Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 6, 1992

УДК 531/539

 Л.И. Седов

О ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ниже обосновываются методы построения в заданных псевдоримановых пространствах гравитационных полей, в частности, в пространствах Минковского с естественной заменой глобального закона всемирного тяготения при сохранении его локальных следствий по аналогии с локальными переходами от свойств в евклидовых пространствах к свойствам риманова пространства, однако при наличии сильных различий в характерных соотношениях в глобальных смыслах.

Существо развиваемых теорий связано с тем, что в топологически эквивалентных пространствах можно принять одинаковые координатные фиксированные системы отсчета с индивидуально определенными точками. Особенное значение имеют глобальные специально вводимые сопутствующие системы отсчета Лагранжа для пространств или для математически вводимых модельных сред, определенных на соответствующих семействах времени подобных мировых линиях L, для которых трехмерные скорости в каждой точке равны нулю. Это такие системы координат, в которых все индивидуальные точки модельных пространств или сред покоятся, с изменениями для них только глобального времени, совпадающего на мировых линиях семейства с собственным временем.

Особенно важны также инерциальные системы отсчета, вообще говоря, это локальные декартовы тетрады S, которые в каждой точке на L служат базой для введения различного рода алгебраически и дифференциально определенных механических характерных величин и, в частности, четырехмерных и трехмерных векторов абсолютных скоростей и соответствующих абсолютных ускорений, – фундаментальных понятий, используемых для формулировки основных определений математических и физических моделей.

Показано, что для свободных гравитационных движений материальных сред при наличии только сил инерции и только массовых сил и, в частности, сил тяжести формулировки механических закономерностей и описание механических явлений в сопутствующих координатах и в специальных системах отсчета одинаковы.

При свободных полетах в космосе описание внутренних движений в кабине космонавта в силу невесомости совпадает локально с описанием аналогичных механических явлений в инерциальных системах при полном отсутствии сил веса, которые для частиц сред уравновешиваются силами инерции. Причем такое положение имеет место в одинаковом смысле как в механике Ньютона, так и в альтернативных релятивистских теориях с учетом потенциальной энергии. В общей теории относительности (ОТО) изменения потенциальной энергии, определяемые изменениями положения тел в искривленном пространстве, полностью исключаются за счет подходящего выбора псевдориманова пространства.

Установлены общие свойства гравитационных полей в различных псевдоримановых пространствах. В частности, для гравитационных полей в соответствующих сопутствующих координатах Лагранжа вдоль мировых линий L плотность и потенциальная энергия постоянны, но могут различаться на разных мировых линиях семейства L. Это положение справедливо не только в ньютоновской механике, но и в псевдоримановых пространствах.

Подчеркивается, что в релятивистских теориях обязательно требуется использовать закон всемирного тяготения или его замену, связанную с дополнительной спецификой, касающейся геометрических свойств псевдоримановых пространств.

Следует подчеркнуть, что в общем случае различные решения тензорного уравнения ОТО в области пустот при наличии в поле различных точечных особенностей и для разных произвольно взятых семейств мировых линий L и соответствующие выражения для потенциальной энергии будут противоречить закону всемирного тяготения.

В качестве основного результата формулируется возможность использования теоретических решений задач в рамках ньютоновской механики в сопутствующей системе координат (или на основе данных приборных измерений, поставленных на подвижных объектах) можно сконструировать с помощью расчетных методов теории инерциальной навигации в римановых пространствах полное

решение задач об определении метрики и законов движения тел в заданных псевдоримановых пространствах для произвольно заданных наблюдателей.

Существующее согласование ОТО с теорией Ньютона (в основном приближении) обусловливается тем, что в короткие промежутки времени орбиты планет близки к прямым в евклидовом пространстве и геодезическим по Шварцшильду.

1. Построение моделей для гравитационных полей проведем на основе базового вариационного уравнения [1–4]

$$\delta \int_{V_4} \Lambda dV_4 + \delta W^* + \delta \dot{W} = 0$$

которое выражает универсальные термодинамические основы физики и позволяет учитывать всевозможные постулируемые на основании опытов и наблюдений гипотезы о взаимодействиях в модельных средах для различного рода природных или искусственно создаваемых или проектируемых явлений.

Базовое уравнение в соответствующих ограниченных постановках частных проблем, применяемых в аналитической механике для получения объемных уравнений, находится в полном согласии с различными рационально постулируемыми и применяемыми "вариационными принципами". Вместе с этим оно позволяет формулировать не только объемные уравнения Эйлера, но и получать уравнения состояния для внутренних взаимодействий в различного рода моделях материальных тел или полей.

Таким образом, для получения замкнутой системы всех необходимых уравнений и характерных условий типа начальных и краевых и т.п. можно опереться на базовое уравнение. Основы построения моделей связаны с постулированием лагранжианов ΛdV_4 и соответствующих членов в δW^*, представляющих собой полную локальную энергию модели, выраженную через систему характерных определяющих параметров.

В соответствии с главными апробированными научными идеями построения моделей в ряде областей физики (не всегда) можно постулировать, что полную элементарную энергию ΛdV_4 и глобальную энергию $\int_{V_4} \Lambda dV_4$ можно представить как сумму отдельных видов энергий, причем одинаковой или различной природы, которые в изучаемых явлениях могут трансформироваться между собой.

Дальнейшие построения базируются на следующих идеальных понятиях:

1) четырехмерное псевдориманово пространство, определяемое в процессах исследования в ОТО или задаваемое в постановках задач подобно евклидову пространству в механике Ньютона, или, например, пространству Минковского в специальной теории относительности (СТО) или некоторым другим римановым пространствам, в частности пространствам Шварцшильда и др.;

2) подвижная сплошная среда как физическая модель с индивидуальными элементами, например, с присущими им массами $dm = \text{const}$. Возможные обобщения на случаи переменных dm в развиваемой ниже теории, несмотря на существующие возможности, останутся здесь нетронутыми;

3) гравитационное поле, обусловленное распределением масс с плотностью ρ или для полей, отвечающих средам, составленным из элементарных объектов, распределенных континуально, но при $dm = 0$, однако обладающих импульсами и энергией, характерными для гравитационных полей, порожденных зарядами и магнитами.

Каждая из отмеченных позиций связана с разными допущениями, часть из которых уже общепринята в научных макроскопических теориях, другие являются новыми.

Ниже рассматриваются нелинейные релятивистские теории гравитационных полей и законов движения материальных точек как элементов соответствующего семейства мировых линий L в римановых пространствах, которые искомы или заданы как носители порожденных распределенными массами гравитационных полей с распределенной энергией пробных частиц для скалярных характеристик поля. В частности, с универсальными фиксированными заранее выбранными римановыми пространствами, подобно тому, как это принимается для евклидова пространства по Ньютону или, как будет показано, в СТО для пространства Минковского или в ОТО после замены приближенных решений на точные в формулировках постановок задач. (Например, использование фиксированного пространства Шварцшильда в теории движения планет вокруг Солнца.)

