

УДК 531.36

© 1992 г. Н.К. Мошук

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предлагается приближенный метод анализа диффузионных процессов в натуральной механической системе, находящейся под действием возмущающих сил типа нормального белого шума. Он основан на ортогональных разложениях одномерной плотности распределения вероятностей вектора состояния в подходящем гильбертовом пространстве функций с интегрируемым квадратом по некоторой мере на многообразии — фазовом пространстве системы. Предлагаемый метод сводится к решению специальной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения и предназначен для реализации на ЭВМ. Приводится обоснование метода. В качестве примера изучается движение плоского математического маятника в случайной среде.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим натуральную механическую систему, стесненную стационарными геометрическими связями. Пусть  $Q$  — конфигурационное (гладкое) многообразие положений размерности  $n$ ,  $q = [q_1, \dots, q_n]^t$  — локальные координаты на  $Q$ . Предположим, что на систему действуют потенциальные силы с потенциальной энергией  $\Pi(q)$ , диссипативные силы, являющиеся производными от функции Релея  $q^t D(q) q / 2$ , а также случайные силы, обобщенный вектор которых представим в виде:  $F = b(q) V(t)$ , где  $V(t) = [V_1 \dots V_l]^t$  — вектор нормально распределенных белых шумов с постоянной матрицей интенсивности  $\nu$  (размером  $l \times l$ ),  $b(q)$  — некоторая матричная функция размером  $n \times l$ .

Уравнения движения системы запишем в форме Гамильтона

$$q' = \partial H / \partial p, \quad p' = -\partial H / \partial q - D^*(q)p + b(q)V(t), \quad q(t_0) = q_0, \quad p(t_0) = p_0 \quad (1.1)$$

$$H = p^t \Omega(q)p / 2 + \Pi(q), \quad D^* = D\Omega$$

Здесь  $H$  — функция Гамильтона,  $\Omega$  — некоторая положительная матрица.

Далее предполагается, что все детерминированные функции  $D(q)$ ,  $\Omega(q)$ ,  $b(q)$ ,  $\Pi(q)$  достаточно гладкие.

Уравнения (1.1) представляют собой стохастические дифференциальные уравнения Ито на многообразии  $X = T^*Q$  (фазовом пространстве системы) [1, 2]. Они определяют диффузионный процесс, управляемый параболическим (в широком смысле) оператором второго порядка

$$G = \frac{\partial^t H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \left( \frac{\partial^t H}{\partial q} + p^t D^* \right) \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( \sigma \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial^t}{\partial p} \right), \quad \sigma = \nu b b^t$$

Одномерная плотность распределения  $f(x, t)$  процесса  $x(t) = [q(t)^t p(t)^t]^t$  относительно элемента фазового объема  $d\mu_0 = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$  удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова:  $\partial f / \partial t = G^* f$ , где  $G^*$  — оператор, сопряженный к инфинитезимальному оператору  $G$  процесса  $x(t)$ . В развернутом виде это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^t}{\partial q} \left( \frac{\partial H}{\partial p} f \right) - \frac{\partial^t}{\partial p} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial q} + D^* p \right) f \right] - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( \sigma \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial^t}{\partial p} f \right) = 0 \quad (1.2)$$

$$\int_X f(x, t) d\mu_0 = 1, \quad f(x, t_0) = f_0(x)$$

Точное решение уравнения (1.2) в общем случае получить нельзя, поэтому основной задачей работы будет приближенное определение одномерного распределения вектора состояния.

Различным приближенным методам анализа стохастических дифференциальных систем (СДС) посвящено много работ (обзор см., например, [3]). Однако большинство из них основано на биортогональных разложениях плотности  $f$  с весовой функцией, зависящей от неизвестных параметров (моментов процесса), что создает определенные трудности в обосновании этих методов и в переносе их на случай диффузии на многообразиях. В тех же работах, где рассматривались ортогональные разложения  $f$ , тоже обычно ограничивались случаем  $X = R^m$  и полиномиальными правыми частями исходных уравнений. Общим недостатком этих методов было отсутствие строгого обоснования.

Другим эффективным методом анализа СДС является метод усреднения (о его применениях к некоторым задачам механики см. [4]). Однако здесь приходится ограничиваться случаями, когда медленное движение одномерно.

Некоторые качественные выводы о поведении системы можно получить при помощи следующей теоремы Хасьминского [5]: если существует компакт  $K \subset X$  и функция  $U(x) > 0$ , для которой  $GU(x) < -1$  при  $x \notin K$ , то стационарный режим существует. Он является единственным и эргодическим, т.е. предельным (в слабом смысле) для любого начального распределения (см. также [6]). Например, если  $Q$  — компактно и диссипация полная, то условия теоремы Хасьминского выполнены. В качестве функции  $U(x)$  можно взять функцию Гамильтона  $H$ .

Предлагаемый ниже метод основан на ортогональных разложениях плотности  $f$  и позволяет путем решения некоторой системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка  $N$  находить приближенные выражения для одномерной плотности распределения  $f$  и некоторых моментных характеристик процесса  $x(t)$ . Указаны условия, при которых ошибка приближения (в смысле метрики некоторого гильбертова пространства) стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Для реализации метода можно использовать ЭВМ.

**2. Метод исследования.** Рассмотрим стандартное гильбертово пространство  $L_2(X, \mu)$  — пространство функций  $\xi(x)$  на  $X$  с мерой  $\mu$  ( $d\mu = \mu_1(x)d\mu_0$ ) и нормой  $\|\xi\| = [\int_X |\xi(x)|^2 d\mu]^{1/2}$ , а также некоторый ортобазис  $\{e_j(x)\}$  [7]. Для  $j$  может быть

использована как векторная нумерация (тогда  $j$  — мультииндекс из некоторого множества), так и скалярная (тогда  $j = 0, \infty$ ). Ясно, что ввиду счетности ортобазиса всегда векторная нумерация может быть заменена обычной и наоборот. В этом разделе используется скалярная нумерация

Предположим, что искомая плотность  $f(x, t)/\mu_1(x) \in L_2(X, \mu)$ . Для гладкой системы (1.1) этого всегда можно добиться подходящим выбором меры  $\mu$ . Тогда существует единственный ряд  $\sum_j c_j e_j(x)$ , сходящийся в метрике пространства  $L_2(X, \mu)$  (т.е. в среднеквадратическом) к  $f(x, t)/\mu_1(x)$ ,  $f/\mu_1 \sim \sum_j c_j e_j$ , при этом коэффициенты  $c_j$  определяются формулами Фурье

$$c_j(t) = \int_X f(x, t) e_j(x) d\mu_0 = M e_j(x) \quad (2.1)$$

( $M$  — оператор математического ожидания). Коэффициенты  $c_j(t)$  удовлетворяют следующей бесконечной счетной системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{c}_j = (M e_j)' = M \dot{e}_j = M G e_j \quad (2.2)$$

Предположим, что  $G e_j \in L_2(X, \mu)$ , тогда  $G e_j$  можно также разложить в сходящийся ряд

$$G e_j \sim \sum_i a_{ji} e_i \quad (a_{ji} = \int_X e_i G e_j d\mu = \text{const})$$

и система (2.2) примет вид

$$c_j = \sum_i c_i a_{ji}, \quad c_j(t_0) = \int_X f_0(x) e_j(x) d\mu_0 \quad (2.3)$$

Система (2.3) линейная, но неоднородная, так как функция  $f$  должна удовлетворять условию нормировки. Чаще всего первый из коэффициентов  $c_j$  просто равен известной постоянной (что и будем в дальнейшем полагать).

