Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 6, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. В.Н. Скимель

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ ПРИЕМЛЕМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается приемлемость приближенных решений дифференциальных уравнений по части переменных. Дается определение такой приемлемости, обобщающее определение, использованное [1] в исследовании приемлемости прецессионных уравнений гироскопических систем. Вводятся соответствующие функции Ляпунова, с помощью которых решается задача приемлемости. В качестве приложения обсуждается возможность понижения порядка уравнений движения некоторых механических систем.

Идея применения метода функций Ляпунова к задачам приемлемости восходит к Четаеву, указавшему на известную общность этих задач с задачами устойчивости движения [2].

1. Постановка задачи. Пусть дана динамическая система

$$d\mathbf{y}/dt = \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}, \mathbf{a}), \quad \mathbf{y} \in R^n, \quad \mathbf{a} \in R^r \tag{1.1}$$

где $t \geqslant 0$ – независимая переменная (время), $\mathbf{a}$ – вектор постоянных существенных параметров, значения которых принадлежат заданной области $S(\mathbf{a} \in S)$.

Некоторую вектор-функцию

$$\mathbf{u}'(t, \mathbf{a}) = (u_1(t, \mathbf{a}), \ldots, u_n(t, \mathbf{a})) \tag{1.2}$$

примем за приближенное решение системы (1.1), полагая ее определенной и непрерывной вместе с производной $d\mathbf{u}/dt$ при $t \geqslant t_0$, $\mathbf{a} \in S$ ($\mathbf{u}'$ – означает вектор-строку).

Сравним приближенное решение (1.2) с решениями системы (1.1). С этой целью в уравнении (1.1) положим $\mathbf{y} = \mathbf{u}(t, \mathbf{a}) + \mathbf{x}$. Для переменных $\mathbf{x}$ получим уравнение

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{Y}(t, \mathbf{u}(t, \mathbf{a}) + \mathbf{x}, \mathbf{a}) - d\mathbf{u}(t, \mathbf{a})/dt \tag{1.3}$$

В дальнейшем полагаем выполненными условия существования и единственности решений системы (1.3) $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{a})$ в рассматриваемых областях.

Выделим, следуя условиям задачи, часть переменных $y_1, \ldots, y_m (m < n)$ и соответствующих им отклонений $x_1, \ldots, x_m$. В пространстве переменных $\{x_1, \ldots, x_m\}$ введем области (параллелепипеды), определив их неравенствами

$$\bar{\Pi}_\epsilon = \{\mathbf{x}: \ |x_\alpha| \leqslant \epsilon_1, \ |x_\beta| \leqslant \epsilon_2\}$$

$$\bar{\Pi}_\delta = \{\mathbf{x}: \ |x_\alpha| \leqslant \delta_1 < \epsilon_1, \ |x_\beta| \leqslant \delta_2 < \epsilon_2\}, \qquad (\alpha = 1, \ldots, m; \ \beta = m+1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

обозначая в дальнейшем через $\bar{\Pi} \backslash \Pi$ множество точек границы.

Определение 1. Приближенное решение (1.2) приемлемо по переменным $y_\alpha (\alpha = 1, \ldots, m)$, если для любых наперед заданных чисел $\epsilon_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ (первое может быть сколь угодно мало, а второе – велико) можно указать параметр $\mathbf{a}^* \in S$ и числа $\epsilon_2 > 0$, $\delta_1 > 0$, определяющие области (1.4), такие, что решения системы (1.3) $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{a}^*) \in \Pi_\epsilon$ $(t \geqslant t_0)$, если только $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Pi}_\delta$.

2. Функции Ляпунова. Будем рассматривать вещественные однозначные функции $v = v(t, \mathbf{x}, \mathbf{a})$, определенные и непрерывные вместе с производными $\partial v/\partial t$, $\partial v/\partial x_s$ $(s = 1, \ldots, n)$ в области

$$\Gamma = \{ \mathrm{x}: \ |x_\alpha| \leqslant h, \ |x_\beta| < \infty \}, \qquad t \geqslant t_0, \ \mathrm{a} \in S \tag{2.1}$$

наделяя их "свойством A" [3].

