УДК 531.383

©1992 г. С.В. Соколов

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ УХОДОВ ТРЕХОСНОГО ГИРОСТАБИЛИЗАТОРА

Для платформы трехосного гиростабилизатора (ТГС), расположенного на Земле, в рамках прецессионной теории и в предположении произвольной полиномиальной зависимости скорости ухода от перегрузок получены уравнения, описывающие изменение во времени вектора мгновенной скорости вращения платформы в гироскопической системе координат. На основании свойств ТГС и особенностей его применения рассмотрена аппроксимация данных уравнений, из которой определены аналитические зависимости скорости ухода гиростабилизированной платформы от времени. Полученные результаты существенно упрощают решение задач идентификации параметров ТГС и оценки его текущей ориентации в выбранной системе координат в системах инерциальной навигации.

Точность работы современных инерциальных навигационных систем, основным элементом которых является гиростабилизированная платформа, во многом зависит от точности определения скорости нескомпенсированного (собственного) ухода платформы, рассматриваемой, как правило, в проекциях на оси связанной с ней системы координат.

Разработанные в настоящее время алгоритмы идентификации скорости ухода основаны на представлении проекций скорости ухода в виде некоторых временных моделей, как правило, экспоненциальных или полиномиальных, адекватных с известной степенью точности лишь на небольших интевалах времени движения платформы. Вид зависимости скорости ухода от времени выбирается при этом эвристически, что приводит к необходимости ее постоянного уточнения, а также к возрастанию ошибок при изменении взаимной ориентации трехгранников Земли и платформы, ввиду нелинейной зависимости скорости ухода платформы от проекций ускорений по ее осям.

Существующие алгоритмы идентификации требуют при этом больших временных и вычислительных затрат. В связи с этим представляет интерес аналитическое определение временной зависимости скорости ухода платформы ТГС, расположенного на Земле, в режиме силовой стабилизации с учетом нелинейной зависимости скорости ухода от ускорений.

В настоящее время наибольшее распространение получила модель зависимости вектора скорости ухода от перегрузок в виде трехмерного ряда – полинома заданного порядка с постоянными известными коэффициентами.

Это обуславливается, во-первых, возможностью аппроксимации с требуемой точностью произвольной функциональной зависимости, выведенной теоретически, а во-вторых, простотой практического определения коэффициентов такого полинома. В связи с изложенным и во избежание нарушения общности последующих рассуждений, для представления зависимости скорости ухода от перегрузок используем далее трехмерный полином с известными коэффициентами.

Для рассматриваемого режима функционирования ТГС характерно отсутствие больших моментов, возмущающих платформу, в связи с чем анализ ее текущей ориентации с требуемой точностью возможен в рамках прецессионной теории. При этом на длительных интервалах времени (до нескольких часов) углы ухода современных ТГС в инерциальном пространстве (а не относительно астрономического трехгранника, связанного с Землей, как в существующих моделях) оказываются весьма малыми (не превышают долей градуса). Это позволяет записать, опираясь на известные результаты [1], систему уравнений, описывающих изменение во времени вектора мгновенной скорости ухода стабилизированной платформы, в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&(\omega_X^{-1}\dot{\Lambda}_1)^{\cdot} = (\omega_Y\omega_X^{-1})^{\cdot} + \omega_Z, \qquad (\omega_Y^{-1}\dot{\Lambda}_2)^{\cdot} = (\omega_X\omega_Y^{-1})^{\cdot} - \omega_Z \\
&(\omega_Y^{-1}\dot{\Lambda}_3)^{\cdot} = (\omega_Z\omega_Y^{-1})^{\cdot} + \omega_X, \qquad (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)^{\mathrm{T}} = \Lambda \qquad (1) \\
&\Lambda = \mathbf{M}^{-1}\cdot\Omega - \mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{U}, \qquad \Omega = (\omega_X, \omega_Y, \omega_Z)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

Здесь ω_X, ω_Y, ω_Z – проекции скорости ухода платформы на оси гироскопического трехгранника, $\mathbf{M}$, $\mathbf{U}$ – известные матрицы-функции времени, аналитическое представление которых наряду с выводом уравнений (1) приведено ранее [1], точкой обозначено дифференцирование по времени.

Для отыскания возможности аналитического представления решения приведенных уравнений используем факт малости абсолютных вариаций скорости ухода платформы в течение всего времени работы (для реальных ТГС не более $10^{-7}\,c^{-1}$ за 10 мин. работы). Это позволяет с высокой точностью считать направление оси ее мгновенного вращения в инерциальной системе координат неизменным на известных интервалах времени.