Точное решение (2.3) в общем случае также получить невозможно. Поэтому можно ограничиться коэффициентами разложения  $c_j$  до некоторого порядка  $N$  включительно (положив остальные равными нулю):

$$c_j^* = \sum_{i=0}^N c_i^* a_{ji} \quad (j = 1, \dots, N) \quad (2.4)$$

Решив эту систему с соответствующими начальными условиями, можно составить приближенное значение одномерной плотности

$$f^*(x, t) = \mu_1(x) \sum_{j=0}^N c_j^*(t) e_j(x)$$

Особой точке системы (2.4) соответствует стационарный режим.

**3. Обоснование метода.** Обоснование предложенного метода сводится к оценке близости  $c_j^*(t)$  и  $c_j(t)$ , а также  $f(x, t)$  и  $f^*(x, t)$  в зависимости от порядка приближения  $N$ .

Рассмотрим теперь первые  $N$  точных уравнений (2.3) для  $c_j$  ( $j = 1, N$ ) и сопоставим их с приближенными (2.4) (начальные условия согласованы). Каждое  $j$ -е точное уравнение отличается от приближенного на величину  $\alpha_j(t) = \sum_{i>N} c_i(t) a_{ji}$ . Предположим, что ряд  $\sum_j c_j(t) e_j(x)$  сходится к  $f/\mu_1$  (по норме  $L_2(X, \mu)$ ) равномерно по  $t$ . Тогда, так как

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 = \left\| \frac{f}{\mu_1} \right\|^2, \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_{ji}^2 = \|G e_j\|^2$$

то из неравенства Коши – Шварца имеем

$$\left| \sum_{i>N} c_i(t) a_{ji} \right| \leq \sqrt{\sum_{i>N} c_i^2(t)} \sqrt{\sum_{i>N} a_{ji}^2} \quad (3.1)$$

причем

$$\sum_{i>N} c_i^2(t) \leq \epsilon(N), \quad \sum_{i>N} a_{ji}^2 = \chi_j(N)$$

и  $\epsilon(N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\chi(N) = \max_{1 \leq j \leq N} \chi_j(N)$ . Тогда из (3.1) следует, что

$$|\alpha_j(t)| \leq \epsilon_1(N), \quad j = 1, N, \quad \epsilon_1(N) \equiv \sqrt{\epsilon(N) \chi(N)}$$

Таким образом, система первых  $N$  точных уравнений (2.3) и система  $N$  приближенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами различаются на некий ограниченный по  $t$  столбец  $\alpha(t) = [\alpha_1 \dots \alpha_N]^t$ . Предположим, что все вещественные части собственных чисел матрицы  $A_N$  линейной системы (2.4) отрицательны, т.е. она (приближенная система) устойчива при постоянно действующих возмущениях. Тогда существует

$$\kappa_1(N, \epsilon_1) = \sup_B \sup_{t > t_0} \exp(t A_N) \int_{t_0}^t \exp(-\tau A_N) \alpha(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

где верхняя грань берется по множеству  $B$  гладких ограниченных по  $t$  положительным числом  $\epsilon_1$  вектор-функций  $\alpha(t)$  (т.е.  $|\alpha_j(t)| \leq \epsilon_1, j = 1, N$ ).

Через  $\kappa(N, \epsilon_1)$  обозначим максимальную из компонент  $N$ -мерного вектора  $\kappa_1$ . Величина  $\kappa(N, \epsilon_1)$  характеризует передаточные свойства приближенной системы (2.4). Оценим  $\kappa(N, \epsilon_1)$  для простоты в случае, когда все собственные числа  $\lambda_i$  ( $i = 1, N$ ) матрицы  $A_N$  простые. В этом случае пространство  $R^N$  (фазовое пространство системы (2.4)) распадается в прямую сумму одномерных и двумерных инвариантных относительно  $A_N$  подпространств, и существует вещественная замена переменных  $u = \Psi c$ , приводящая систему (2.4) к каноническому виду (см., например, [8]). В новых переменных  $u$  матрица линейной системы такова, что на главной ее диагонали стоят либо вещественные отрицательные собственные числа, либо двумерные клетки

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ -\beta_2 & \beta_1 \end{vmatrix}$$

(соответствующие собственным числам вида  $\beta_1 \pm i\beta_2$  ( $\beta_1 < 0$ )). Оценить  $\kappa$  для каждой из подсистем уже не составляет труда. В результате для всей системы получаем

$$\kappa(N, \epsilon_1) \leq \sqrt{2} \epsilon_1 N^2 \kappa_2, \quad \kappa_2 = \max_{i,j} |\psi_{ij}| \max_{i,j} |\psi^{ij}| / \min_i |\operatorname{Re} \lambda_i| \quad (3.3)$$

где  $\psi_{ij}$  и  $\psi^{ij}$  ( $i, j = 1, N$ ) — элементы матриц  $\Psi$  и  $\Psi^{-1}$  соответственно.

Заметим, что  $\Psi$  — это матрица перехода к системе координат, образованной собственными векторами оператора  $A_N$  (если они комплексные, то берутся отдельно их вещественные и мнимые части). Если эти векторы выбрать единичными, то  $\max_{i,j} |\psi_{ij}| = 1$ .

Аналогично можно оценить  $\kappa$  и в случае кратных корней.

Система первых  $N$  точных уравнений (2.3) представляет собой возмущение приближенной системы (2.4) некоторым ограниченным вектором  $\alpha(t)$ . Так как все собственные числа матрицы  $A_N$  отрицательны, то из формулы общего решения неоднородного линейного уравнения [8] и из (3.2) следует, что решения точной и приближенной систем в этом случае различаются не более чем на  $\kappa(N, \epsilon_1(N))$ , т.е.

$$|c_j(t) - c_j^*(t)| \leq \kappa(N, \epsilon_1(N)) \quad (j = 1, N)$$

Следовательно, если  $\kappa(N, \epsilon_1(N)) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , то и  $c_j \rightarrow c_j^*$  ( $j = 1, N$ ) равномерно по  $t$ .

