2. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
3. *Музычук О.В.* Метод матричных цепных дробей для анализа нелинейных стохастических систем // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 2. С. 169–175.
4. *Музычук О.В.* Применение матричных цепных дробей к анализу стохастических систем с полиномиальной нелинейностью // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 620–625.
5. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио. 1978. 376 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
16.IV.1991

УДК 531.36:62–50

 Б.Н. Соколов

ОГРАНИЧЕННОЕ ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Предлагается позиционное ограниченное по модулю управление, приводящее систему большой размерности из ограниченной области фазового пространства в заданную окрестность начала координат. Получены достаточные условия, которые выделяют класс систем, допускающих такой переход; дается оценка необходимого времени движения; приводятся численные примеры. Работа продолжает исследование позиционных законов управления большими динамическими системами при геометрических ограничениях на управление [1, 2] и примыкает к [3–6].

Рассматривается динамическая система с ограниченным по величине управлением

$$x^{\cdot} = Fx + Gu, \quad |u| \leqslant 1, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m \tag{1}$$

F и G – соответствующие матрицы фазового состояния и управления, удовлетворяющие условию полной управляемости [7]

$$\operatorname{rank} \| G, FG, F^2 G, \ldots, F^{n-1}G \| = n \tag{2}$$

Пусть задана ограниченная область возможных начальных положений системы (1)

$$|x_0| \leqslant R_1, \quad R_1 = \text{const} > 0. \tag{3}$$

Требуется построить позиционное ограниченное по величине управление $u(x, t)$, $|u| \leqslant 1$, переводящее систему (1) из любой точки области (3) в заданную окрестность

$$x^{\mathrm{T}} S_{\mathrm{T}} x \leqslant R_2^2, \quad R_2 = \text{const} > 0 \tag{4}$$

начала координат, S_{T} – заданная положительно определенная матрица.

Предположим, что область (3) не содержится в области (4). Это эквивалентно неравенству

$$R_1^2 > R_2^2 \| S_{\mathrm{T}} \|^{-1} \tag{5}$$

Рассмотрим два варианта построения позиционного управления:

$$\begin{gathered} u_i(x, t) = k_i(t)\, G^{\mathrm{T}} S_i(t)\, x \\ k_i(t) = -R_i^{-1} \| G^{\mathrm{T}} \|^{-1} \| S_i(t) \|^{-1/i} \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $k_i(t)$ ($i = 1{,}2$) – скалярные функции времени, $\| G^{\mathrm{T}} \|$, $\| S_i(t) \|$ – евклидовы нормы матриц G^{T} и $S_i(t)$.

Пусть матрица $S_i(t)$ в законе управления (6) выбирается из условия

$$(x^{\mathrm{T}} S_i(t)\, x)^{\cdot} = 0, \quad S_i(T) = S_{\mathrm{T}} \tag{7}$$

Производная по времени берется в силу системы, получаемой после подстановки управления (6) в уравнение движения (1). Тогда

$$x^{\mathrm{T}} \Phi_i(S_i^{\cdot}, S_i) x = 0 \tag{8}$$

$$\Phi_i(S_i^{\cdot}, S_i) \equiv S_i^{\cdot} + 2k_i(t)\, S_i G G^{\mathrm{T}} S_i + S_i F + F^{\mathrm{T}} S_i$$

Равенство (8) верно для всех x, поэтому матрица S_i удовлетворяет уравнению с граничным условием

$$\Phi_i(S_i^{\cdot}, S_i) = 0, \quad S_i(T) = S_{\mathrm{T}} \tag{9}$$

Из соотношения (7) следует, что из любого положения x_0, принадлежащего области

$$x_0^{\mathrm{T}} S_i(t)\, x_0 \leqslant R_2^2 \tag{10}$$

система (1) под действием управления (6) перейдет в требуемое положение (4) за время $T - t_i$.