Определение 2. Функция $v = v(\mathrm{x}, \mathrm{a})$ обладает свойством A по переменным x_α, если для любых $\epsilon_1 > 0$ $(\epsilon_1 < h)$, $\delta_2 > 0$ существуют зависящие от них значения $\mathrm{a}^* \in S$ и числа $\epsilon_2 > 0$, $\delta_1 > 0$, определяющие области (1.4), такие, что выполняется неравенство

$$\inf [v(\mathrm{x}, \mathrm{a}^*): \ \mathrm{x} \in \bar{\Pi}_\epsilon \backslash \Pi_\epsilon] > \sup [v(\mathrm{x}, \mathrm{a}^*): \ \mathrm{x} \in \bar{\Pi}_\delta] \tag{2.2}$$

Определение 3. Функция $v = v(t, \mathrm{x}, \mathrm{a})$ обладает свойством A по переменным x_α, если в области (2.1) определены функции $w(\mathrm{x}, \mathrm{a})$, $W(\mathrm{x}, \mathrm{a})$, удовлетворяющие неравенству

$$w(\mathrm{x}, \mathrm{a}) \leqslant v(t, \mathrm{x}, \mathrm{a}) \leqslant W(\mathrm{x}, \mathrm{a}) \tag{2.3}$$

и для любых $\epsilon_1 > 0$ $(\epsilon_1 < h)$, $\delta_2 > 0$ существуют зависящие от них значения $\mathrm{a}^* \in S$ и числа $\epsilon_2 > 0$, $\delta_1 > 0$, определяющие области (1.4), такие, что выполняется неравенство

$$\inf [w(\mathrm{x}, \mathrm{a}^*): \ \mathrm{x} \in \bar{\Pi}_\epsilon \backslash \Pi_\epsilon] > \sup [W(\mathrm{x}, \mathrm{a}^*): \ \mathrm{x} \in \bar{\Pi}_\delta] \tag{2.4}$$

Очевидно, что функции w, W обладают свойством A по x_α в смысле определения 2.

Рассмотрим свойство A некоторых функций, достаточно часто используемых в приложениях.

1°. Видно, что квадратичная форма необходимо должна быть определенно-положительной в области $\mathrm{a} \in S$. Положив $x_\alpha = \xi_\alpha$, $x_\beta = \eta_{\beta - m}$ $(\alpha = 1, \ldots, m; \ \beta = m+1, \ldots, n; \ k = n - m)$, форму $v(\mathrm{x}, \mathrm{a}) = \mathrm{x}' D(\mathrm{a}) \mathrm{x}$ $(D(\mathrm{a}) = \| d_{ij}(\mathrm{a}) \| \ (i, j = 1, \ldots, n))$ запишем в виде

$$v(\mathrm{x}, \mathrm{a}) = \xi' M \xi + 2 \xi' N \eta + \eta' L \eta \quad (M = M', \ L = L') \tag{2.5}$$

$$\xi \in R^m, \quad \eta \in R^k, \quad \mathrm{x} = \mathrm{col}(\xi, \eta)$$

Матрицы M, N, L непрерывно зависят от параметров a, для которых форма v определенно-положительна.

Обозначим через $\| \cdot \|$ евклидову норму.

Пусть заданы ϵ_1, δ_2. Введем множества

$$\Gamma_{\epsilon_1} = \{ \mathrm{x}: \ \|\xi\| = \epsilon_1, \ \|\eta\| < \infty \}, \qquad \Gamma_{\delta_2} = \{ \mathrm{x}: \ \|\xi\| = 0, \ \|\eta\| \leqslant \delta_2 \sqrt{k} \} \tag{2.6}$$

Функция $v(\mathrm{x}, \mathrm{a})$ (2.5) обладает свойством A по ξ, если возможно указать значение параметра a^*, такое, что имеет место неравенство

$$l_1 = \min [v(\mathrm{x}, \mathrm{a}^*): \ \mathrm{x} \in \Gamma_{\epsilon_1}] > l_2 = \max [v(\mathrm{x}, \mathrm{a}^*): \ \mathrm{x} \in \Gamma_{\delta_2}] \tag{2.7}$$

Действительно, при выполнении неравенства (2.7) эллипсоид $v(\mathrm{x}, \mathrm{a}^*) = l_1$ заключает внутри себя множество Γ_{δ_2} (2.6), и следовательно, существует достаточно малое δ_1, определяющее область $\bar{\Pi}_\delta$ (1.4), целиком в нем заключенную. Параллелепипед $\bar{\Pi}_\epsilon$ (1.4) определяется тем же эллипсоидом: при достаточно большом ϵ_2 область $\bar{\Pi}_\epsilon$ заключает эллипсоид внутри себя. Неравенство (2.2) тем самым выполняется.