Оценим близость  $f(x, t)$  и  $f^*(x, t)$ . Воспользуемся равенством Парсеваля

$$\|(f - f^*)/\mu_1\|^2 = \sum_{j=0}^N (c_j - c_j^*)^2 + \sum_{j>N} c_j^2$$

Отсюда следует, что при выполнении всех наложенных выше ограничений

$$\|(f - f^*)/\mu_1\|^2 \leq N\kappa^2(N, \epsilon_1(N)) + \epsilon(N)$$

Если дополнительно потребовать, чтобы  $N\kappa^2(N, \epsilon_1(N)) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , то тогда и  $\|(f - f^*)/\mu_1\| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть для исходной СДС (1.1) выполняются следующие условия:

1°. Функция  $f(x, t)/\mu_1(x) \in L_2(X, \mu)$  и ее ряд Фурье сходится к ней равномерно по  $t$ .

2°.  $Ge_j(x) \in L_2(X, \mu)$  для всех  $j$ .

3°. Все вещественные части собственных чисел матрицы  $A_N$  приближенной систе-

мы (2.4) отрицательны для любого  $N$ , начиная с некоторого.

$$4^\circ. \lim_{N \rightarrow \infty} \kappa(N, \epsilon_1(N)) = 0.$$

Тогда  $\lim_{N \rightarrow \infty} |c_j(t) - c_j^*(t)| = 0$  ( $j = 1, N$ ) равномерно по  $t$  ( $t \geq t_0$ ).

Если дополнительно выполняется условие

$$5^\circ. \lim_{N \rightarrow \infty} N\kappa^2(N, \epsilon_1(N)) = 0$$

то  $\lim_{N \rightarrow \infty} \| [f(x, t) - f^*(x, t)] / \mu_1(x) \| = 0$  равномерно по  $t$ .

При учете неравенства (3.3) условия  $4^\circ$  и  $5^\circ$  можно заменить соответственно на

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \kappa_2(N) \sqrt{\epsilon(N) \chi(N)} = 0 \text{ и } \lim_{N \rightarrow \infty} N^5 \kappa_2^2(N) \epsilon(N) \chi(N) = 0 \quad (3.4)$$

Для их выполнения необходимо, чтобы "сжимающие" свойства оператора  $A_N$  и скорость убывания коэффициентов разложения функции  $f/\mu_1$  с ростом  $N$  "побеждали" влияние увеличения размерности системы (некоторую степень  $N$ ), а также, как это следует из (3.3), некоторые эффекты, связанные с ориентацией в  $R^N$  собственных векторов оператора  $A_N$ .

Условие равномерной сходимости ряда Фурье функции  $f/\mu_1$  означает, что

$$\sup_{t_0 \leq t < \infty} \sum_{i > N} c_i^2(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty$$

Это условие можно ослабить. Если

$$\sup_{t_0 \leq t < T} \sum_{i > N} c_i^2(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty$$

то все выводы останутся справедливыми на  $t \in [t_0, T]$ .

Заметим, что в теореме вместо последовательности натуральных чисел  $\{N\}$  можно использовать ее некоторую подпоследовательность  $\{N_j\}$ . Тогда все выводы будут справедливыми при  $j \rightarrow \infty$ .

Обсудим некоторые аспекты практического применения теоремы 1. Проверить условие  $2^\circ$  и оценить  $\chi(N)$  можно непосредственно. Оценка  $\epsilon(N)$  зависит от гладкости функции  $f(x, t)$ , а та в свою очередь определяется гладкостью коэффициентов исходной системы (см. разд. 5). Некоторые трудности представляет проверка (аналитическая) условий 3–5. Но на практике нет необходимости исследовать пределы (3.4) и собственные числа  $A_N$  при  $N \rightarrow \infty$ . Это можно сделать для достаточно больших  $N$  на ЭВМ. Отсюда следуют и необходимые выводы о точности приближения  $c_j$  и  $c_j^*$  ( $j = 1, N$ ), а также  $f$  и  $f^*$ .

Даже если начиная с некоторого  $N'$  условия 3–5 теоремы перестанут выполняться, то для  $N < N'$  разница между точными и приближенными коэффициентами  $c_j$  ( $j = 1, N$ ), а также  $f$  и  $f^*$  не будет превосходить  $\kappa$  и  $N\kappa^2 + \epsilon$  соответственно.

Таким образом, при увеличении порядка приближения  $N$  (и выполнении условий теоремы), используя изложенный метод, будем получать коэффициенты Фурье разложения одномерной плотности с ошибкой, стремящейся к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . При этом  $f^*/\mu_1$  будет сходиться в метрике  $L_2(X, \mu)$  к точному значению  $f/\mu_1$ . Отсюда в свою очередь следует, что  $\int_{\Delta} f^* d\mu_0 \rightarrow \int_{\Delta} f d\mu_0$  для любой области  $\Delta$  равномерно относительно  $\Delta$ .

Известно, что задача о восстановлении функции по приближенным значениям коэффициентов ее ряда Фурье некорректна (см., например, [9]) и для улучшения сходимости (поточечной, равномерной) можно использовать метод регуляризации А.Н. Тихонова.

Программная реализация предложенного метода облегчается тем, что приближенная система (2.4) линейна. Поэтому вычисление коэффициентов  $c_j$  стационарного режима сводится лишь к нахождению обратной матрицы  $A_N^{-1}$  и умножению ее на столбец свободных членов системы (2.4). Вычисление же коэффициентов  $c_j(t)$  как функций времени можно проводить либо решая уравнения (2.4) на ЭВМ, либо, по известным явным формулам решения систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, формировать аналитическое выражение для  $\exp(-A_N t)$ , а затем и для квази моментов  $c_j^*(t)$  и плотности  $f^*(x, t)$ . Если  $x$  — многомерный вектор, то по известным  $c_j^*(t)$  можно составить приближенное выражение для плотности распределения некоторых компонент этого вектора. Ввиду громоздкости формулы, определяющей  $f^*(x, t)$ , построение графиков удобнее вести при помощи стандартных пакетов, которые строят графики по входному массиву данных. Для этого предварительно надо сформировать массив значений плотности  $f^*$  для соответствующего массива значений  $x$ .

**4. Пример.** Рассмотрим движение плоского математического маятника с гладким потенциалом  $\Pi(\varphi)$ , зависящим от его положения  $\varphi \pmod{2\pi}$ , предполагая, что на маятник действует момент сил вязкого трения и некоторый случайный момент сил. Заметим, что к такой задаче приводит, например, рассмотрение движения неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе при учете момента сил вязкого трения и случайного момента, действующих по внутренней оси карданового подвеса [10]. Далее особое внимание будет уделено движению маятника в однородном поле тяжести.