Лемма 1. Пусть R_1 (3), R_2 (4) и матрица $S_i(t_i)$ ($i = 1,2$) связаны соотношением

$$|x_0|^2 \leqslant R_1^2 = \| S_i(t_i) \|^{-1} R_2^2 \tag{11}$$

Тогда управление $u_i(x, t)$ на реализующихся траекториях допускает оценку

$$\begin{aligned} &|u_1(x, t)| \leqslant \max_t \| S_1(t_1) \|^{1/2} \| S_1(t) \|^{-1/2} \\ &|u_2(x, t)| \leqslant 1, \quad t \in [t_i, T], \quad i = 1,2 \end{aligned} \tag{12}$$

и гарантирует перевод системы (1) из любой точки области (3) в заданную окрестность (4) начала координат за время $T - t_i$.

Доказательство. Оценим величину управления $u_i(x, t)$ на траекториях, начинающихся в области (10). Из определения управлений (6) следует неравенство

$$|u_i(x, t)| \leqslant \max_{x,t} \| G^{\mathrm{T}} S_i(t)\, x \| / (R_i \| G^{\mathrm{T}} \| \, \| S_i \|^{1/i}) \tag{13}$$

Максимум берется по всем t и x, удовлетворяющим условию $x^{\mathrm{T}} S_i(t)\, x \leqslant R_2^2$ и $T \geqslant t \geqslant t_i$. Можно доказать, что

$$\max_x \| S_i(t)\, x \| = \| S_i(t) \|^{1/2} R_2 \quad \text{при} \quad x^{\mathrm{T}} S_i(t)\, x \leqslant R_2^2$$

Подставляя это выражение при $i = 2$ в неравенство (13), получим оценку (12) величины управления $u_2(x, t)$ на траекториях, начинающихся в области (10). Для $u_1(x, t)$ аналогично имеем оценку

$$|u_1(x, t)| \leqslant \max_t (R_2 / (\| S_1(t) \|^{1/2} R_1)); \quad t_1 \leqslant t \leqslant T$$

Оценка (12) вытекает из этого неравенства и соотношения (11), в силу которого область (3) принадлежит области (10).

Из уравнения (7) и условия (11) следует цепочка соотношений

$$(x^{\mathrm{T}} S_{\mathrm{T}} x) = (x_0^{\mathrm{T}} S_i(t_i)\, x_0) \leqslant |x_0|^2 \, \| S_i(t_i) \| \leqslant R_1^2 \, \| S_i(t_i) \| = R_2^2$$

Условие (4) выполнено, что доказывает второе утверждение леммы.

Выпишем уравнение, определяющее $\| S_i(t) \|$. Сделаем в уравнении (9) замену переменных по формуле $S_i = V_i^{-1}$. При этом $S_i^{\cdot} = -V_i^{-1} V_i^{\cdot} V_i^{-1}$. В результате получим уравнение и граничное условие, которым удовлетворяет матричная функция

$$\begin{aligned} &V_i(t) = \exp(F(t - T))\,(S_{\mathrm{T}}^{-1} + R_i^{-1} \int_0^{T-t} I(\xi)\, \mu_i^{1/i}(\xi)\, d\xi) \exp(F^{\mathrm{T}}(t - T)) \\ &I(\xi) \equiv 2 \| G^{\mathrm{T}} \|^{-1} \exp(F\xi)\, G G^{\mathrm{T}} \exp(F^{\mathrm{T}} \xi) \\ &\mu_i(\xi) \equiv \| S_i(T - \xi) \|^{-1} \equiv \min_l l^{\mathrm{T}} V_i(T - \xi)\, l, \quad |l| = 1 \end{aligned} \tag{14}$$

в чем можно убедиться подстановкой.