Отметим основные определения характерных параметров в выражениях, фигурирующих для энергий, в объемах римановых пространств и, в частности, введем понятие гравитационной энергии.

При введении объемных интегралов $\delta \int\limits_{V_4} \Lambda dV_4$ для суммарных выражений изменений энергий в четырехмерных пространствах обозначим через V_4 произвольно взятый субстациональный инвариантно определяемый четырехмерный объем в римановом пространстве и его инвариантно определенный четырехмерный элемент $dV_4 = dV_3 \cdot d\tau$, где для рассматриваемой сплошной среды dV_3 – инвариантно определенный бесконечно малый элемент пространственного объема (частицы), а $d\tau$ – времениподобный элемент в неголономно распределенном объеме dV_3 для собственного времени τ, определяемого глобально на рассматриваемой системе заданных или искомых мировых линий L для индивидуальных точек с уравнениями ξ^α = const, ($\alpha = 1, 2, 3$), для которых, без ограничений общности, вводятся сопутствующие координаты Лагранжа $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau)$ и канонические метрики в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + 2g_{\alpha 4}(\xi^\gamma, \tau) d\xi^\alpha d\tau + g_{\alpha\beta}(\xi^\gamma, \tau) d\xi^\alpha d\xi^\beta; \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

(Стоит отметить, что в общем случае нельзя пользоваться глобальным равенством $V_4 = \tau V_3$ с конечными или бесконечными объемами V_4 и V_3 для конечных или бесконечно малых значений τ.)

Далее отметим следующие определения.

В качестве систем отсчета будем пользоваться в каждой точке локальными инерциальными тетрадами S, на L $ds^2 = c^2 d\tilde{\tau}^2 = l^2 d\tilde{\tau}^2$, где $l = qc$ – большая длина, q – некоторая характерная временная постоянная, $\tilde{\tau}$ – безразмерная временная координата. В точках мировых линий L, для четырехмерной скорости верна формула $\mathbf{u} = d\mathbf{s}/d\tau = \bar{\mathbf{c}}$ при $|\mathbf{c}|$ = const, абсолютное ускорение $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/d\tau$. Введем понятие массовой плотности $\rho = dm/dV_3$, где dm – элемент массы покоя для индивидуализированного объема dV_3 в локальных инерциальных тетрадах S, вдоль мировых линий L.

Основные физические закономерности устанавливаются и формулируются с помощью локальных инерциальных тетрад S с постоянными базисами e^i как систем отсчета с локально определенными координатами x^α вдоль мировых линий L и глобального времени τ в указанных канонических определенных сопутствующих метриках и с помощью понятий скорости и компонент абсолютных ускорений, для которых справедлива формула

$$a_\alpha = c\,\partial g_{\alpha 4}(\xi^\gamma, \tau)/\partial\tau, \qquad a_4 = 0; \qquad \alpha, \gamma = 1, 2, 3.$$

Подчеркнем еще раз, что при применении сопутствующих координат вдоль любой, но фиксированной мировой линии L при ξ^α = const координата τ является собственным временем.

В любой системе координат x^1, x^2, x^3, τ' уравнение каждой отдельной линии L^* в фиксированном пространстве можно записать в виде преобразования координат

$$x^\alpha = f^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau) \quad \text{или} \quad \xi^\alpha = \xi^\alpha(x^1, x^2, x^3, \tau) \tag{1.1}$$

и $\tau' = \tau$; $\alpha = 1, 2, 3$

сохраняющего инвариантность сопутствующей метрики псевдориманова пространства, вообще говоря, только в бесконечно малой окрестности вдоль мировой линии L, однако совокупность такого рода преобразований на разных мировых линиях L для разных функций f^α в общих случаях не образует единой системы отсчета для одного и того же риманова пространства.

Рассмотрим теперь отдельно некоторую линию L^* вместе с системой в каждой ее точке переменных базисов $э_i$, определяемых с помощью компонент метрического тензора $g_{ij}(\xi^\alpha, \tau) = (э_i э_j)$ и символов Кристоффеля

$$\Gamma^i_{pq} = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{ps}}{\partial \xi^q} + \frac{\partial g_{qs}}{\partial \xi^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial \xi^s} \right)$$

для которых верны формулы

$$\frac{\partial э_i}{\partial \xi^k} = \Gamma^s_{ik}(\xi^\gamma)\, э_s, \quad \text{или} \quad \frac{\partial э_i}{\partial x^k} = \Gamma^s_{ik}(x^\gamma)\, э_s$$

$s, i, k, \gamma = 1, 2, 3, 4$

На мировой линии L^* наряду с базисом $э_i$ введем еще инерциальные тетрадные базисы e_i, для которых в рассматриваемой точке $e_i = э_i$ или $e_i \neq э_i$, но постоянны по координатам x^i и ξ^i в каждой точке линии L^*, так что

$$\frac{\partial e_i}{\partial \xi^k} = \frac{\partial e_i}{\partial x^k} = 0; \qquad i, k = 1, 2, 3, 4$$

Все символы Кристоффеля для таких инерциальных базисов e_i равны нулю. Очевидно, что в этом случае для функции $x^\alpha(\xi^\gamma, \tau)$ на основании законов преобразования символов Кристоффеля вдоль линий L^* получаются формулы

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = -\Gamma^k_{pq}(\xi^\gamma, \tau) \frac{\partial x^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^q}{\partial \xi^j} \tag{1.2}$$

которые как уравнения определяют собой функции (1.1) по своему существу только вдоль мировых линий L^*. Вместе с этим уравнения (1.2) неинтегрируемы в конечных объемах риманова пространства, так как в римановых пространствах за исключением пространств Минковского, вообще говоря, невозможно ввести декартовы системы координат.

В ньютоновской механике и в СТО преобразование $x^\alpha = x^\alpha(\xi^\alpha, \tau)$ и $\tau' = \tau$, при котором уравнения (1.2) удовлетворяются глобально, можно определить. В римановых пространствах подобное глобальное преобразование тоже удается ввести, но уравнение (1.2) может быть удовлетворено только на отдельной произвольно заданной мировой линии L.

Для каждой произвольно взятой линии L^* преобразование (1.1) существует и в сопутствующей системе координат, называемой системой координат Ферми, в переменных x^i на L^* верны равенства $\Gamma^k_{ij}(x^\gamma, \tau) = 0$ и, следовательно, $\partial g_{ij}(x^\alpha, \tau)/\partial x^s = 0$.