Фазовое пространство системы — это многообразие  $X = R \times S$ , локальные координаты на  $X$  — угол  $\varphi$  и импульс  $p$ . Предположим, что случайный момент представим в виде  $b(\varphi)V(t)$ , где  $V(t)$  — вектор стационарных белых шумов с матрицей интенсивности  $\nu$ ,  $b(\varphi)$  — некоторая матрица, а  $\sigma(\varphi) = \nu b b^T$  ( $\dim \sigma = 1$ ) — гладкая функция  $\varphi$ . Тогда уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид ( $\epsilon$  — коэффициент трения)

$$\dot{\varphi} = p, \quad \dot{p} = -\partial\Pi/\partial\varphi - \epsilon p + b(\varphi)V(t) \quad (4.1)$$

Эти уравнения определяют диффузионный процесс на многообразии  $X$ , управляемый оператором

$$G = p \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \epsilon p \right) \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{2} \sigma(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial p^2}$$

Для его анализа воспользуемся приведенным выше алгоритмом. Определим  $L_2(X, \mu)$  в данном случае. Так как  $X$  — прямое произведение окружности  $S$  и прямой  $R$ , то можно воспользоваться теоремой об ортогональных системах в произведениях [7]. В качестве меры  $\mu_\varphi$  на окружности  $S$  возьмем "нормированную" меру Лебега:  $d\mu_\varphi = d\varphi/(2\pi)$ , а в качестве ортобазиса — функции  $1, \sqrt{2} \cos \varphi, \sqrt{2} \sin \varphi, \sqrt{2} \cos 2\varphi, \sqrt{2} \sin 2\varphi, \dots$

В качестве меры на прямой  $R$  возьмем конечную меру  $\mu_p$  такую, что

$$d\mu_p = \exp[-p^2/(2\gamma)] dp / \sqrt{2\pi\gamma}$$

где  $\gamma > 0$  — некий параметр, подбираемый из соображений удобства, а в качестве ортобазиса — полиномы Эрмита

$$H_0(p) = 1, \quad H_1(p) = p/\sqrt{\gamma}, \quad H_2(p) = (p^2 - \gamma)/(\sqrt{2}\gamma), \dots$$

$$H_n(p) = (-1)^n \sqrt{\gamma^n} \exp(p^2/(2\gamma)) [d^n/dp^n \exp(-p^2/(2\gamma))] / \sqrt{n!}$$

Тогда по теореме об ортогональных системах в произведениях система функций  $H_m(p)\sqrt{2} \sin n\varphi, H_m(p)\sqrt{2} \cos n\varphi$  ( $m, n$  — целые неотрицательные числа) есть полная ортонормальная система в  $L_2(X, \mu)$ ,  $\mu = \mu_\varphi \otimes \mu_p$ .

Для одномерной плотности  $f(\varphi, p, t)$  случайного процесса  $\varphi(t), p(t)$  получаем разложение

$$f \approx \mu_1(p) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} H_m(p) [d_m + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} \sin n\varphi + b_{mn} \cos n\varphi)] \right\} \quad (4.2)$$

$$\mu_1 = (2\pi)^{-3/2} \gamma^{-1/2} \exp(-p^2/(2\gamma)), \quad d_0 = 1$$

Коэффициенты разложения (4.2) определяются формулами

$$a_{mn} = MH_m(p) \sqrt{2} \sin n\varphi, \quad b_{mn} = MH_m(p) \sqrt{2} \cos n\varphi, \quad d_m = MH_m(p)$$

Ограничившись в (4.2) значениями индексов  $0 \leq m \leq N, 0 \leq n \leq N$  (прямоугольный метод суммирования) и решив соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.4) (порядка  $N(2N+3)$ ), например на ЭВМ, получим приближенное выражение для одномерной плотности распределения  $f(\varphi, p, t)$ . Попутно при этом мы определим коэффициенты  $a_{mn}$ ,

$b_{mn}, d_m$  (квазиомоменты) как функции времени, а затем и все моменты  $c_{mn} = Mp^m e^{in\varphi}$  до порядка  $N$  включительно.

Проверим условия теоремы. Ввиду полиномиальности по  $p$  правых частей уравнений (4.1) и выбранной меры  $\mu_p$  условие  $Ge_j = GH_m(p) \sqrt{2} \sin n\varphi$  (или  $GH_m(p) \sqrt{2} \cos n\varphi \in L_2(X, \mu)$  выполнено, так как  $Ge_j$  представляет собой конечную линейную комбинацию полиномов Эрмита. Непосредственно проверяется, что  $\chi(N) \sim N^3$ . В разд. 5 показано, что условие теоремы (3.5) (для сколь угодно большого, но конечного интервала времени) будет выполнено, если  $\kappa_2(N)$  растет не быстрее некоторой степени  $N$ , а  $\Pi(\varphi)$  и  $\sigma(\varphi)$  – достаточно гладкие функции  $\varphi$ .

Далее ограничимся случаем движения маятника в однородном поле тяжести в условиях поступательной вибрации в своей плоскости. Пусть вектор виброускорений представляет собой вектор нормальных стационарных белых шумов  $V = [V_1, V_2]^T$  с матрицей интенсивности  $\nu = [\nu_{ij}]$  ( $i, j = 1, 2$ ). В этом случае  $\Pi$  и  $\sigma$  – аналитические функции  $\varphi$ . Уравнения (4.1) будут такими:

$$\dot{\varphi} = p, \quad \dot{p} = -\sin \varphi - \epsilon p + V_1 \sin \varphi - V_2 \cos \varphi$$

Бесконечная счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3), которой удовлетворяют неизвестные коэффициенты разложения  $a_{mn}, b_{mn}, d_m$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_{mn} = & -m\epsilon a_{mn} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\gamma}} (-b_{m-1, n-1} + 2n\gamma b_{m-1, n} + b_{m-1, n+1}) + n \sqrt{(m+1)\gamma} b_{m+1, n} + \\ & + \frac{\sqrt{m(m-1)}}{4\gamma} [\nu_{12}(b_{m-2, n+2} - b_{m-2, n-2}) + \nu^- (a_{m-2, n+2} + a_{m-2, n-2})] \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{b}_{mn} = & -m\epsilon b_{mn} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\gamma}} (-a_{m-1, n-1} + 2n\gamma a_{m-1, n} + a_{m-1, n+1}) - n \sqrt{(m+1)\gamma} a_{m+1, n} + \\ & + \frac{\sqrt{m(m-1)}}{4\gamma} [\nu_{12}(-a_{m-2, n+2} + a_{m-2, n-2}) + \nu^- (b_{m-2, n+2} + b_{m-2, n-2})] \end{aligned}$$

$$\dot{d}_m = -m\epsilon d_m - \sqrt{\frac{m}{2\gamma}} a_{m-1, 1} + \frac{\sqrt{m(m-1)}}{2\sqrt{2}\gamma} (-\nu_{12} a_{m-2, 2} + \nu^- b_{m-2, 2})$$

$$\nu^- = (\nu_{22} - \nu_{11})/2, \quad \nu^+ = (\nu_{22} + \nu_{11})/2, \quad \gamma = \nu^+/(2\epsilon)$$