Введем "обратное" время $\tau = T - t$. Для $\mu_i(\tau)$ из (14) получим интегральное уравнение

$$\mu_i(\tau) = \min_l l^{\mathrm{T}} W_i(\tau, \mu_i^{1/i}(\cdot), R_i)\, l \tag{15}$$

где $W_i(\tau, \mu_i^{1/i}(\cdot), R_i)$ – правая часть соотношения (14), точка на месте аргумента у $\mu_i(\cdot)$ означает, что W_i зависит от значений $\mu_i(\xi)$ на интервале $(0, \tau)$.

Оценим скорость роста $\mu_i(\tau)$ при $\tau \to \infty$. Для этого представим τ в виде $\tau = N\Delta + \epsilon$, где $0 \leqslant \epsilon < \Delta$, $\Delta = \mathrm{const} > 0$, N – целое. Запишем интеграл в правой части уравнения (15) в виде суммы из N интегралов и введем новую переменную интегрирования ζ формулой $\xi = j\Delta + \zeta$, $0 \leqslant \zeta < \Delta$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\mu_1(\tau) = \min_l l^{\mathrm{T}} \exp(-F\tau)[S_{\mathrm{T}}^{-1} + R_1^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^{\Delta} I(j\Delta+\zeta)\,\mu_1(j\Delta+\zeta)\,d\zeta + \tag{16}$$

$$+ R_1^{-1} \int_0^{\epsilon} I(N\Delta+\zeta)\,\mu_1(N\Delta+\zeta)\,d\zeta]\exp(-F^{\mathrm{T}}\tau)\,l, \quad |l| = 1$$

Оценим снизу $\inf_\zeta \mu_1(j\Delta+\zeta)$, $\zeta \in [0, \Delta)$. Для этого введем N величин μ_{1j} $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$, определенных ниже рекуррентно, таких, что

$$0 < \mu_{1j} \leqslant \inf_\zeta \mu_1(j\Delta+\zeta), \quad 0 \leqslant \zeta < \Delta$$

Из уравнения (16) и определения μ_{1j} следует

$$\mu_1(\tau) \geqslant \mu_{1N}(\tau), \quad \tau \in [N\Delta, (N+1)\Delta)$$

$$\mu_{1N}(\tau) \equiv \| \exp(F\tau) \|^{-2} \, \| S_{\mathrm{T}} \|^{-1} + C_0 \sum_{j_0=0}^{N-1} \mu_{1j} \, \| \exp(F(\tau - j\Delta)) \|^{-2} \tag{17}$$

$$C_0 = R_1^{-1} \min_l l^{\mathrm{T}} \int_0^{\Delta} I(\xi)\,d\xi\, l, \quad |l| = 1$$

причем $C_0 > 0$ в силу условия (2) полной управляемости [7]. Предположим, что характеристические числа λ_k матрицы F (1), обладающие наибольшими вещественными частями α, имеют простые элементарные делители (предположение А). Тогда при $\tau \geqslant \tau_j$ имеет место оценка [8]

$$\| \exp(F(\tau - \tau_j)) \| \leqslant C \exp\alpha(\tau - \tau_j), \quad \tau \geqslant \tau_j, \quad C > 0 \tag{18}$$

Предположим, что однородная система (1) устойчива. В силу устойчивости системы либо выполнено предположение А и $\alpha = 0$, либо $\alpha < 0$ [8]. В любом случае имеет место оценка типа (18) и минимум правой части неравенства, получаемого при подстановке этой оценки в соотношение (17), достигается при $\tau = N\Delta$. Таким образом, получаем рекуррентное соотношение

$$\mu_1(\tau) \geqslant \mu_{1N} = C_1 \exp(-2\alpha\Delta N) +$$

$$+ C_2 \sum_{j=0}^{N-1} \mu_{1j} \exp(2\alpha\Delta(j - N)), \quad \tau \in [N\Delta, (N+1)\Delta) \tag{19}$$

$$C_1 = C^{-2} \| S_{\mathrm{T}} \|^{-1} > 0, \quad C_2 = C_0 C^{-2} > 0$$

Уравнение (19) допускает решение

$$\mu_{10} = C_1, \quad \mu_{1N} = C_1 \exp\rho\,(\exp\rho + C_2)^{N-1} \tag{20}$$