Подобное допущение эквивалентно следующим условиям, которым должны удовлетворять проекции скорости ухода платформы на данных временных интервалах.:

$$(\omega_X^2 + \omega_Y^2 + \omega_Z^2)^{1/2} = \nu, \quad \omega_j = c_j\nu, \quad c_j = \text{const}, \quad j = X, Y, Z.. \tag{2}$$

Использование указанных соотношений в (1) приводит к системе трех уравнений относительно неизвестных ν, c_j ($j = X, Y, Z$). Так как исходная взаимная ориентация Земли и платформы известна, то использование условий (2) при $t = 0$ позволяет определить значения c_j для первого временного интервала движения платформы [1].

Зная c_j, объединяем исходные уравнения в уравнение, описывающее изменение во времени модуля мгновенной скорости вращения платформы ν:

$$((a\nu + b)^{\cdot}\nu^{-1})^{\cdot} = c_X\nu, \quad a = (c_X^{-1}, c_Y^{-1}, c_Z^{-1})\mathbf{M}^{-1}(c_X, c_Y, c_Z)^{\mathrm{T}}$$

$$b = l_1 c_X^{-1} + (l_2 + l_3)c_Y^{-1}, \quad l_i = -(m_{i1}u_1 + m_{i2}u_2 + m_{i3}u_3)$$

(m_{ij}, u_j – соответствующие элементы $\mathbf{M}^{-1}$ и $\mathbf{U}$). Это уравнение, вводя замену переменных $y = \ln\nu$, представляем далее в виде

$$y^{\cdot\cdot} + \delta_1 y^{\cdot} + \delta_2 y^{\cdot} e^{-y} + \delta_3 e^{-y} + \delta_4 e^{y} + \delta_5 = 0 \tag{3}$$

Полученное уравнение (3) является исходным при исследовании временной эволюции скорости собственного ухода платформы. Характер функциональной временной зависимости скорости ухода далее определяем, исходя из предположений о величине значений и вариаций во времени коэффициентов и переменных уравнения (3), вытекающих из свойств гиростабилизатора и особенностей его применения. Принимаем коэффициенты уравнения (3)

$$\delta_1 = a^{\cdot}a^{-1}, \quad \delta_2 = -b^{\cdot}a^{-1}, \quad \delta_3 = b^{\cdot\cdot}a^{-1}, \quad \delta_4 = -c_X a^{-1}, \quad \delta_5 = a^{\cdot\cdot}a$$

постоянными на интервале времени движения платформы, для которого выполняются условия (2).

Для реальных гиростабилизаторов с $|\omega_j|_{\max} = (2 \div 3) \times 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$ по результатам моделирования $|\Delta\delta_i\delta_i^{-1}|_{\max} \leqslant 10^{-2}$, $j = X, Y, Z$; $i = 1, 2, \ldots, 5$, при отсутствии негравитационных ускорений: $A_N = A_E = 0$, $A_L = -g$.

Пренебрегая в уравнении (3) слагаемым с коэффициентом $b^{\cdot}a^{-1}$, весьма малым для реальных гиростабилизаторов (например, при $|\omega_j|_{\max} \sim 10^{-6}\,\text{с}^{-1}$ имеем $|b^{\cdot}a^{-1}| \leqslant 10^{-4}$ для $t \in [0; 10^4]$ с), получаем

$$y^{\cdot\cdot} + a^{\cdot}a^{-1}y^{\cdot} + b^{\cdot\cdot}a^{-1}e^{-y} - c_X a^{-1}e^{y} + a^{\cdot\cdot}a^{-1} = 0 \tag{4}$$

Представляя сумму экспоненциальных членов как

$$(c_X - b^{\cdot\cdot})(a\,\mathrm{sh}\,q)^{-1}\mathrm{sh}(y - q) = i(b^{\cdot\cdot} - c_X)(a\,\mathrm{sh}\,q)^{-1}\sin[i(y - q)]$$

$$q = \mathrm{arth}[(b^{\cdot\cdot} - c_X)(b^{\cdot\cdot} + c_X)^{-1}]$$

и произведя замены переменных $z = y - q$ и $z_1 = i(y - q)$, запишем уравнение (4) следующим образом:

$$z_1^{\cdot\cdot} + \gamma_2 z_1^{\cdot} + \gamma_1 \sin z_1 + \gamma_0 = 0$$

$$\gamma_0 = i(q^{\cdot\cdot} + a^{\cdot}a^{-1}q^{\cdot} + a^{\cdot\cdot}a^{-1}), \quad \gamma_1 = i(b^{\cdot\cdot} - c_X)(a\,\mathrm{sh}\,q)^{-1}, \quad \gamma_2 = a^{\cdot}a^{-1} \tag{5}$$

Для гиростабилизаторов, используемых в прецизионных системах, возможно и целесообразно пренебрежение в (5) составляющими с коэффициентами γ_0 и γ_2, ввиду их малости по сравнению с величиной $y^{\cdot\cdot}$. В этом случае получаем

$$z_1^{\cdot\cdot} + i(b^{\cdot\cdot} - c_X)(a\,\mathrm{sh}\,q)^{-1}\sin z_1 = 0 \tag{6}$$