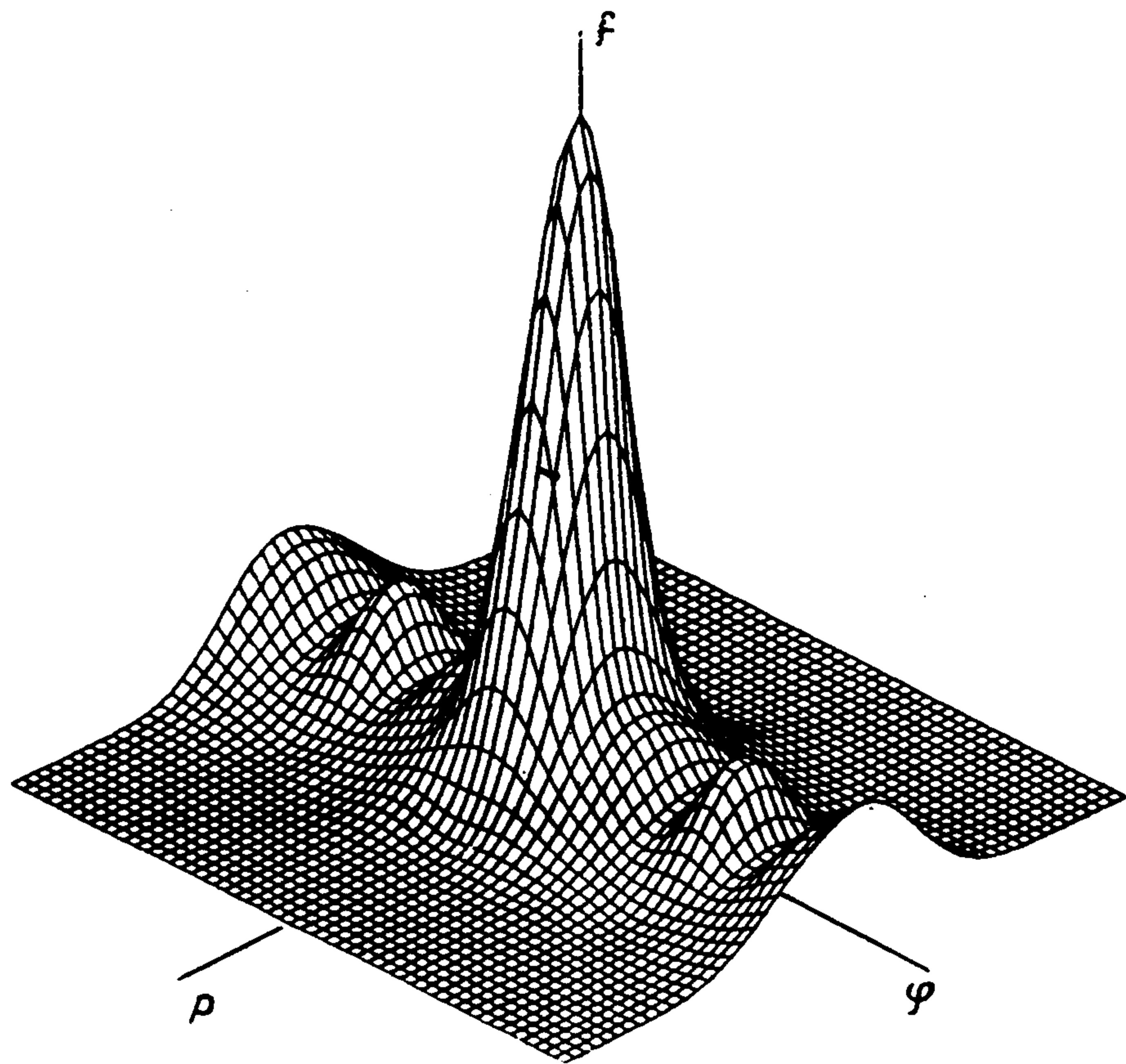
Ограничившись в (4.3) такими  $m, n$ , что  $0 \leq m, n \leq N$ , и решив полученную систему линейных дифференциальных уравнений, получим приближенное выражение для плотности распределения, а также приближенные значения квазиомоментов.

Заметим, что из теоремы Хасьминского вытекает существование предельного стационарного режима, т.е. бесконечная система точных уравнений (4.3) имеет одну асимптотически устойчивую точку. Поэтому все  $a_{mn}, b_{mn}, d_m$  с течением времени стремятся к определенным постоянным значениям, которые и определяют плотность  $f$  стационарного режима. Это видно и из уравнений (4.6). Для любого конечного замыкания след матрицы полученной линейной системы будет отрицательным (он равен  $-\epsilon N(N+1)(2N+1)/2$ ). А это значит, что фазовый поток этих уравнений уменьшает объемы.