В системе координат x^i можно принять, что с точностью до малых высшего порядка при переходе к пределу элементы dV_3 в тетрадах S одинаковы в разных точках линии L^*.

В самом деле, из уравнения неразрывности в системе координат Ферми x^i, взятых вдоль любой мировой линии L^*, имеем

$$\frac{\partial \rho u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho u^3}{\partial x^3} + \frac{\partial \rho u^4}{\partial x^4} = 0$$

В сопутствующей системе координат, когда $u^4 = 1$ и $u^\alpha = 0$ на L^* получим, что $\partial\rho/\partial\tau = 0$ как в системе переменных x^i, так и в системе переменных ξ^i с базисами $e_i = \text{const}$.

Кроме этого из уравнения неразрывности следует тождественная справедливость равенства

$$\rho dV_3 = dm \tag{1.3}$$

вдоль линий семейства L с различными dm и ρ, но с кинематически одинаковыми dV_3 во всех точках риманова пространства для одинаково вводимых тетрад S.

Из равенства (1.3) следует, что указанным образом определенные инварианты $\rho_{(e^i)}$, dV_3 и dm на сопутствующих линиях L зависят только от трех аргументов x^1, x^2, x^3 или от ξ^1, ξ^2, ξ^3 на линиях L и не зависят от собственного времени τ вдоль L.

С другой стороны, для систем отсчета произвольно фиксированных наблюдателей в том же пространстве с другими координатами $\eta^1, \eta^2, \eta^3, \tau' \neq \tau$ существенно, что рассмотренные инварианты зависят в своих аргументах от всех четырех переменных.

В сопутствующей системе отсчета для индивидуальных массовых частиц имеет место относительный покой, для которого меняется только собственное время, причем индивидуальным точкам соответствует, вообще говоря, ускоренное движение частиц относительно инерциальных систем отсчета. С другой стороны, при свободном движении частиц под действием только массовых сил тяжести эти силы полностью уравновешиваются силами инерции; возникает невесомость покоящихся частиц относительно сопутствующей системы отсчета, аналогичная состоянию покоя частиц относительно местных инерциальных систем отсчета Ферми. Из сказанного выше ясна выгодность применения канонических сопутствующих систем координат и особенно в теории гравитации, связанной только с массовыми силами тяжести и силами инерции.

Если постановка задач связана с отысканием различного рода характеристик в заданных системах отчета в фиксированных глобально определенных пространствах, то преобразования решений от сопутствующих систем отсчета к заданным системам отсчета составляет задачу теории инерциальной навигации.

Для римановых пространств автором опубликовано решение соответствующих задач о навигации. Решение различных задач в координатах Лагранжа можно перенести на произвольную заданную метрику как систему отсчета в данном римановом пространстве в ОТО с помощью алгоритмов теории инерциальной навигации, опубликованных уже в 1976 г. [5]. В рамках теории Ньютона различные варианты теории инерциальной навигации для конкретных тел впервые разработаны в докторской диссертации Л.И. Ткачева в 1944 г. (см. также [6]).

В опытах или в автоматических устройствах установку измерительных приборов естественно применять на подвижных телах и получать таким путем измерения характерных величин, отвечающих подвижным индивидуализированным объектам в переменных Лангранжа.

К сказанному следует добавить, что основные физические законы, добываемые или проверяемые в экспериментах, формулируются, как правило, для индивидуально определенных модельных объектов.

2. Перечислим теперь для рассматриваемых моделей элементы изменяющихся энергий для риманова пространства и для материальной среды с подвижными элементами, индивидуализированные с помощью координат $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau$ частиц среды с массами dm.

В качестве основного допущения, указанного выше, определим элементарную энергию в объемном интеграле по субстациональному объему V_4 как сумму отдельных видов энергий в элементах dV_4 в конечном объеме V_4 в соответствии с современными часто применяемыми научными идеями в прикладных теориях, согласованных с опытами в рассматриваемых здесь механических проблемах.

В соответствии с уже обоснованными в опытах и установившимися положениями применим четырехмерные псевдоримановы пространства с сигнатурой "$- - - +$" и возьмем выражение

$$\frac{R}{2k}\,dV_4 \qquad (2.1)$$

как изменяемую плотность энергии геометрического элемента объема dV_4, обусловленную гауссовой кривизной R риманова пространства. (Подобным определением энергии, связанной с ее скалярной природой за счет кривизны континуумов для действительных значений или при вариациях, имеются аналоги в теории упругости.)

Коэффициент $k = 8\pi G/c^4 = 2{,}1 \times 10^{-48}\text{с}^2/\text{г}\cdot\text{см}$ – "гравитационная постоянная", G – эмпирическая постоянная в законе всемирного тяготения по Ньютону. Малый множитель $2\pi/c^4$ возникает из условия близости соответствующих выводов в ОТО и по Ньютону для свободных движений индивидуализированных материальных точек в пустоте, для коротких промежутков времени в ОТО – по геодезическим, а по Ньютону – с ускорением при малых τ и малых трехмерных скоростях.

Очевидно, что при конечных $R/(2k)$ гауссова кривизна R и важная комбинация $R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R$ в уравнении поля (2.10) (см. ниже) – весьма малые функции точек в римановых пространствах, причем в ОТО в четырехмерных объемах пустых римановых пространств, влияние "гравитационной постоянной" k на уравнение движения материальных частиц в пустоте полностью исключается. Однако влияние k сохраняется в характеристиках особых точек и в краевых условиях.

В обобщенных моделях ОТО коэффициент k можно вводить как переменный физический параметр, что было предложено в теории гравитации Дираком в августовской лекции 1975 г. в Австралии [3].

Для подвижной модели материальной среды скалярная механическая термодинамическая энергия, характеризуемая массами частиц среды, определяется как сумма элементов энергий масс сплошной среды, выражающихся формулой

$$\rho g_{ij} c^2 u^i u^j dV_3 d\tau = dmc^2 d\tau \qquad (2.2)$$

которая, в частности, порождает массовую силу инерции в уравнениях Эйлера при $dm = \text{const}$.

Здесь подразумевается, что энергия частицы как таковая не зависит от положения частицы в пространстве. Однако на основании опытов в механике Ньютона можно и должно вводить еще потенциальную энергию материальных частиц тел в зависимости от их положения в пространстве при наличии гравитационного поля.

Спецификой ОТО является допущение об отсутствии потенциальной энергии положения масс, заменяемой, однако, за счет эффектов кривизны пространства в ОТО. В механике Ньютона потенциальная энергия учитывается явно, что очень естественно. Очевидно, что замена потенциальной энергии положения геометрическими свойствами четырехмерного пространства сильно осложняет математический и физический вопрос о возможном предельном переходе от ОТО к авторитетной механике Ньютона.