$$N \geqslant 1, \quad \rho = -2\alpha\Delta \geqslant 0$$

Просуммировать аналогичные рекуррентным уравнениям (19) соотношения для μ_{2N} ($N = 1, 2, 3\ldots$) не удается, так как при $i = 2$ величина $\mu_2(\xi)$ входит в правую часть уравнения (15) нелинейно. Однако заметим следующее. Пусть моменты $\tau_i = T - t_i$ $(i = 1, 2)$ – минимальные положительные корни следующих уравнений:

$$\mu_i(\tau_i) = \| S_i(t_i) \|^{-1} = R_1^2 R_2^{-2} \tag{21}$$

обеспечивающих выполнение условий (11). Из минимальности корня τ_1 и неравенства (5) вытекает оценка $\mu_1(\tau_1) \geqslant \max_\tau \mu_1(\tau)$, $\tau_1 \geqslant \tau \geqslant 0$, и как следствие неравенства (12) – оценка величины управления (1).

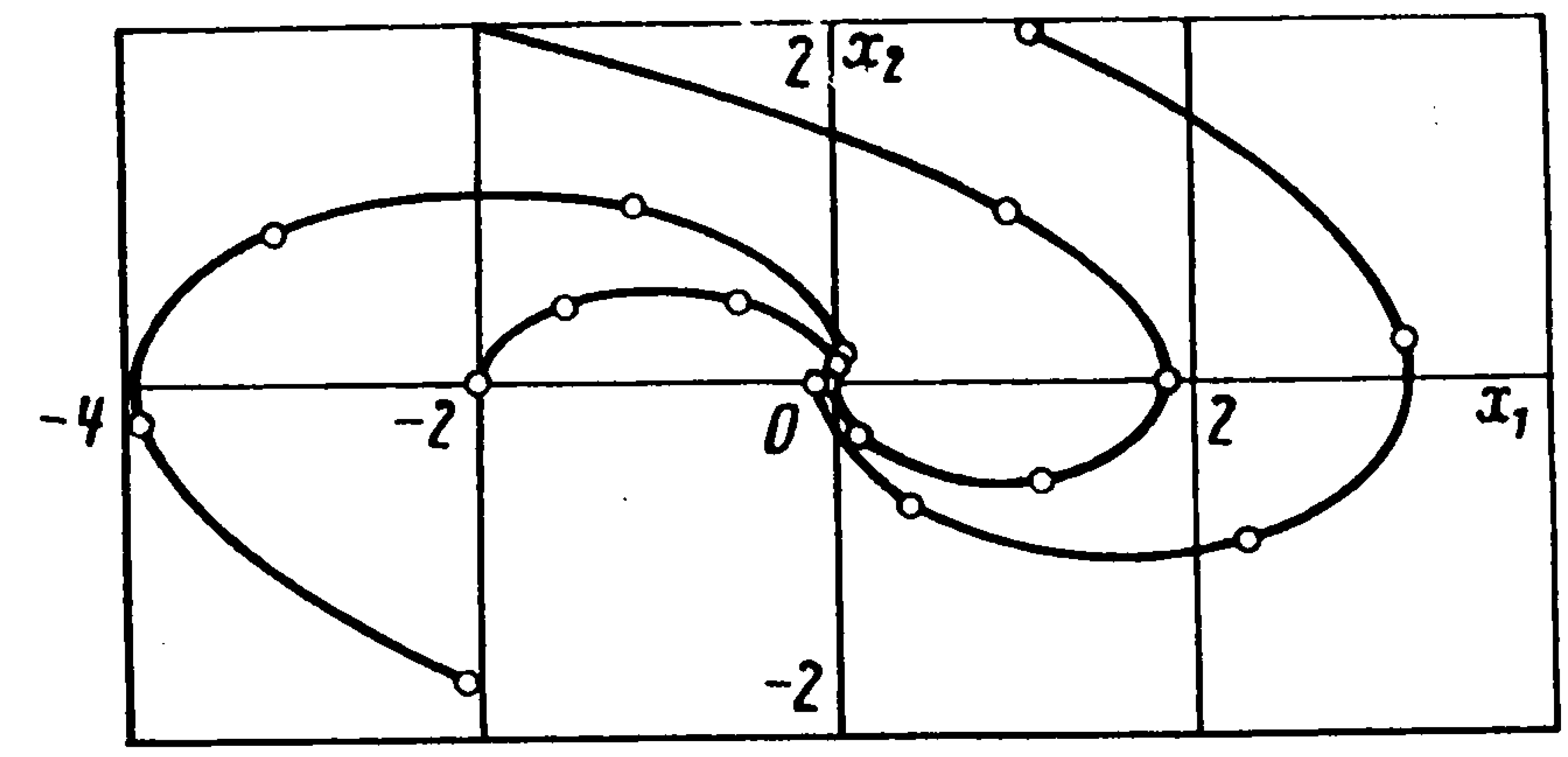
Равенства (21) и соотношение $\mu_1^{1/2}(\xi) < R_1 R_2^{-1}$ при $\tau_1 > \xi \geqslant 0$ обусловливают оценку $\mu_1(\xi) R_1^{-1} < \mu_1^{1/2}(\xi) R_2^{-1}$. Отсюда и из уравнений (15) при $i = 1, 2$ следует неравенство $\mu_2(\tau) > \mu_1(\tau)$ при $\tau_2 \geqslant \tau > 0$ и как следствие верна оценка