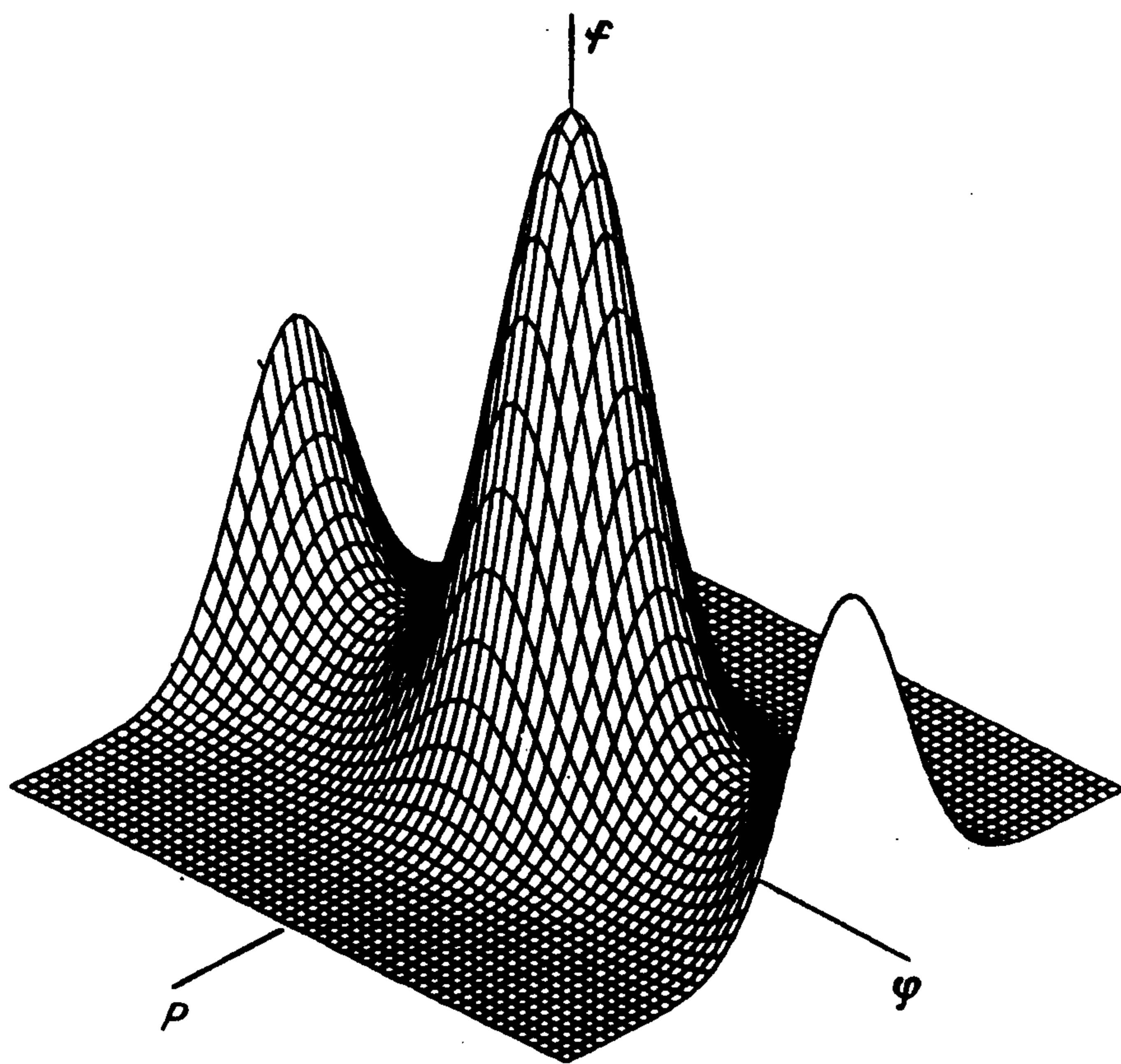
Вычислительные эксперименты на ПЭВМ, проведенные при помощи библиотеки научных программ NALIB (созданной в ИПИ АН СССР), показали, что при  $N = 2 - 6$  (для определенных  $\epsilon, \gamma, \nu$ ) все вещественные части собственных чисел матрицы  $A_N$  отрицательны (все собственные числа простые), а  $\kappa_2(N)$  очень слабо зависит от  $N$ . Все расчеты были сделаны и для двух других мер  $\mu_p$  с плотностями 1 и  $\exp(p^2/(2\xi))$  соответственно (ортобазис на прямой в этих случаях составляют функции Эрмита), что гарантирует выполнение условий  $f/\mu_1 \in L_2(X, \mu)$  и  $\partial^{k+r}(f/\mu_1)/\partial \varphi^k \partial p^r \in L_2(X, \mu)$ . Так как результаты оказались одинаковыми, эти случаи здесь не рассматриваются.

На фиг. 1 приведен вид одномерной плотности  $f_{st}$  стационарного распределения в кубе  $\{|\varphi| \leq 5, |p| \leq 10, 0 \leq z \leq 0,5\}$  для случая когда  $\epsilon = \gamma = 1, N = 4$ , а  $\nu_{11} = 3, \nu_{22} = 1, \nu_{12} = 0,1$ . Интересным следствием того, что  $\nu_{11} \neq \nu_{22}$  и  $\nu_{12} \neq 0$ , является многовершинность распределения. Вершины соответствуют точкам  $\varphi = m\pi$  ( $m = 0, \pm 1, \dots$ ). Таким образом, неоднородность вибрации приводит к увеличению вероятности нахождения маятника в вертикальном положении  $\varphi = \pi$ . Для сравнения на фиг. 2 приведен вид одномерной плотности стационарного режима в случае  $\epsilon = \gamma = 1, \nu_{11} = \nu_{22} = 2$  (см. формулу (4.4)). В этом случае для любого  $p$  соответствующее распределение на окружности  $S = \{\varphi\}$  уже одновершинно ( $\varphi = 0$  – мода,  $\varphi = \pi$  – антимода [11]).

На фиг. 3 показана плотность распределения угла  $\varphi$  для случая  $\epsilon = \gamma = 1, N = 4, \nu_{11} = \nu_{22} = 2$ . Сплошная кривая соответствует стационарному режиму, а штриховая – нестационарному режиму



Фиг. 1.



Фиг. 2

в момент  $t = \frac{1}{2}$ . В качестве плотности начального распределения взята функция  $f_0(\varphi) = [1 + \sin(\varphi + \pi/3)]/(2\pi)$ .