Вместе с этим соответствующие усложнения в ОТО исключают предельные переходы от ОТО к механике Ньютона, вообще говоря, для больших интервалов времени.

Фундаментальны следующие представления. В фиксированном римановом пространстве возможны различные движения материальных сред и различные поля, в частности гравитационные, порожденные только распределением подвижных масс и их скоростями или безмассовых частиц, обладающих энергиями и импульсами, или соответствующими элементами сред, обладающих зарядами и намагниченностью для электромагнитных сил, действующих на пробные частицы.

Потенциальную энергию воображаемого положения покоящихся элементов континуального распределения масс в объемах V_4 гравитационного поля определим формулой

$$\rho\frac{dU}{d\tau}dV_4 = dm\frac{dU}{d\tau}d\tau = dmdU \qquad (2.3)$$

где скалярная функция координат $U(\xi^i) = U(x^i)$ – удельная потенциальная энергия, рассчитанная на единицу пробной массы, индуцируемая полем, которая приобретается элементами материальной среды в зависимости от их положения в пространстве.

Весьма существенно, что полная потенциальная энергия точек гравитационного поля как его физическая характеристика для индивидуальных точек пространства пропорциональна массам пробных частиц, которые могут быть различными для фиксированной функции U от координат. Подчеркнем, что в аналитической механике для систем с конечным числом степеней свободы потенциальная энергия всегда фигурирует в уравнениях и непосредственно в вариационном принципе Гамильтона. В общем случае механические характеристики подвижных систем зависят от геометрии пространства; вместе с этим постулируется, что потенциальную энергию гравитационного поля или гауссову кривизну в римановом пространстве в энергетической формуле (2.8) (см. ниже) в фиксированных пространствах можно трактовать соответственно как за счет кривизны риманова пространства, так и за счет наличия гравитационного поля с переменными, порожденными массовыми силами тяжести, определенными в общих случаях с помощью скалярной функции $U(\xi^\alpha, \tau) = U(z^\alpha, \tau)$.

В ОТО энергетические эффекты проявляются за счет кривизны R при отсутствии члена (2.3), а по Ньютону – только за счет поля ускорения силы тяжести $\mathbf{g} = -\operatorname{grad} U$ в плоском евклидовом пространстве. Предлагаемая формула (2.3) с полной производной $dU/d\tau$ вместо просто U обусловливается модельным требованием однозначности удельной потенциальной энергии U как функции точек риманова пространства.

Подчеркнем, что скалярное поле U с размерностью квадрата скорости проявляется только для присутствующих вполе частиц (элементов сред), обладающих массами или импульсами в виде их энергий и массовых сил тяжести.

Удельная гравитационная энергия, рассчитанная на единицу массы, для смещения в пространстве и по времени бесконечно малой частицы проявляется через дифференциал $dU = U(P') - U(P)$, где P' и P – соседние положения, последовательно занимаемые выделенным элементом среды. В континуальной теории запись этой формулы справедлива для движения частицы вдоль ее мировой линии L в любых координатах x^i, и формулу (2.3) можно записать в виде

$$\rho \frac{dU}{d\tau} dV_4 = dm \frac{dU}{d\tau} d\tau = dm \left(\frac{\partial U}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial U}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial U}{\partial x^3} dx^3 + \frac{\partial U}{\partial \tau} d\tau \right) \tag{2.4}$$

Кроме элементов энергии (2.1) – (2.4) для гравитационного поля нужно еще для различных моделей подвижных сред или переменных полей вводить аналогичного вида энергию, порожденную в общем случае поверхностными внутренними и внешними силами взаимодействий, U^*. Она рассчитывается на единицу массы dm или на единицу трехмерного объема dV_3 подвижной среды поля и отвечает в Λ членам вида

$$dV_3 \frac{dU^*}{d\tau} (\mu^k, \nabla_i \mu^k, \ldots) d\tau \tag{2.5}$$

Функция U^* зависит от дополнительных переменных физических и механических параметров μ^k скалярной и тензорной природы, от заданных или искомых характеристик. В частности, может потребоваться также введение различных связей, порождающих соответствующие добавки в лагранжиане с множителями λ^p Лагранжа.

Скалярная составляющая энергии (2.5) отвечает плотности различного рода физических энергий термодинамической природы или специальных внешних связей во внутренних процессах в элементах dV_4 для объема рассматриваемых сред и полей и мировых линий L за счет введения дополнительных математически обоснованных постоянных или переменных параметров μ^k или их комбинаций с механическими параметрами и их производных по координатам и по времени τ. (Например, температура, компоненты тензора деформации и моментные характеристики в теории упругости или электромагнитные эффекты при излучении или химических и ядерных реакциях и др.)

Решения задач в рамках релятивистских теорий при наличии членов, содержащих $U \neq \mathrm{const}$ и U^*, приводит, так же как и по Ньютону, к семействам мировых линий движения индивидуальных точек L с абсолютными ускорениями, вообще говоря, отличными от нуля.

Кроме составляющих энергии (2.2), (2.4) и (2.5) в объемном интеграле для суммарной энергии введем еще инвариантно определенный дивергентный член вида

$$\frac{c^2}{4\pi\gamma}\nabla^i\nabla_i U dV_4 = -\frac{c^2}{4\pi\gamma}(\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,U)dV_4 \tag{2.6}$$

где c^2 и γ – размерные постоянные, γ вводится для получения одинаковых размерностей в рассматриваемых суммах для лагранжиана.

С учетом размерностей $[k] = T^2/(ML)$ и $[\gamma] = L^3/(MT^2)$ в соответствии с выводами развиваемой ниже теории можно, опираясь на согласие с опытом в теории механики Ньютона, принять, что $\gamma = kc^4/(8\pi) = G$, где G – гравитационная постоянная в законе всемирного тяготения.

Очевидно, что дивергентный член (2.6) не окажет влияния на уравнения Эйлера, отвечающие вариациям δg_{ij} и δx^i.

Локальная энергия (2.6) возникает за счет работы внешних гравитационных сил на границах выделенного конечного объема V_4, который фигурирует в базовом уравнении в определяемом члене δW, представляющем собой поверхностный интеграл по граничной поверхности Σ для объема V_4 (при преобразовании дивергентного члена из объемного интеграла в граничный к V_4 – трехмерный поверхностный интеграл). Это дает для элемента поверхности $d\Sigma'$ поверхностную силу за счет добавки (2.6), равную

$$\frac{c^2}{4\pi\gamma}\,\mathrm{grad}\,U n d\Sigma \tag{2.7}$$

Каждая из отмеченных выше позиций связана с допущениями, часть из которых уже общепринята в научных макроскопических теориях ОТО, но члены (2.4), (2.5) и члены вида $(dU^*/d\tau)dV_4$ и (2.6) в выражении для ΛdV_4 в римановом пространстве вводятся здесь дополнительно.