Условие (2.7) запишем в виде, удобном для использовании в приложениях. Стационарные значения $v(\mathrm{x}, \mathrm{a})$ (2.5) на множестве Γ_{ϵ_1} (2.6) определяются выражениями $\lambda_i \epsilon_1^2$ $(i = 1, \ldots, m)$, где $\lambda_i(\mathrm{a}) > 0$ – корни уравнения

$$\det (M - N L^{-1} N' - \lambda E) = 0 \tag{2.8}$$

С другой стороны, стационарные значения той же формы на множестве Γ_{δ_2} (2.6) будут $\nu_j k \delta_2^2$ $(j = 1, \ldots, k)$, где $\nu_j(\mathrm{a}) > 0$ – корни уравнения

$$\det (L - \nu E) = 0 \tag{2.9}$$

Тогда условию (2.7) соответствует неравенство

$$\lambda_{\min}(\mathrm{a}^*) \epsilon_1^2 > k \nu_{\max}(\mathrm{a}^*) \delta_2^2 \tag{2.10}$$

Здесь $\lambda_{min}(a^*)$, $\nu_{max}(a^*)$ — наименьший и наибольший при $a = a^*$ корни уравнений (2.8), (2.9).

Так, например, для $n = 2$, $m = 1$ неравенство (2.10), записанное в коэффициентах d_{ij}, имеет вид

$$(d_{11} - d_{12}^2/d_{22})\epsilon_1^2 > d_{22}\delta_2^2$$

2°. Рассмотрим функцию $v = v(t, x, a)$, для которой имеют место оценки (2.3)

$$W_1(x, a) \leqslant v(t, x, a) \leqslant W_2(x, a)$$

где $W_i (i = 1, 2)$ — определенно-положительные в области S квадратичные формы. Видно, что функция v обладает свойством A по x_α, если существует значение параметра a^*, такое, что выполняется неравенство

$$l_1 = \min[W_1(x, a^*):\ x \in \Gamma_{\epsilon_1}] > l_2 = \max[W_2(x, a^*):\ x \in \Gamma_{\delta_2}] \tag{2.11}$$

Действительно, при выполнении неравенства (2.11) эллипсоид $W_2(x, a^*) = l_1$ заключает внутри себя множество Γ_{δ_2}, и, следовательно, при достаточно малом δ_1 параллелепипед Π_δ (1.4) принадлежит этому эллипсоиду. В свою очередь рассматриваемый эллипсоид заключен в эллипсоиде $W_1(x, a^*) = l_1$, который при достаточно большом ϵ_2 определяет область Π_ϵ (1.4), его содержащую. Таким образом, для функций $W_i(x, a^*)$ строятся области (1.4), удовлетворяющие (2.4).

Неравенство (2.11) может быть записано в виде

$$\lambda_{min}^{(1)}(a^*)\epsilon_1^2 > k\nu_{max}^{(2)}(a^*)\delta_2^2, \tag{2.12}$$

где $\lambda_i^{(1)}(a)$, $\nu_j^{(2)}(a)$ — корни уравнений (2.8), (2.9), составленных соответственно для форм W_1, W_2.

3. Метод функций Ляпунова. Применение метода основывается на использовании функций v, обладающих свойством A, и их производных dv/dt в силу системы (1.3)

$$dv/dt = \partial v/\partial t + (\partial v/\partial x)'(Y(t, u(t, a) + x, a) - du(t, a)/dt) \tag{3.1}$$

$$(\partial v/\partial x = \operatorname{grad}_x v)$$

Эффективное решение задачи приемлемости может быть достигнуто путем сопоставления системы (1.3) с некоторой системой уравнений, для которой известна функция Ляпунова с требуемыми свойствами. Уравнение (1.3) должно быть в таком случае представлено в виде [2]

$$dx/dt = X(t, x, a) + f(t, x, a) \tag{3.2}$$

$$f(t, x, a) = Y(t, u(t, a) + \dot{x}, a) - du(t, a)/dt - X(t, x, a) \tag{3.3}$$

Предполагается, следовательно, что для системы

$$dx/dt = X(t, x, a) \tag{3.4}$$

известна функция $v(t, x, a)$, обладающая требуемыми свойствами, а ее применение к системе (3.2) позволяет сделать заключение о приемлемости решения (1.2) в смысле определения 1.

Пусть в уравнении (3.2) и равенстве (3.3) $X(t, x, a) = P(a)x$, $P(a) = \|p_{ij}(a)\|$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, $a > 0$.

Положим, что все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, а функции $f_i(t, x, a)$ равномерно ограничены относительно $t \geqslant t_0$ во всякой ограниченной замкнутой области пространства переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$. К рассматриваемому случаю приводят многие задачи.