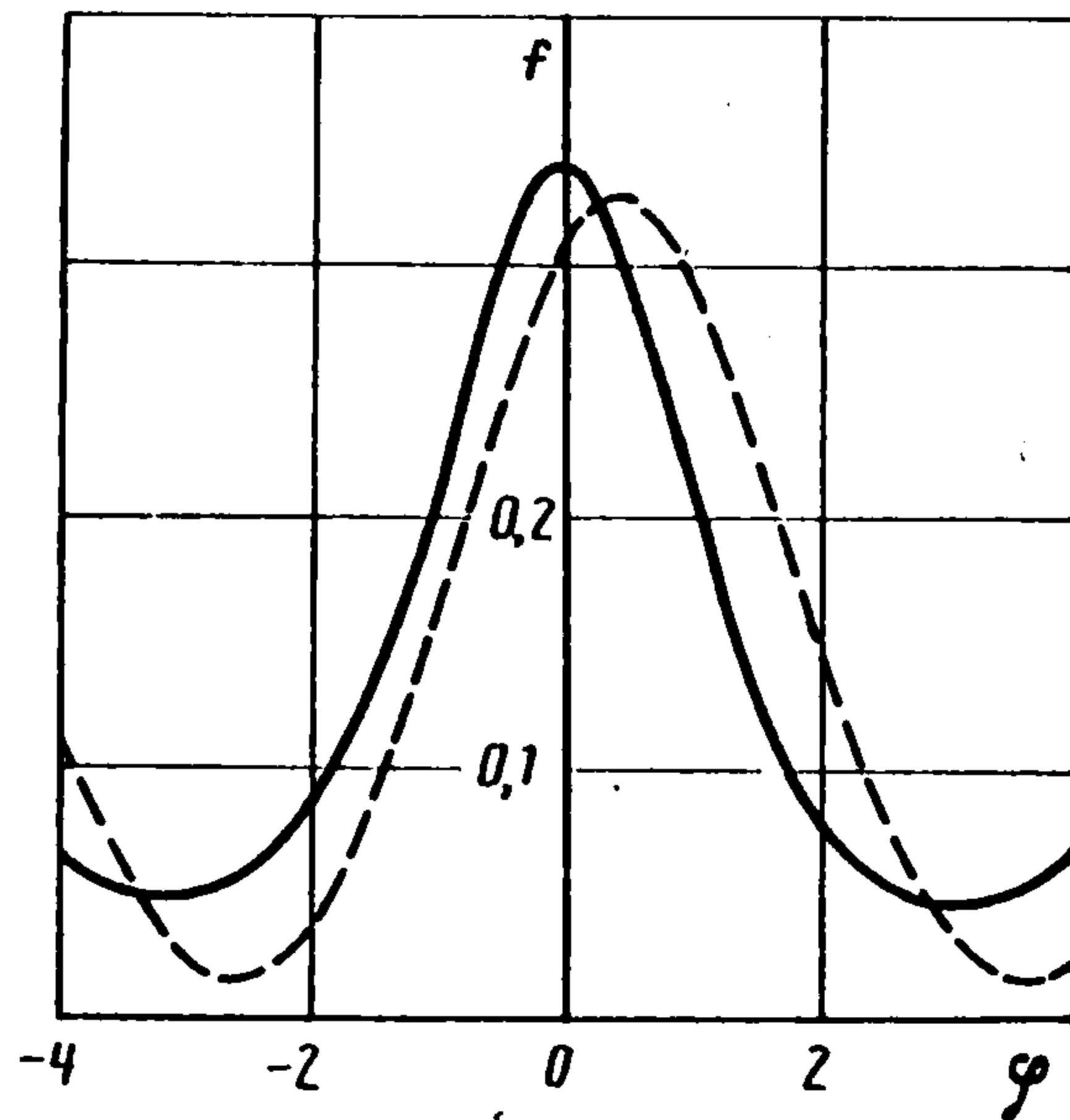
Ниже приведены времена  $T$  выхода на стационарный режим для различных параметров задачи.

$\epsilon$	1	1	1	2	4	0,25	0,5	1	2
$\nu_{11}$	2	4	8	2	2	2	3	3	3
$\nu_{12}$	0	0	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1
$\nu_{22}$	2	4	8	2	2	2	1	1	1
$\gamma$	1	2	4	0,5	0,25	16	2	1	0,5
$T$	11,5	12,5	13	28,5	35	42	26,5	15	30

В качестве плотности начального распределения взята функция  $f_0(\varphi, p) = f_0(\varphi) \exp(-p^2/2) / \sqrt{2\pi}$ .

Заметим, что некоторую информацию можно получить из рассмотрения лишь "первого" приближения, когда в разложении (4.2) учитываются лишь коэффициенты  $a_{01}, b_{11}, b_{01}, a_{11}, d_1$ . Тогда система (2.4) пяти уравнений распадается на три независимых подсистемы: для  $a_{01}, b_{11}$ , для  $b_{01}, a_{11}$  и для  $d_1$ . Характеристические числа первых двух подсистем одинаковы и равны  $\lambda_{1,2} = -\epsilon/2 \pm \sqrt{\epsilon^2/4 - \gamma}$ , а для третьей это  $-\epsilon$ . Отсюда, в частности, видно, что выход на стационарный режим будет проходить быстрее, если  $\epsilon^2/4 - \gamma < 0$ , т.е. когда  $\nu > \epsilon^2/2$ . Это хорошо согласуется с данными численных экспериментов (см. выш.).

Отметим еще одно свойство системы (4.3). При  $\nu_{1,2} = 0$  она распадается на две независимые подсистемы. В первую входят  $a_{mn}$ , когда  $m$  четно, и  $b_{mn}$ , когда  $m$  нечетно. Во вторую входят  $a_{mn}$ , когда  $m$  нечетно, и  $b_{mn}$ , когда  $m$  четно.



Фиг. 3

Заметим, что в случаях, когда известна плотность стационарного режима  $f_{st}$ , изложенный метод дает представление стационарных значений квази моментов  $c_j = \int_X e_j f_{st} d\mu_0$  как решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (в (2.2) надо положить  $c_j = 0$ ). Иногда это решение можно найти в виде цепных дробей. В этих случаях для интегралов  $\int_X e_j f_{st} d\mu_0$  получаются точные, быстро сходящиеся формулы. При этом непосредственное вычисление этих интегралов может быть затруднительным.

Проиллюстрируем это на примере маятника в однородном поле тяжести, когда  $\nu_{1,2} = 0, \nu_{1,1} = \nu_{2,2} = \nu$ . В этом случае точное выражение для плотности стационарного в узком смысле процесса  $\varphi(t), p(t)$  хорошо известно

$$f_{st}(\varphi, p) = \theta \exp[-\gamma^{-1}(p^2/2 - \cos \varphi)], \quad \theta = \text{const}, \quad \gamma = \nu/(2\epsilon) \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что в пределе  $\varphi$  и  $p$  статистически независимы. Импульс  $p$  распределен нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\gamma$ , а плотность распределения угла  $\varphi$  (плотность меры на единичной окружности) задается формулой  $f_1(\varphi) = \theta_1 \exp(\gamma^{-1} \cos \varphi), \theta_1 = \text{const}$ .

Заметим, что числа

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi} f_1(\varphi) d\varphi = b_{0n} + ia_{0n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

называются степенными моментами меры  $\mu$  ( $d\mu = f_1(\varphi) d\varphi$ ) или тригонометрическими моментами. Последовательность  $c_n$  называют также характеристической функцией угла  $\varphi$  [11].

Стационарные значения коэффициентов  $a_{mn}, b_{mn}, d_m$  (положение равновесия системы (4.3)) можно найти. Ненулевыми являются лишь коэффициенты  $b_{0n}$ , для которых получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$-\sqrt{2} + 2\gamma b_{0,1} + b_{0,2} = 0, \quad \dots, \quad -b_{0,n-1} + 2n\gamma b_{0,n} + b_{0,n+1} = 0, \quad \dots \quad (4.5)$$

Решения которой находим в виде цепных дробей, откуда следуют выражения для стационар-

ных значений тригонометрических моментов

$$M \cos \varphi = \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos \varphi d\varphi = b_{0,1}/\sqrt{2} = 1/2\gamma + 1/4\gamma + 1/6\gamma + \dots$$

$$M \cos 2\varphi = \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos 2\varphi d\varphi = b_{0,2}/\sqrt{2} = 1/1 + 2(2\gamma)^2 + 2\gamma/6\gamma + 1/8\gamma + 1/10\gamma + \dots$$

Хотя близость описанных выше приближенных результатов и точных гарантируется на конечном интервале времени (тем больше, чем больше  $N$ ), случай, когда  $\nu_{1,2} = 0$ ,  $\nu_{1,1} = \nu_{2,2} = \nu$ , показывает их близость и на бесконечном интервале времени. Сходимость приближенного значения стационарной  $f_{st}^*$  к точному значению  $f_{st}$  с ростом  $N$  здесь такая же, как и для цепных дробей  $b_{0,1}$  и  $b_{0,2}$ .