В классических теориях при наличии гравитационных полей и римановых пространств для обратимых консервативных моделей подразумевается, что $\delta W^* = 0$ и при $U^* \neq \mathrm{const}$ для объемного интеграла в базовом уравнении можно ограничиться следующими выражениями:

$$\delta\int_{V_4}\Lambda dV_4 = \delta\int_{V_4}\left[-\frac{R}{2k}dV_4 + \rho g_{ij}u^i u^j dV_4 + dm dU + \frac{c^2}{4\pi\gamma}\nabla^i\nabla_i U dV_4 + \frac{dU^*}{d\tau}dV_4\right] \tag{2.8}$$

Для индивидуальных частиц условие $dm(\xi^\gamma) = \mathrm{const}$ можно рассматривать как связь, отвечающую гипотезе о сохранении масс для разных переменных элементарных трехмерных объемов – частиц в конструируемых моделях гравитационных полей. Символ вариации δ означает только замену действительных приращений на мысленные виртуальные с учетом связей, диктуемых постановкой модельных теорий.

В формуле (2.8), записанной в инвариантном виде в сопутствующей системе координат, вычисление бесконечно малых вариаций можно производить за счет геометрических изменений самого пространства и свойств изучаемых мировых линий L. При варьировании наряду с сопутствующей системой отсчета в переменных ξ^α, τ целесообразно рассматривать и локально определяемую инерциальную систему отсчета наблюдателя с преобразованными переменными x^α, τ при

$$x^\alpha = x^\gamma(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau); \qquad \delta x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\gamma}\delta\xi^\gamma + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau}\delta\tau \qquad \text{и} \qquad \tau' = \tau + \delta\tau \tag{2.9}$$

Вариации δx^α, $\delta\tau$ и $\delta\xi^\alpha$, $\delta\tau$ отвечают произвольным виртуальным мысленным бесконечно малым уклонениям рассматриваемых величин от их искомых действительных значений, получаемых в результате решений рассматриваемых механических задач.

Необходимо еще явно отметить, что в каждом искомом или данном фиксированном римановом пространстве в зависимости от отдельных задач функция U от координат может быть разной.

Определение функции U в зависимости от распределения масс ρ обусловливается дополнительными допущениями, связанными с законом всемирного тяготения. В соответствии с этим гравитационные поля при прочих равных условиях в одном и том же римановом пространстве, так же как и в ньютоновской механике в евклидовом пространстве, могут быть различными.

Получение объемных уравнений Эйлера как коэффициентов при произвольных вариациях δg_{ij} приводит к уравнениям поля, а при вариациях δx^α, $\delta\tau$ – к уравнениям для отыскания мировых линий L, представляющих собой локальные законы сохранения импульсов. Очевидно, что предпоследнее слагаемое в интеграле (2.8) дивергентного вида преобразуется в поверхностный интеграл для δW по Σ и поэтому не повлияет на уравнения Эйлера для поля и на уравнения движения. Однако решение конкретных задач, связанных с уравнением состояния, проявляющимся в краевых и начальных условиях, обусловливается также и дивергентными членами в выражениях для Λ.

Объемные уравнения поля при отсутствии условия $U^* = \mathrm{const}$, получаемые как коэффициенты при вариациях δg_{ij}, определяются только первыми двумя членами в формуле (2.8), и, как известно и очевидно, эти уравнения можно записать в виде

$$R^{ij} - \tfrac{1}{2} g^{ij} R = k\rho u^i u^j \tag{2.10}$$

В пустотах имеем $\rho = 0$, поэтому для объемов римановой геометрии пространств, не искажаемых непосредственно присутствием различных объектов и событий, верны уравнения

$$R^{ij} - \tfrac{1}{2} g^{ij} R = 0 \tag{2.11}$$

и, следовательно, $R = 0$ и $R_{ij} = 0$.

В этом случае тензор Римана равен тензору Вейля, а уравнение (2.11) имеет великое множество различных решений.

Решения уравнений поля (2.11) конкретизируются обязательно необходимыми дополнительными условиями, выделяющими единственные решения уравнений (2.11). Эти условия могут сводиться к заданиям семейств мировых линий L и заданий особенностей в изолированных точках для типов решений с матрицами K по А.З. Петрову. Они определяются с помощью канонических трехмерных симметричных матриц M и N в ортонормированных тетрадах S, выражающихся через корни "векового уравнения" $\lambda_s = -(\alpha_s \pm i\beta_s)$ соответствующей шестимерной матрицы K, составленной из компонент тензора Вейля[1].

Возможные распределения значений указанных корней как функций точек пространства устанавливаются с помощью тождеств Бьянки. Строится решение возникающих задач с семействами мировых линий L, отвечающих метрике тензора Вейля в сопутствующих системах координат Лагранжа в фундаментальных пространствах, определяемых из уравнений (2.11) в зависимости от ускорений на мировых линиях L. Они в свою

[1] См. *Седов Л.И.* О свойствах инваринатных компонент тензора Римана при $T_{ij} = \kappa g_{ij}$, следующих из тождеств Бьянки и равенств $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \kappa$ и $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$: Препринт Ин-та механики МГУ, 1992.

очередь определяются в зависимости от задаваемой или определяемой распределенной плотности вещества ρ в других областях в пространстве, взятом в соответствии с решением уравнения (2.10).

В поставленной таким образом задаче на основании базового уравнения при учете термодинамической энергии U^*, отнесенной к единице объема dV_3, для вариации δx^α, $\delta\tau$ можно написать

$$\delta\left[\left(\rho g_{ij}u^iu^j+\rho\frac{dU}{d\tau}\right)dV_3d\tau+\frac{dU^*}{d\tau}dV_4\right]=0 \tag{2.12}$$

Дифференциалы $d\tau$, входящие в dV_4 и в $dU/d\tau$, можно по существу без последствий заменить на $d\tau/q$, где q – любая масштабная постоянная с размерностью времени. Отношение $d\tau/q=d\tilde{\tau}$ можно вводить непосредственно как инвариантную глобальную отвлеченную временную координату на семействе мировых линий L. В связи с этим члены $dmc^2d\tilde{\tau}$ и $dm(\partial U/\partial\tilde{\tau})d\tilde{\tau}$ имеют размерности энергии в соответствии с физическим смыслом базового вариационного уравнения.