Пусть для системы $dx/dt = P(a)x$ построена определенно-положительная квадратичная форма

$$v(x, a) = x'D(a)x \quad (D = D') \tag{3.5}$$

производная которой в силу этой системы имеет вид

$$(dv/dt)_* = -2\,\|x\|^2 \tag{3.6}$$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1°. Квадратичная форма v (3.5) обладает свойством A по x_α.

2°. Каковы бы ни были ϵ_1, δ_2, существует значение параметра a^* такое, что наряду с неравенством (2.10) имеет место неравенство

$$\epsilon_1(\lambda_{\min}(a^*)/\rho_{\max}(a^*))^{1/2} > n^2NM \tag{3.7}$$

где $\rho_{\max}(a^*)$ – наибольшее собственное значение формы (3.5), $N = \max|d_{ij}(a^*)|$, $M = \sup|f_i(t, x, a^*)|$ в области $\bar{H} = \{x: v(x, a^*) \leqslant l_1\}$ и $l_1 = \lambda_{\min}(a^*)\epsilon_1^2$.

Тогда приближенное решение (1.2) приемлемо для системы (1.1) по переменным y_α.

Доказательство. Пусть, следовательно, произвольно заданы ϵ_1, δ_2, и a^* – значение параметра, удовлетворяющее неравенствам (2.10), (3.7). Как было показано (2.7), эллипсоид $v(x, a^*) = l_1$ при выполнении неравенства (2.10) определяет области (1.4), для которых имеет место условие (2.2). Радиус R сферы, вписанной в этот эллипсоид, находится как $R = \epsilon_1(\lambda_{\min}(a^*)/\rho_{\max}(a^*))^{1/2}$. Производная функции (3.5) в силу системы (3.2) определится следующим образом:

$$dv/dt = -2\,\|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} f_i(t, x, a)\,\frac{\partial v(x, a)}{\partial x_i} \tag{3.8}$$

Так как $|\partial v(x, a^*)/\partial x_i| \leqslant 2n\|x\|N$, то в области $\bar{H}$ для производной (3.8) имеет место оценка

$$dv(x, a^*)/dt \leqslant -2\,\|x\|(\,\|x\| - n^2NM) \tag{3.9}$$

Но условие (3.7) означает, что $R > n^2NM$. Отсюда при учете условия (3.9) следует: $dv(x, a^*)/dt < 0$, если $x \in \bar{H}\backslash\bar{I}$, где $\bar{I} = \{x: \|x\|^2 \leqslant n^2NM\}$. Последнее означает, что любое решение $x(t, t_0, x_0, a^*)$ системы (3.2) (или, что то же (1.3)), с начальными условиями $t = t_0$, $x_0 \in H$, где $H = \{x: v(x, a^*) < l_1\}$ (и, в частности, $x_0 \in \bar{\Pi}_\delta$) не покидает при $t > t_0$ этой области (соответственно остается и в области Π_ϵ). Таким образом, выполняются условия определения 1. Приближенное решение приемлемо.

Вернемся к системе (3.2), полагая по-прежнему $a > 0$ и функции $f_i(t, x, a)$ равномерно ограниченными.

Рассмотрим случай, когда для системы (3.4) построена функция $v(t, x, a)$, удовлетворяющая оценкам, отчасти близким к таковым для квадратичных форм [4]. Пусть, следовательно, имеют место неравенства

$$\begin{gathered} W_1(x, a) \leqslant v(t, x, a) \leqslant W_2(x, a) \\ (dv/dt)_* \leqslant -c_1(a)\|x\|^2, \quad |\partial v/\partial x_i| \leqslant c_2(a)\|x\|; \quad c_s(a) > 0 \quad (s = 1, 2) \end{gathered} \tag{3.10}$$

где $W_s (s = 1, 2)$ – определенно-положительные квадратичные формы, $(dv/dt)_*$ – производная функции v в силу системы (3.4).

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1°. Функция $v(t, x, a)$ обладает свойством A по x_α.

2°. Каковы бы ни были ϵ_1, δ_2, существует значение параметра a^* такое, что наряду с неравенством (2.11) имеет место неравенство

$$\epsilon_1(\lambda_{\min}^{(1)}(a^*)/\rho_{\max}^{(2)}(a^*))^{1/2} > nMc_2(a^*)/c_1(a^*) \tag{3.11}$$

где $\rho_{\max}^{(2)}(a^*)$ – наибольшее собственное значение формы W_2 (3.10), $M = \sup|f_i(t, x, a^*)|$ в области $\bar{H}_1 = \{x: W_1(x, a^*) \leqslant l_1\}$.