– т.е. уравнение колебаний маятника, решение которого известно. Осуществив обратную замену переменных, запишем выражение для мгновенной скорости вращения

$$(i(b^{\cdot\cdot} - c_X)(a\,\mathrm{sh}\,q)^{-1})^{1/2}(t - t_0) = \int\limits_{\chi_0}^{\chi}((1 - u^2)(1 + k^2 - u^2))^{-1/2}du \tag{7}$$

$$\chi = ik^{-1}G, \quad \chi_0 = ik^{-1}G_0$$

$$k^2 = G_0^2 + i(\nu_0^{\cdot}\nu_0^{-1} - q_0^{\cdot})^2 a\,\mathrm{sh}\,q(4(b^{\cdot\cdot} - c_X))^{-1}, \quad G = \mathrm{sh}\,[1/[(\ln\nu - q)]$$

Аналитическое представление скорости ν в данном случае не представляется возможным, а с другой стороны, величина коэффициента $b^{\cdot\cdot}a^{-1}$ в уравнении (4) весьма мала ($\sim 10^{-8}$), что позволяет вместо уравнения (6) рассмотреть уравнение $y^{\cdot\cdot} - c_X a^{-1}e^{y} = 0$.

Решение данного уравнения известно ([2], с. 499). Учитывая возможность перемены знака коэффициента $c_X a^{-1} = c_0$ и произведя замену $y = \ln \nu$, определим искомое выражение

$$\nu = \begin{cases} c_1 \mathrm{ch}^{-2} 1/2W, & \text{при} \quad c_0 < 0, \quad c_1 > 0 \\ c_1 \mathrm{sh}^{-2} 1/2W & \text{при} \quad c_0 > 0, \quad c_1 > 0 \\ -c_1 \sin^2 i\, 1/2W & \text{при} \quad c_0 > 0, \quad c_1 < 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$W = c_1^{1/2} \beta (t - c_2), \qquad \beta = (2 | c_0 |)^{1/2}$$

$$c_1 = ((\dot{\nu}_0 \nu_0^{-1})^2 - 2\nu_0 c_0)(2 | c_0 |)^{-1}$$

(c_2 – постоянная величина, определяемая из решения (8) при $t = 0$).

На различных участках движения гиростабилизатора возможно использование различных представлений модуля скорости ухода ν (7), (8), выбор которых может быть осуществлен оценкой соответствующих коэффициентов исходного уравнения (3).

Граница временного интервала сохранения адекватности аналитического представления ν может быть определена путем проверки выполнения условий $\omega_i \omega_j^{-1} = \text{const}$, $i, j = X, Y, Z$, где расчет ω_j с требуемой точностью осуществляется согласно [1].

Расчет значений c_X, c_Y, c_Z, неизменных на следующем интервале движения ГСП, производится обычным пересчетом координат с учетом величины угла конечного поворота на предыдущем интервале $[t_0, t_k]$:

$$\int_{t_0}^{t_k} \nu(s)\, ds$$

С целью проверки возможности обеспечения требуемой точности представления истинной скорости ухода ТГС с помощью полученных аппроксимаций решения уравнения (3), было осуществлено численное моделирование эволюции скорости ухода платформы гиростабилизатора.

Текущие истинные значения проекций скорости в инерциальной системе координат сравнивались с аналогичными значениями, полученными на основе вычисления найденных аналитических выражений.

Максимальное отклонение значений проекций скорости на временном интервале $(0;\ 10^3)$с не превышало 1%.

Время решения задачи при использовании аппроксимации уменьшилось при этом в 2,2 раза, максимальный объем оперативной памяти – в 1,8 раза.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать выод не только о возможности практического применения рассмотренной аппроксимации скорости ухода платформы, но и целесообразности ее использования с точки зрения вычислительных затрат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов С.В., Мариненко И.Н.* О синтезе временных моделей уходов трехосного гиростабилизатора // Изв. ВУЗов, Приборостроение. 1991. № 6. С. 34–39.
2. *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
25.XII.1991

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В работе "Вариационные методы построения хаотических движений в динамике твердого тела" (ПММ, 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 230–239.) по моему недосмотру во втором абзаце с. 232 перепутаны значения характеристических показателей 1 и $1/a^{1/2}$, отвечающих маятниковым двоякоасимптотическим траекториям $\Gamma_{1,2}$ и $\Gamma_{3,4}$.

Всюду с этого места вместо "ведущая асимптотическая траектория" следует читать "неведущая асимптотическая траектория" и наоборот. Основные результаты работы при этом не изменятся.

С.В. Болотин 16.VII.1992