Скалярное соотношение (2.12) детализируем в сопутствующей системе отсчета, в которой мировые линии L отвечают глобальной собственной временной координате τ. В связи с этим отметим здесь следующие исходные формулы в переменных ξ^α, τ, справедливые также в переменных $x^\alpha(\xi^\gamma,\tau)$, τ (при $c=1$) на мировых линиях L:

$$u^4=1,\quad u^1=u^2=u^3=0;\quad u_4=1,\quad u_\alpha=u^kg_{k\alpha}=g_{4\alpha}(\xi^\gamma,\tau)$$

причем $g_{ij}u^iu^j=u_ju^j$, поэтому предварительно перед варьированием x^α, τ вдоль L можно записать

$$\frac{d}{d\tau}(u_ju^j)d\tau=\frac{du_j}{d\tau}dx^j+u_j\frac{du^j}{d\tau}d\tau=\frac{du_\alpha}{d\tau}dx^\alpha$$

$$\rho dV_3=dm=\text{const}$$

так как в канонических сопутствующих координатах везде и всегда $u^4=1$, $u^\alpha=0$, $u_4=1$ и верно равенство

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial\tau}=\frac{\partial g_{\alpha4}(\xi^\gamma,\tau)}{\partial\tau}=a_\alpha,\qquad a_4=0 \tag{2.13}$$

где a_α – компоненты абсолютного ускорения в точках координатной временной мировой линии L.

Теперь на основании равенства (2.12) при $U^*=0$ (наличие только гравитации) вариация выражения (2.12) для малой пробной массы приобретает вид

$$dm(a_\alpha\delta x^\alpha+\delta U)=0\qquad\text{или}$$

$$dm\left(a_\alpha\delta x^\alpha+\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha+\frac{\partial U}{\partial\tau}\delta\tau\right)=0$$

(Выражение проварьированного рассматриваемого первого члена при $dm=\text{const}$, равное $dma_\alpha\delta x^\alpha$, общеизвестно.) Отсюда непосредственно следуют фундаментальные уравнения

$$a_\alpha=g_\alpha=-\partial U/\partial x^\alpha\quad\text{и}\quad\partial U/\partial\tau=0 \tag{2.14}$$

Иначе, в трехмерном векторном виде можно записать $\mathbf{a}=\mathbf{g}$ и $\mathbf{g}=-\operatorname{grad}U$ при $\partial U/\partial\tau=0$ или $U(x^1,x^2,x^3)$, а для удельной по массе потенциальной энергии U на мировых линиях L (орбитах), имеет место закон равенства нулю частной производной: $\partial U/\partial\tau=0$. Таким образом, показано, что характеристика потенциальной энергии dm частиц – элементов среды, введенной равенством (2.3), изменяется только за счет изменения переменных x^1,x^2,x^3.

Если $x^\alpha = \xi^\alpha$, то в сопутствующей системе координат, в которой на мировых линиях L имеем $\xi^\alpha = \text{const}$, получится что $U = U(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ (глобальные равенства $U(x^1, x^2, x^3) = U(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ связаны с применением инерциальных тетрад S, постоянных в каждой точке мировых линий L). Отсюда следует, что в областях пустот в разных точках одной и той же мировой линии L величина U имеет постоянное значение, но, вообще говоря, принимает различные значения на разных L, когда $\partial U/\partial \xi^\alpha \neq 0$ при $a_\alpha \neq 0$.

В этом случае, согласно уравнению (2.14), должно присутствовать гравитационное поле ускорений, и поэтому орбиты L в римановых пространствах не будут геодезическими.

Описанное положение на первый взгляд парадоксально, однако (например, в частности, и в механике Ньютона) совершенно ясно, что в сопутствующей системе координат ξ^α, τ, связанной с Землей, поле ускорений силы тяжести, порождаемой Землей, стационарно, но нестационарно в системе Коперника y^α, τ', связанной с Солнцем.

Этот пример описания движения планеты в системе координат y^α, τ' свидетельствует о существовании возмущенных подвижными массами возможных гравитационных волн, распространяющихся с произвольными скоростями, меньшими по величине, чем c.

Сказанное выше совершенно очевидно при трактовке Земли как абсолютно твердого тела, но его справедливость для деформируемых систем, когда компоненты метрики в сопутствующих метриках зависят от времени τ, определяется тем, что индивидуальные точки в соответствующих системах отсчета сохраняют состояние покоя, для которого, согласно постановке задачи, основными механическими характеристиками являются сопутствующие постоянные координаты $\xi^\alpha = \text{const}$.

Модельные понятия и соответствующие конструктивные теории для методического и результативного описания событий в естествознании и технике в рамках ньютоновской механики представляют собой величайшие научные достижения, которые во многих случаях отличаются чрезвычайно большой точностью, достаточной для отражения действительности во многих исследованиях, и вместе с этим являются базовым источником для дальнейших обобщений фундаментальных модельных основ в релятивистских теориях.

Естественно, что дальнейшее усовершенствование научных теорий для учета опытных эффектов, противоречащих механике Ньютона, можно развивать в первую очередь с помощью видоизменения понятий о пространстве и времени. Так, например, можно вводить четырехмерное псевдориманово пространство, сохраняя в основном кардинальные представления о поле гравитации и о его характерных особенностях.

3. По Ньютону, в евклидовом пространстве $U \neq 0$, а в ОТО в общем случае скалярная кривизна R или другие инварианты тензора Римана, вообще говоря, отличны от нуля. Однако, при всевозможных предельных переходах от ОТО к механике Ньютона в пределах должно быть $R = 0$ и $R_{ijkl} = 0$.

Выше дана релятивистская теория, для которой в предельных случаях при переходе к ньютоновской механике $U \neq 0$ и, следовательно, вблизи пределов $U \neq R/(2k)$, в частности, в решениях Шварцшильда $R = 0$.

В сопутствующих координатах Лагранжа каждой индивидуализированной точке (частице) отвечает состояние покоя, а приписываемые массы dm и элементы полной удельной энергии U_0 на L постоянны. (При движении ракет, при учете различных излучений и ядерных реакций и т.п. предлагаемую теорию можно усложнить с использованием соответствующих гипотез или законов об изменяемых величинах dm и U_0 [7].)

Однако в общих случаях в канонических сопутствующих координатах для римановых пространств при переходе от линии L к соседней линии L' имеем

$$U' - U \neq 0 \quad \text{и} \quad \partial U/\partial \xi^\alpha \neq 0 \tag{3.1}$$

а для абсолютного ускорения $\mathbf{g}$ относительно инерциальных тетрад, согласно уравнениям (3.1), верна формула $\mathbf{g} = -\operatorname{grad} U$.