Тогда приближенное решение (1.2) приемлемо для системы (1.1) по переменным y_α.

Доказательство. Пусть заданы произвольно ϵ_1, δ_2 и a^* – значение параметра, удовлетворяющее неравенствам (2.12), (3.11). Как было показано, при выполнении условия (2.12) эллипсоиды $W_s(\mathbf{x}, a^*) = l_1 (s = 1, 2)$ определяют области (1.4), удовлетворяющие (2.4). Определим радиус сферы, вписанной в эллипсоид $W_2(\mathbf{x}, a^*) = l_1$, как $R_2 = (l_1/\rho^{(2)}{}_{\max}(a^*))^{1/2}$. Производная функции v в силу системы (3.2) определяется следующим образом:

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_* + \sum_{i=1}^{n} f_i(t, \mathbf{x}, a)\,\frac{\partial v(t, \mathbf{x}, a)}{\partial x_i} \tag{3.12}$$

Принимая во внимание соотношения (3.10), получим оценку производной в области $\bar{H}_1$:

$$dv(t, \mathbf{x}, a^*)/dt \leqslant -c_1(a^*)\ \|\mathbf{x}\|\ (\ \|\mathbf{x}\| - nMc_2\ (a^*)/c_1(a^*))$$

Но условие (3.11) означает, что $R_2 > nMc_2(a^*)/c_1(a^*)$. Следовательно, $dv(t, x, a^*)/dt <$ < 0, если $\mathbf{x} \in \bar{H}_1 \backslash \bar{I}_1$, где

$$\bar{I}_1 = \{\mathbf{x}:\ \|\mathbf{x}\|^2 \leqslant nMc_2(a^*)/c_1(a^*)\}$$

Отсюда вытекает, что любое решение системы (3.2) с начальными условиями $t=$ $= t_0$, $\mathbf{x}_0 \in H_2$, где $H_2 = \{\mathbf{x}:\ W_2(\mathbf{x}, a^*) < l_1\}$ (и, в частности, $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Pi}_\delta$), не покидает при $t > t_0$ области H_1 (соответственно и области Π_ϵ). Условия определения 1 выполняются. Приближенное решение приемлемо.

Замечание 1. Если приемлемость приближенного решения (1.2) для системы (1.1) установлена при помощи теорем 1, 2, то можно показать, что это же решение приемлемо и для системы

$$d\mathbf{y}/dt = \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}, a) + \epsilon\boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{y}, a)$$

зависящей от двух существенных положительных параметров a и ϵ. Ограничимся случаем, когда уравнение (3.2) имеет вид

$$d\mathbf{x}/dt = P(a)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, a) + \epsilon\boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{u}(t, a) + \mathbf{x}, a) \tag{3.13}$$

Дополнительно в условиях теоремы 1 положим

$$|\psi_i(t, \mathbf{u}(t, a^*) + \mathbf{x}, a^*)| < l, \quad \mathbf{x} \in \bar{H}$$

Для производной функции (3.5) в силу системы (3.13) получим

$$\frac{dv}{dt} = -2\,\|\mathbf{x}\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (f_i + \epsilon\psi_i)\,\frac{\partial v}{\partial x_i} \tag{3.14}$$

Тогда при значении параметра a^* в области H для производной (3.14) имеет место оценка

$$dv(\mathbf{x}, a^*)/dt \leqslant 2\|\mathbf{x}\|\ [\|\mathbf{x}\| - n^2N(M + \epsilon l)]$$

откуда следует, что

$$dv(\mathbf{x}, a^*)/dt < 0, \quad \text{если} \quad \|\mathbf{x}\| > n^2N(M + \epsilon l)$$

Однако при значении a^* имело место неравенство $R > n^2NM$ (или, что то же, (3.7)). Но при достаточно малом ϵ также $R > n^2N(M + \epsilon l)$. Таким образом, условия теоремы 1 выполняются.

4. В качестве приложения рассмотрим некоторые задачи понижения порядка уравнений движения механической системы

$$A\mathbf{q}^{\cdot\cdot} + (B + \Gamma)\,\mathbf{q}^{\cdot} + C\mathbf{q} = \epsilon\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, a) \tag{4.1}$$

Здесь $\mathbf{q}' = (q_1, \ldots, q_m)$ – координаты, A, B, C – постоянные симметричные определенно-положительные матрицы, Γ – также постоянная кососимметрическая матрица, $G(a) = B + \Gamma$ – неособенная матрица, $a > 0$, $\epsilon > 0$ – существенные параметры.

