \mu)
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

в которой $x = (x_1, x_2)$, μ – малый параметр.

Будем считать, что в (4.3) функции f, I, τ имеют по переменным x_1, x_2, μ непрерывные частные производные второго порядка, функция f по t является непрерывно дифференцируемой. Для уравнений (4.3) порождающей является система (4.2). Поэтому начнем исследование с этой системы. Соответствующая решению $x = \psi(t)$ система уравнений в вариациях имеет вид

$$
\begin{aligned}
&du_1/dt = u_2, \ du_2/dt = 0, \ t \neq \varphi\\
&\Delta u_1 \,|_{t=\varphi} = -(1+R)u_1\\
&\Delta u_2 \,|_{t=\varphi} = \frac{\omega}{2}\,[\,\frac{(1+R)^2}{\pi} - b(1-R)^2)\,]u_1 - (1+R)u_2\\
&b = \sqrt{\cos^{-2}\varphi - 1}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Характеристическим уравнением для (4.4) является

$$\rho^2 + (\pi b(1-R^2) - (1+R^2))\rho + R^2 = 0$$

Из этого уравнения найдем, что (4.4) не имеет единичного мультипликатора при условии, что

$$R = 1 \ \text{или} \ \omega^2 \neq \frac{\pi g}{X_0}\,\frac{1-R}{1+R} \tag{4.5}$$

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы мультипликаторы были расположены внутри единичного круга, является неравенство

$$
\frac{\pi g}{X_0}\,\frac{1-R}{1+R} < \omega^2 < \left\{\left[\frac{\pi g(1-R)}{X_0(1+R)}\right]^2 + \left[\frac{2g(1+R^2)}{X_0(1+R)^2}\right]^2\right\}^{1/2} \tag{4.6}
$$

Соотношение (4.6) идентично условию, полученному в [8] методом припасовывания.

Перейдем к системе (4.3). Предполагая, что $R \neq 1$, рассмотрим два случая.

1°. Пусть функция f периода T по t и равномерно по x, μ, $l = 0, \pm1,...$ выполняются равенства $I_{l+1} = I_l$, $\tau_{l+1} = \tau_l$. Тогда из соотношений (4.1), (4.5), (4.6), согласно теореме 1, найдем, что если справедливо неравенство (4.6), то система (4.3) допускает при достаточно малом $|\mu|$ единственное B-асимптотически устойчивое решение с периодом T, которое при $\mu \to 0$ стремится в B-топологии к решению $x = \psi(t)$ системы (4.2).

2°. Пусть функция f п.п. по t в смысле Бора и последовательности I_l, τ_l п.п равномерно относительно x и μ. Можно проверить, что при выполнении условия (4.5) мультипликаторы уравнения (4.4) не лежат на единичной окружности. Следовательно, на основании теоремы 2 заключаем, что при выполнении неравенства

$$\omega^2 > \frac{\pi g}{X_0}\,\frac{1-R}{1+R}$$

система (4.3) допускает единственное п.п. решение которое при $\mu \to 0$ стремится в B-топологии к решению $x = \psi(t)$ уравнения (4.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
2. *Коловский М.З.* О применении метода малого параметра для определения разрывных периодических решений. Л.: Изд-во Ленингр. политехн. ин-та, 1961. 23 с.
3. *Нагаев Р.Ф.* Периодические решения кусочно-непрерывных систем с малым параметром // Прикл. мат. и мех. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 1059–1069.
4. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вищ. шк., 1987. 287 с.
5. *Ахметов М.У., Перестюк Н.А.* О дифференцируемой зависимости решений импульсных систем от начальных данных / Укр. мат. журн. 1989. Т. 41. № 8. С. 1028–1033.
6. *Ахметов М.У., Перестюк Н.А.* О методе сравнения для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. ур-ния. 1990. Т. 26. № 9. С. 1475–1483.
7. *Ахметов М.У., Перестюк Н.А.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях // Применение асимптотических методов в теории нелинейных дифференциальных уравнений. Киев, 1987. С. 11–17.
8. *Кобринский А.Е., Кобринский А.А.* Виброударные системы. М.: Наука, 1973. 591 с.

Поступила в редакцию 15.IV.1991

Киев