Аналогично ньютоновской механике получается и соответствующее уравнение импульса в небесной механике.

Так как в ОТО мировые линии L геодезические, то в ОТО $\mathbf{g} = 0$, и поэтому U_0 – абсолютная постоянная в объемах пустоты.

С другой стороны, как известно, в ОТО отсутствуют в интеграле (2.8) члены с $\rho(dU/d\tau)dV_4$, что равносильно постоянному значению U во всех точках объема риманова пространства. Это обстоятельство за счет отсутствия учета взаимодействия между планетами в ОТО является существенным ограничением вида возможных орбит L в поле Шварцшильда.

В римановых пространствах, когда тензор энергии-импульса отличен от нуля, удельные энергии U и U^* в (2.3) и (2.7), вообще говоря, тоже отличны от нуля, а соответствующие мировые линии семейства L в канонической сопутствующей метрике отвечают ускоренным движениям индивидуальных точек подвижной среды.

Таким образом, в задачах общего вида в определяемых римановых пространствах в ОТО сопутствующие мировые линии имеют ускорение, и поэтому возникают силы инерции как силы реакции пространств, аналогичные тем силам инерции, которые присутствуют в евклидовом пространстве в механике Ньютона.

Предыдущие выводы показывают, что для приближенных решений в рамках ОТО или в релятивистских теориях вообще, как и для точных решений в фиксированных пространствах, имеет место замечательное свойство, заключающееся в том, что свободные движения пробных индивидуальных материальных точек в гравитационном поле не зависят от величины их масс.

Как известно, справедливость понятия "индивидуальной точки" связана с допустимым и принятым моделированием в предлагаемой теории. Например, в ряде задач (конечно, не всегда) Землю или даже любую звезду, несмотря на все их внутренние многообразные особенности, можно считать материальными точками.

Развитую выше теории можно применить для любого заданного семейства мировых линий L. В этом случае, однако, из уравнений (3.1) следует, что

$$a_\alpha dx^\alpha = -\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = -dU(x^1, x^2, x^3) \tag{3.2}$$

Следовательно, уравнения импульсов (3.1) можно рассматривать как условия интегрируемости дифференциальной формы $a_\alpha dx^\alpha$, образованной абсолютными ускорениями $\mathbf{a}$ в точках семейства мировых линий L, на которых ускорения должны обладать потенциалом $U(x^1, x^2, x^3)$. Это равносильно отсутствию вихрей для заданного семейства L и также для гравитационного поля, что является следствием аксиоматической скалярной природы гравитационной энергии, учитываемой с помощью функции U, зависящей только от координат и присутствующей в базовой формуле (2.8) для ΛdV_4.

При наличии в формуле (2.8) члена с функцией U^*, зависящей не только от координат, но и от других аргументов с тензорными и скалярными термодинамическими параметрами, уравнения (3.1) и (3.2), вообще говоря, нарушаются.

В ньютоновской теории и в рассматриваемой релятивистской теории гравитации уравнения (3.1) и (3.2), обеспечивающие хорошее согласие с наблюдениями и специально поставленными опытами по Ньютону, целесообразно сохранить, но учесть в качестве существа уточненного моделирования переход к наблюдателям в четырехмерном псевдоевклидовом римановом пространстве. Эти соотношения допускают еще очень большой произвол, связанный с выбором потенциала $U(x^1, x^2, x^3)$.

При произвольно заданном потенциале U в псевдоримановом пространстве на основании уравнений (3.1) можно определить семейство мировых линий L. Однако ясно, что соответствующее математическое решение задачи в общем случае не будет соответствовать действительности. Например, в ньютоновской механике для получения явного несогласия с опытом достаточно задать для гравитационного поля функцию U как неудовлетворяющую уравнению Пуассона.

В ньютоновской механике в качестве обязательного условия для определения U применяется закон всемирного тяготения, который при переменном параметре абсолютного времени τ можно локально в любой системе трехмерных координат x^α или ξ^α сформулировать в виде уравнения Пуассона

$$\Delta U = \nabla^\alpha \nabla_\alpha U = -4\pi\rho G \quad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{3.3}$$

Как известно, любое решение уравнения Пуассона для функции U при наличии зависимости распределения плотности ρ в трехмерных объемах евклидова пространства представляет собой эквивалентную точную формулировку закона всемирного тяготения для величины удельной массовой энергии гравитационного поля. По смыслу определения римановых пространств дифференциальное уравнение (3.3) можно ввести в каждой точке пространства в локальных инерциальных тетрадах и соответственно в глобальной метрике для искривленных римановых пространств.

Уравнение (3.3) и соответственно закон всемирного тяготения имеют место в ньютоновской механике в трехмерном глобальном евклидовом пространстве и с очень большой степенью точности подтверждаются в опытах на Земле с неподвижными телами и наблюдателями свободных движений различных масс в космосе.

Уравнение (3.3) следует также и из вариационного базового уравнения (2.8) после варьирования по эмпирическому скаляру c как в ньютоновской физике в евклидовом пространстве, так и в пустых объемах при $R_{ij} = 0$ для релятивистских моделей в сопутствующих системах координат, когда $U = U(x^1, x^2, x^3)$.

Аналогичное уравнение как естественное правильное математическое обобщение уравнения (3.3) в теории относительности можно постулировать и для риманова пространства как непосредственное обобщение уравнения (3.3) в сопутствующей системе координат или после варьирования постоянной c, которая входит в величину ΛdV_4 за счет позиций (2,6). (Величина c может рассматриваться для релятивистских моделей как параметр, изменяющийся в употребляемой модели за пределами точности измерений величины c в опытах.)

Для установившихся полей в системе наблюдателя в его сопутствующих переменных z^1, z^2, z^3, τ', где τ' – собственное время для наблюдателя, решение уравнения (3.3) должно иметь вид $U(z^1, z^2, z^3)$, т.е. не зависит от τ'.

В классической ОТО член $\rho(dU/d\tau)dV_4$ отсутствует, поэтому $\mathbf{a} = \mathbf{g} = 0$, а семейства мировых линий пробных элементов масс L в изложенной выше теории представляют собой частные виды семейства орбит, образованные геодезическими линиями.