За приближенное примем уравнение

$$G(a)\mathbf{p}^{\cdot}+C\mathbf{p}=0 \quad (\mathbf{p}'=(p_1,\ \ldots,\ p_m)) \tag{4.2}$$

для гироскопической системы обычно называемое прецессионным.

Уравнение (4.2) запишем в нормальной форме

$$\mathbf{p}^{\cdot}=-G^{-1}C\mathbf{p} \tag{4.3}$$

и обозначим через $\mathbf{p}(t,a)$ его решение при $t_0=0$ и фиксированном значении $\mathbf{p}_0$.

Очевидно, что положение равновесия $\mathbf{p}=0$ системы (4.3) асимптотически устойчиво, так же как и положение равновесия $\mathbf{q}=0$ системы (4.1) при $\varphi\equiv 0$.

Поставим задачу приемлемости этого приближенного решения для уравнения (4.1) по переменной $\mathbf{q}$. Обозначая $\mathbf{z}=\mathbf{q}-\mathbf{p}(t,a)$, подставляя затем в уравнение (4.1) и принимая во внимание, что $\mathbf{p}(t,a)$ – решение уравнения (4.2), для переменной $\mathbf{z}$ получим

$$\mathbf{z}^{\cdot\cdot}+A^{-1}G\mathbf{z}^{\cdot}+A^{-1}C\mathbf{z}=-\mathbf{p}^{\cdot\cdot}(t,a)+\epsilon A^{-1}\varphi(t,\mathbf{p}(t,a)+\mathbf{z},\mathbf{p}^{\cdot}(t,a)+\mathbf{z}^{\cdot},a) \tag{4.4}$$

В переменных $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}^{\cdot}$ уравнению (4.4) соответствует система вида (3.13), если положить $\mathbf{x}=\mathrm{col}(z,z^{\cdot})$, $\mathbf{x}\in R^n(n=2m)$, а также

$$P(a)=\begin{Vmatrix} 0 & E \\ -A^{-1}C & -A^{-1}G \end{Vmatrix},\qquad \mathbf{f}=\mathrm{col}(\mathbf{0},-\mathbf{p}^{\cdot\cdot}(t,a)),\qquad \psi=\mathrm{col}(\mathbf{0},A^{-1}\varphi) \tag{4.5}$$

Таким образом, в обозначениях (1.4) следует положить

$$x_\alpha=z_\alpha,\qquad x_\beta=z_\alpha^{\cdot}\quad (\alpha=1,\ \ldots,\ m;\ \beta=m+\alpha)$$

Решение задачи приемлемости сводится к построению для линейной однородной системы с матрицей $P(a)$ (4.5) квадратичной формы (3.5) и проверке условий теоремы 1 при учете замечания 1. При этом выражение для производной (3.8) принимает вид

$$dv/dt=-2\,\|\mathbf{x}\|^2-2\sum_{\alpha=1}^{m}\ \sum_{i=1}^{n} p_\alpha^{\cdot\cdot}(t,a)d_{m+\alpha,\,i}x_i \tag{4.6}$$

Соответственно в неравенстве (3.9) следует положить

$$N=\max|d_{m+\alpha,\,i}(a^*)|,\qquad |p_\alpha^{\cdot\cdot}(t,a^*)|<M\ \ (\alpha=1,\ \ldots,\ m;\ i=1,\ \ldots,\ n)$$

Согласно (4.3) получим

$$\mathbf{p}^{\cdot\cdot}(t,a)=K^2(a)\mathbf{p}(t,a),\qquad K(a)=G^{-1}C \tag{4 7}$$

Замечание 2. Если B – знакоопределенная диагональная матрица, то матрица $G=B+\Gamma$ – неособенная. Если же при этом B определенно-положительная, то $\det\|B+\Gamma\|>0$ [5].

Пример 1. *Приемлемость прецессионных уравнений гироскопа.* Пусть уравнения (4.1) имеют вид

$$\begin{aligned} &q_1^{\cdot\cdot}+bq_1^{\cdot}-aq_2^{\cdot}+c_1q_1=\epsilon\varphi_1(t,\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot},a)\\ &q_2^{\cdot\cdot}+bq_2^{\cdot}+aq_1^{\cdot}+c_2q_2=\epsilon\varphi_2(t,\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot},a)\end{aligned} \tag{4.8}$$

где a, b, c_1, c_2, ϵ – положительные постоянные; a, ϵ – существенные параметры.