$$\tau_1 > \tau_2 \tag{22}$$

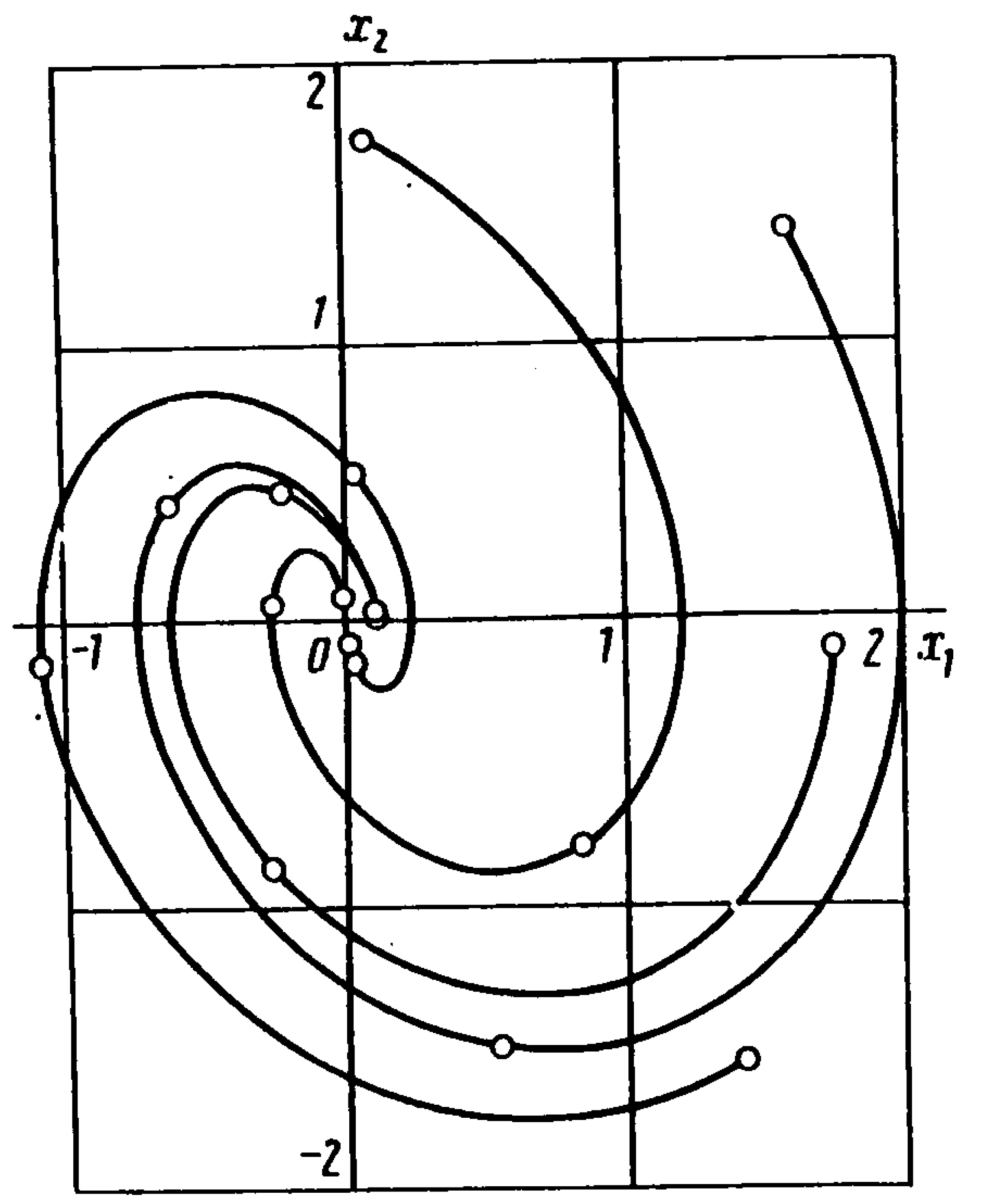
Из оценок скорости роста $\mu_1(\tau)$ при $\tau \to \infty$ (19), (20) и неравенства (22) следует