Как известно, в соответствующей постановке задачи в ОТО по существу исключаются силы тяготения между планетами, а также между подвижными частицами в облаках пыли при отсутствии столкновений. Кроме того, в приближенной теории движения планет пренебрегается возмущениями свойств пространств планетами, и поэтому фактически рассматриваются движения всех планет как пробных масс в фиксированном пространстве (на практике – по геодезическим в пространстве Шварцшильда), порожденном Солнцем, и в частности, без учета взаимодействия между планетами и эффектом сплющенности объема Солнца. С другой стороны, в ОТО, когда U= const, а в формуле (2.8) также отсутствует член с U^*, в пустом объеме V_4 при $\rho = 0$ получится, что

$$R_{ij} - ½ g_{ij} R = 0, \quad \text{или} \quad R_{ij} = 0 \tag{3.4}$$

В этом случае из-за неоднозначности решения уравнений (3.4) для определения метрики тензора Вейля (равного тензору Римана) потребуется с помощью дополнительных условий, касающихся накладываемых на инварианты характеристик, присущих многочисленным решениям уравнений в частных производных (3.4), выделить конкретное пространство Вейля и соответствующие семейства мировых линий L, для которых абсолютные ускорения $\mathbf{a}$ могут отличаться от нуля.

Из изложенных выводов легко усмотреть также, что все тензорные уравнения в описанных постановках задач в пространствах Римана и в ньютоновской механике в сопутствующих системах координат при $\mathbf{v} = 0$ одинаковы.

В частности, в ОТО в пространстве Минковского и по Ньютону в трехмерном евклидовом пространстве для одинаковых координат x^α существует универсальное соотношение между векторами абсолютных ускорений в точках мировых линий следующего вида:

$$\mathbf{a}_{\text{Min}} = \frac{d\mathbf{v}}{d\tau}\frac{1}{1 - v^2/c^2} + \frac{v(\mathbf{v}d\mathbf{v}/d\tau)}{c^2(1 - v^2/c^2)^2} \tag{3.5}$$

Тем не менее в каждой точке трехмерные скорости в обоих пространствах с различной метрикой одинаковы: $\mathbf{v}_{\text{Min}} = \mathbf{v}_{\text{New}} = \mathbf{v}$.

Из формулы (3.5) в сопутствующих системах отсчета, для которых в каждой точке $\mathbf{v} = 0$, верно равенство

$$\mathbf{a}_{\text{Min}} = \mathbf{a}_{\text{New}} \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что в сопутствующих системах координат гравитационные поля абсолютных ускорений сил тяжести в трехмерных евклидовых пространствах в теории Ньютона и в соответствующих трехмерных подпространствах четырехмерного псевдоевклидова пространства Минковского одинаковы и должны определяться одинаковыми формулами согласно уравнению (3.3) через плотность $\rho(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$или $\rho(x^1, x^2, x^3)$.

Возможные различия законов движения в релятивистской механике и в механике Ньютона возникают за счет разной метрики, сказывающей свое влияние на переходное преобразование от сопутствующей системы отсчета к заданному наблюдателю через алгоритмы пересчетов в теории инерциальной навигации по Ньютону и по релятивистских теориям.

Заметим еще, что влияние скалярной функции координат U на состояние движения точечных элементов среды (имеющего размерность квадрата скорости) проявляется только для частиц (или элементов континуальных сред), обладающих массами или импульсами, через энергию и силу веса.

4. Можно понять, что изложенную выше теорию и ее результаты можно обобщить для применения модельных элементов сплошных сред с нулевыми массами на линиях L, для которых $dm = 0$, но импульсы отличны от нуля. Например, для таких нейтральных безмассовых модельных объектов, как фотоны или нейтрино.

Подобные модельные объекты можно вводить в теориях независимо от последующего физического усложнения для ранее введенных подобного рода модельных частиц.

В самом деле, вопросы о выборе возможных фундаментальных пространств и времени в пустоте можно отделить от понятий о собственных характеристиках элементов модельных сред, погруженных в рассматриваемые геометрические пространства как математических множеств точек, наделенных особыми свойствами.

В равенствах (2.12) при $U^* = 0$ после вынесения за скобки произвольной массы $dm \neq$ $\neq 0$ получим, что выражение в скобках равно нулю.

Обратимся теперь к построению релятивистских моделей сплошной среды, погруженной в выбираемое фундаментальное риманово пространство с метрикой, отвечающей некоторому тензору Вейля, когда все бесконечно малые элементы такой среды имеют массы $dm = 0$, но их характерные импульсы $\mathbf{p} \neq 0$, например $\mathbf{p} = k_1 \mathbf{c}$, и энергию $\epsilon_\gamma = qc^2$, где k_1 и q – задаваемые скалярные коэффициенты.

В результативных формулах (2.12) и (2.13) вместо скорости $\mathbf{u}$ и $\rho dU/d\tau$ можно поставить вектор $\mathbf{p}(t^i)$ и U_ϵ с мировыми ненулевыми линиями L как огибающие векторов $\mathbf{p}$, после этого уравнения (2.14) сохраняют свой вид

$$d\mathbf{p}/d\tau = -\partial U_e/\partial x^\alpha \quad \text{и} \quad \partial U_\epsilon/\partial\tau = 0 \tag{4.1}$$

Если в четырехмерном пространстве мировые линии L нулевые, то на L элемент $d\tau$ = = 0, но для трехмерных объемов dV_3 в точках линий L можно ввести различные системы отсчета с $d\lambda \neq 0$ и метрикой $ds^2 = c^2 d\lambda^2 - dl^2$, в которой для вектора $\mathbf{dl}$ выполняется равенство

$$\mathbf{dl}/d\lambda = \mathbf{c} \quad \text{и} \quad |\mathbf{c}| = \text{const} \tag{4.2}$$

Иначе говоря, точкам линий L в любой системе отсчета в трехмерном пространстве в пустотах будут отвечать скорости (3.5), равные по величине $\mathbf{c}$, а для вектора $\mathbf{p}$ получим

$$\mathbf{p} = \sqrt{\epsilon/q}\,\mathbf{c} = k_1\mathbf{c} \tag{4.3}$$

От значения постоянной $\sqrt{\epsilon/q} = k_1$ будут зависеть отклонения лучей света в гравитационном поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л.И., Цыпкин А.Г.* Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма. М.: Наука, 1989. 272 с.
2. *Седов Л.И.* О глобальном времени в общей теории относительности // Докл. АН СССР, 1983. Т. 272. №̈1. С. 44–48.
3. *Дирак П.М.А.* Воспоминание о необычайной эпохе. М.: Наука, 1990. 205 с.
4. *Седов Л.И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи мат. наук, 1965. Т. 20. Вып. 5. С. 121–180.
5. *Седов Л.И.* Об уравнениях интегральной навигации с учетом релятивистских эффектов // Докл. АН СССР, 1976. Т. 231. № 6. С. 1311–1314.
6. *Ткачев Л.И.* Системы инерциальной ориентировки. Ч. 1. М.: МЭИ, 1973. 213 с.
7. *Седов Л.И.* К релятивистской теории полета ракеты // ПММ, 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 903–910.

Москва

Поступила в редакцию
15.V.1992