5. Рассмотрим функцию  $F(\varphi, p, t) \equiv f(\varphi, p, t)/(\sqrt{2}\mu_1(p)) \in L_2(X, \mu)$  и ее ряд Фурье

$$F(\varphi, p, t) \sim \sum_{m=0}^{\infty} H_m(p) [d_m + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} \sin n\varphi + b_{mn} \cos n\varphi)] \quad (d_0 = 1) \quad (5.1)$$

Оценим  $\epsilon(N, t)$  – остаток ряда Парсеваля функции  $F$ . Пусть функция  $F$  имеет  $k$  непрерывных производных по  $\varphi$  и  $r$  непрерывных производных по  $p$ . Дифференцируя последовательно  $k$  раз по  $\varphi$  и  $r$  раз по  $p$  ряд (5.1) и сравнивая коэффициенты получившегося в результате ряда

$$\frac{\partial^{k+r} F}{\partial \varphi^k \partial p^r} \sim \sum_{m=0}^{\infty} H_m(p) [d_m^* + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn}^* \sin n\varphi + b_{mn}^* \cos n\varphi)]$$

с коэффициентами исходного ряда, получим, что в зависимости от четности числа  $k$  выполняются либо равенства

$$a_{mn}^* = \pm n^k a_{m+r, n} R, \quad b_{mn}^* = \pm n^k b_{m+r, n} R, \quad d_m^* = d_{m+r} R \\ R = 2^r (m+r)(m+r-1) \dots (m+1)$$

либо

$$a_{mn}^* = \pm n^k b_{m+r, n} R, \quad b_{mn}^* = \pm n^k a_{m+r, n} R$$

Предположим, что  $\partial^{k+r} F / \partial \varphi^k \partial p^r \in L_2(X, \mu)$  для любого  $t$ . Тогда, используя неравенство Коши – Шварца (аналогично [12]) для числовых рядов, получаем

$$\begin{aligned} \epsilon(N, t) &= \sum_{m=0}^N \sum_{n=N+1}^{\infty} h_{mn} + \sum_{m=N+1}^{\infty} (d_m^2 + \sum_{n=1}^{\infty} h_{mn}) = \\ &= 2^{-2r} \left[ \sum_{m=r}^N \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-2k} M_m g_{mn} + \sum_{m=N+1}^{\infty} M_m (d_{m-r}^{*2} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} g_{mn}) \right] \leq \\ &\leq 2^{-2r} \left[ \left( \sum_{m=r}^N M_m^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-4k} \right)^{1/2} \left( \sum_{m=r}^N \sum_{n=N+1}^{\infty} g_{mn}^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{m=N+1}^{\infty} M_m^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{m=N+1}^{\infty} d_{m-r}^{*4} \right)^{1/2} + \right. \\ &\left. + \left( \sum_{m=N+1}^{\infty} M_m^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4k} \right)^{1/2} \left( \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}^2 \right)^{1/2} \right] \leq \rho N^{-2 \min(k, r) + 1/2} \epsilon^*(N, t), \quad \rho = \text{const} \\ h_{mn} &= a_{mn}^2 + b_{mn}^2, \quad g_{mn} = a_{m-r, n}^{*2} + b_{m-r, n}^{*2}, \quad M_m = [m(m-1) \dots (m-r+1)]^{-2} \end{aligned}$$

где  $\epsilon^*(N, t)$  – оценка остаточного члена (при принятом прямоугольном методе суммирования) ряда Парсеваля функции  $\partial^{k+r} F / \partial \varphi^k \partial p^r$ .

Если  $\sup_t \epsilon^*(N, t) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , т.е. ряд (5.1) функции  $\partial^{k+r} F / \partial \varphi^k \partial p^r$  сходится равномерно, то и ряд (5.1) функции  $F$  сходится равномерно и искомая оценка  $\epsilon(N) \sim N^{-2 \min(k, r) + 1/2}$ . Однако это условие трудно проверить, поэтому ограничимся сколь угодно большим, но конечным интервалом времени  $[t_0, T]$ . Пусть  $\sup_{t \in [t_0, T]} \epsilon^*(N, t) = \eta(N)$ . Тогда на этом интервале времени  $\epsilon(N) \leq$

$\leq \rho \eta N^{-2 \min(k, r) + 1/2}$ . Условие (3.5) будет иметь вид (в переводе на принятую в этом разделе векторную индексацию)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [N(2N+3)]^5 \kappa_2^2(N) N^{-2 \min(k, r) + 1/2} \chi(N) = 0 \quad (5.2)$$

Следовательно, если  $\kappa_2^2 \chi$  растет при  $N \rightarrow \infty$  не быстрее, чем  $N^{2\min(k, r) - 10 - \frac{1}{2}}$ , то условие (5.2) выполнено.

В заключение заметим, что полученные результаты обобщаются и на случай, когда вектор случайных сил  $F$  представим в виде  $F = b(q)\pi(t)$ , а  $\pi(t) \in R^{l_1}$  – вектор случайных функций, удовлетворяющих уравнению формирующего фильтра

$$\pi' = a(\pi) + b(\pi)V(t)$$

где  $V(t)$  ( $\dim V = l$ ) – вектор нормально распределенных белых шумов с матрицей интенсивности  $\nu$ . В этом случае  $X = T^*Q \times R^{l_1}$ ,  $x = [q^T p^T \pi^T]$ .

Автор благодарит Э.Р. Корепанова за помощь при проведении расчетов на ЭВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ito K. Stochastic differential equations in a differentiable manifold // Nagoya Math. J. 1950. V. 1. P. 35–47.
2. Ito K. Stochastic differential equations in a differentiable manifold (2) // Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math. 1953. V. 28. P. 81–85.
3. Пугачев В.С., Сеницын Н.И. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990. 630 с.
4. Диментберг М.Ф. Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. М.: Наука, 1989. 175 с.
5. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
6. Яглом А.М. О статистической обратимости брауновского движения. Мат. сб. 1949. Т. 24. Вып. 3. С. 457–492.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 543 с.
8. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 271 с.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1973. 447 с.
10. Сеницын И.Н. О флуктуациях гироскопа в кардановом подвесе // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 23–31.
11. Мардиа К. Статистический анализ угловых наблюдений. М.: Наука, 1978. 239 с.
12. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989. 734 с.

Москва

Поступила в редакцию  
4. XI. 1991