Приближенные уравнения (4.3) запишутся в виде

$$\begin{aligned} &p_1^{\cdot}=-\mu(\mu bc_1p_1+c_2p_2)/\Delta(\mu),\qquad p_2^{\cdot}=-\mu(\mu bc_2p_2-c_1p_1)/\Delta(\mu)\\ &\mu=a^{-1},\qquad \Delta(\mu)=1+\mu^2b^2\end{aligned} \tag{4.9}$$

Решение уравнений (4.9) при фиксированном $\mathbf{p}_0$ ограничено:

$$|p_{1,2}(t,\mu)|<h_1\quad (t\geqslant 0)$$

Согласно (4.7) получим выражения

$$\begin{aligned} &p_1^{\cdot\cdot}=\mu^2[-c_1(c_2-\mu^2b^2c_1)p_1(t,\mu)+\mu c_2b(c_1+c_2)p_2(t,\mu)]/\Delta^2(\mu)\\ &p_2^{\cdot\cdot}=\mu^2[-\mu c_1b(c_1+c_2)p_1(t,\mu)-c_2(c_1-\mu^2b^2c_2)p_2(t,\mu)]/\Delta^2(\mu)\end{aligned}$$

из которых следует оценка

$$|p_{1,2}^{\cdot\cdot}(t,\mu)|<\mu^2 h_1(c_1c_2+O(\mu^3)) \tag{4.10}$$

В переменных x получим систему уравнений вида (3.2)

$$\begin{aligned} &dx_1/dt = x_3, \quad dx_2/dt = x_4\\ &dx_3/dt = -c_1x_1 - bx_3 + \mu^{-1}x_4 - p_1^{\cdot\cdot}(t,\mu)\\ &dx_4/dt = -c_2x_2 - \mu^{-1}x_3 - bx_4 - p_2^{\cdot\cdot}(t,\mu)\end{aligned} \tag{4.11}$$

Коэффициенты формы v (3.5) определяются выражениями

$$\begin{aligned} &d_{11} = \frac{[\mu^{-2}c_1 + b^2c_2 + (1+c_1)c_1c_2]}{bc_1c_2}, \quad d_{12} = \frac{-\mu^{-1}(c_2-c_1)}{c_1c_2}\\ &d_{13} = \frac{1}{c_1}, \quad d_{14} = \frac{\mu^{-1}}{bc_2}, \quad d_{22} = \frac{[\mu^{-2}c_2 + b^2c_1 + (1+c_2)c_1c_2]}{bc_1c_2}\\ &d_{23} = \frac{-\mu^{-1}}{bc_1}, \quad d_{24} = \frac{1}{c_2}, \quad d_{33} = \frac{1+c_1}{bc_1}, \quad d_{34} = 0, \quad d_{44} = \frac{1+c_2}{bc_2}\end{aligned} \tag{4.12}$$

Перейдем к неравенствам (2.10), (3.7). Представив форму в виде (2.5), из уравнения (2.8), если положить для определенности $c_2 > c_1$, после вычислений найдем, что при μ достаточно малом $\lambda_{\min}(\mu) \cong -2\mu^{-2}b(1+c_2)$. Корни уравнения (2.9) от параметра μ не зависят. Таким образом, при произвольно заданных ϵ_1, δ_2 неравенство (2.10) выполняется при достаточно малом μ^*.

В неравенстве (3.7) при достаточно малом μ согласно (4.10), (4.11), (4.6) имеют место значения $N = \mu^{-1}/(bc_2)$, $M \cong \mu^2 h_1 c_1 c_2$. Непосредственно из уравнения $|D(\mu) - \rho E| = 0$ видно, что величина $\rho_{\max}(\mu)$ имеет относительно μ тот же порядок, что и $\lambda_{\min}(\mu)$. Неравенство (3.7), следовательно, выполняется при μ^* достаточно малом. Приемлемость по координатам решений уравнений (4.9) для системы (4.8) с учетом замечания 1 тем самым установлена.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$q_\alpha^{\cdot\cdot} + ab_\alpha q_\alpha^{\cdot} + c_\alpha q_\alpha = \epsilon\varphi_\alpha(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, a) \quad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{4.13}$$

в которой b_α, c_α – положительные постоянные; $a > 0$, $\epsilon > 0$ – существенные параметры.

За приближенные примем уравнения

$$p_\alpha^{\cdot} = -\mu\gamma_\alpha p_\alpha \quad (\mu = a^{-1}, \ \gamma_\alpha = c_\alpha/b_\alpha) \tag{4.14}$$

решение которых $p_\alpha(t,\mu) = p_{\alpha 0}\exp\{-\mu\gamma_\alpha t\}$ и следовательно, $p_\alpha^{\cdot\cdot}(t,\mu) = \mu^2\gamma_\alpha^2 p_\alpha(t,\mu)$. Поскольку $|p_\alpha(t,\mu)| < h_1$ $(t \geqslant 0)$, то $|p_\alpha^{\cdot\cdot}(t,\mu)| < \mu^2 h_2$, где h_1, h_2 – соответствующим образом определенные постоянные.

Обозначая по-прежнему $x_\alpha = q_\alpha - p_\alpha(t,\mu)$, $x_\beta = q_\alpha^{\cdot} - p_\alpha^{\cdot}(t,\mu)$, где $\beta = m + \alpha$, получим систему уравнений

$$dx_\alpha/dt = x_\beta, \quad dx_\beta/dt = -c_\alpha x_\alpha - \mu^{-1}b_\alpha x_\beta - p_\alpha^{\cdot\cdot}(t,\mu) + \epsilon\varphi_\alpha(t, \mathbf{x}, \mu) \tag{4.15}$$

распадающуюся при $\epsilon = 0$ на m пар независимых систем уравнений вида (3.2) для переменных x_α, x_β.

Для каждой пары уравнений определим форму (3.5)

$$v_\alpha = d_{\alpha\alpha}x_\alpha^2 + 2d_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta + d_{\beta\beta}x_\beta^2 \tag{4.16}$$

производная которой (3.6) $(dv_\alpha/dt)_* = -2(x_\alpha^2 + x_\beta^2)$, а коэффициенты определяются выражениями

$$d_{\alpha\alpha} = \frac{\mu[\mu^{-2}b_\alpha^2 + c_\alpha(1+c_\alpha)]}{b_\alpha c_\alpha}, \quad d_{\alpha\beta} = \frac{1}{c_\alpha}, \quad d_{\beta\beta} = \frac{\mu(1+c_\alpha)}{b_\alpha c_\alpha} \tag{4.17}$$

Для системы (4.15) воспользуемся формой (4.16) $v = v_1 + \ldots + v_m$. Ее производная в силу этой системы имеет вид (3.14), (4.6)

$$\frac{dv}{dt} = -2\|\mathbf{x}\|^2 - 2\sum_{\alpha=1}^{m}[p_\alpha^{\cdot\cdot}(t,\mu) + \epsilon\varphi_\alpha(t,\mathbf{x},\mu)](d_{\alpha\beta}x_\alpha + d_{\beta\beta}x_\beta)$$

Обратимся к неравенствам (2.10), (3.7). Видно, что корнями уравнений (2.8) и (2.9) будут $\lambda_\alpha(\mu) = d_{\alpha\alpha} - d_{\alpha\beta}^2/d_{\beta\beta}$, $\nu_\alpha(\mu) = d_{\beta\beta}$. Принимая теперь во внимание выражения (4.17), заключаем, что неравенство (2.10) выполняется при достаточно малых значениях μ. Выполнение неравенства (3.7) при достаточно малых μ столь же очевидно. Действительно, при $\mu \to 0$ правая часть неравенства (3.7) неограниченно уменьшается. Левая часть при этом имеет предел, отличный от нуля.

Заметим, что собственные значения $\rho(\mu)$ формы v непосредственно определяются из уравнений

$$(d_{\alpha\alpha} - \rho)(d_{\beta\beta} - \rho) - d_{\alpha\beta}^2 = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, m;\ \beta = m + \alpha)$$

Выбрав удовлетворяющее условиям (2.10), (3.7) достаточно малое значение μ^*, следуя замечанию 1, определим величину второго существенного параметра ϵ. Приемлемость решения (4.14) для системы (4.13) тем самым установлена.

В заключение заметим, что к виду (4.13) приводятся, в частности, уравнения движения систем, матрицы диссипативных и потенциальных сил которых имеют вид

$$B = a\,\| b_\alpha \delta_{\alpha j} \|_1^m + \epsilon \| b_{\alpha j} \|_1^m, \qquad C = \| c_\alpha \delta_{\alpha j} \|_1^m + \epsilon \| c_{\alpha j} \|_1^m$$

В случае системы (4.13) наряду с приемлемостью решения (4.14) оценивается и допустимость ликвидации ее связанности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Гостехиздат, 1956. 299 с.
2. *Четаев Н.Г.* К вопросу об оценках приближенных интегрирований // Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 377–380.
3. *Скимель В.Н.* О свойстве жесткости движения // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 407–414.
4. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
5. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.; 3-е изд. М.: Наука, 1987. 304 с.

Казань

Поступила в редакцию
3.XII.1991