Лемма 2. Пусть система (1) вполне управляема, а соответствующая однородная система устойчива. Тогда найдутся моменты t_i $(i = 1, 2, t_1 < t_2 < T)$, которые удовлетворяют соотношениям (21).

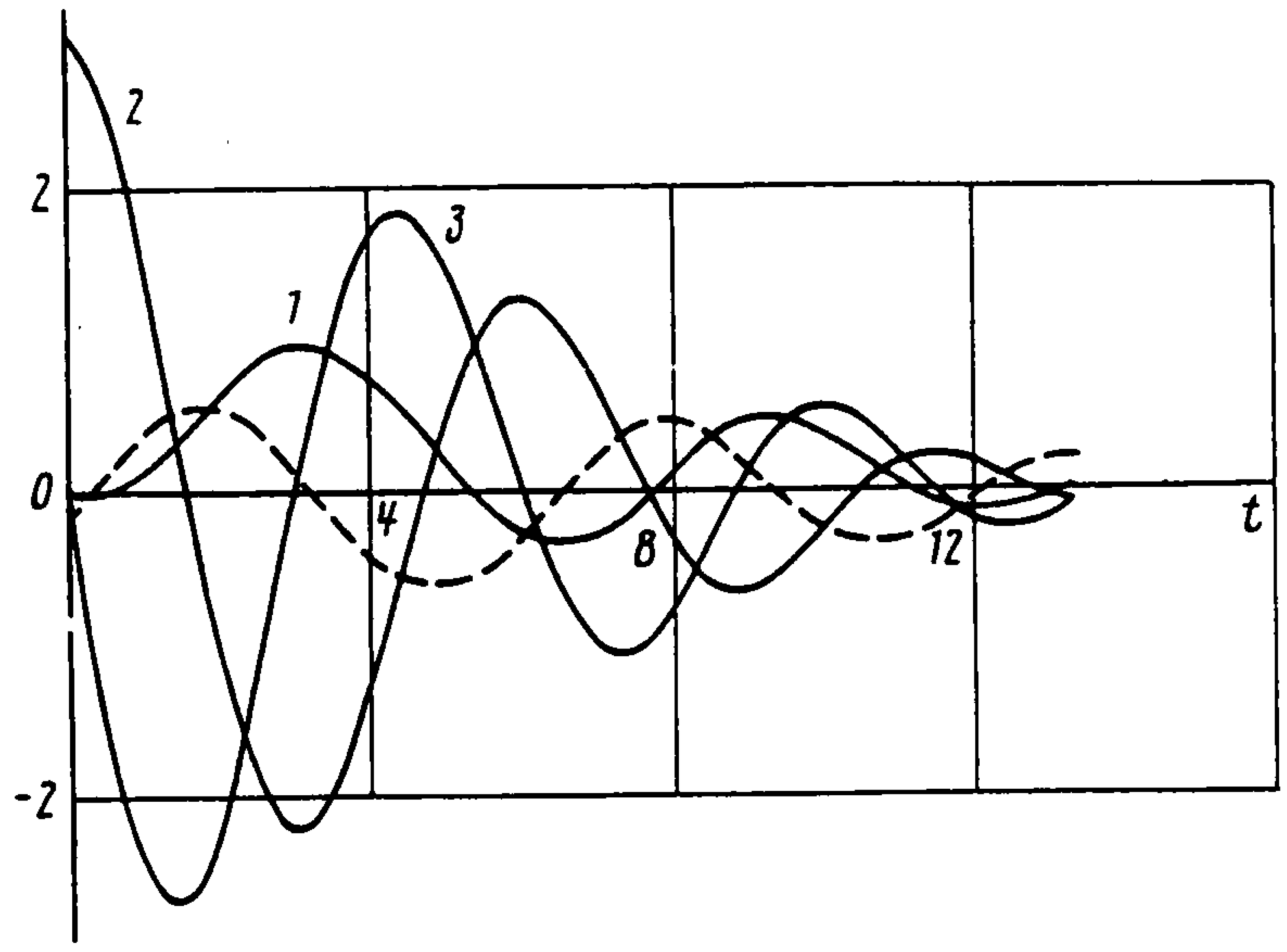
Из лемм 1 и 2 следует



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Теорема. Пусть система (1) вполне управляема, а соответствующая однородная система устойчива. Тогда для любой точки области (3) начальных положений системы (1) найдутся моменты t_i $(i = 1, 2)$, удовлетворяющие соотношениям (21), такие, что управления (6) $u_i(x, t)$ $(i = 1, 2,$ $t \in [t_i, T])$ ограничены по величине: $|u_i(x, t)| \leqslant 1$ и обеспечивают перевод системы (1) из любой точки области (3) в заданную окрестность (4) начала координат за время $\tau_i = T - t_i$, $\tau_1 > \tau_2$, соответственно.

Замечание. Условия леммы 2 гарантируют существование моментов t_i, удовлетворяющих соотношениям (21). Если существование этих моментов будет обосновано другим путем, например, численно, то все утверждения теоремы будут также выполнены.

Примеры. Уравнение (15) решалось численно с использованием разностной схемы предиктор–корректор второго порядка точности [9]. Интегрирование проводилось до первого момента τ_i выполнения условий (21). Одновременно с решением уравнения (15) из уравнения (14) определялась матрица $S_i(t) = V_i^{-1}(t)$. Затем движение системы моделировалось с законом управления (6) и матрицей S_i. Результаты расчетов показали, что закон управления (6) при $i = 2$ значительно эффективнее по быстродействию того же закона при $i = 1$. Поэтому излагаемые ниже результаты относятся только ко второму закону управления. Во всех приведенных ниже примерах требовалось перевести систему в конечное состояние $|x_T| \leqslant 0{,}1$. На фазовых плоскостях фигур 1 и 2 ноликами отмечены положения системы через 2 с. Начальным положениям системы соответствуют начала траекторий.

На фиг. 1 изображены фазовые траектории системы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$. Система неустойчива, однако решение t_2 уравнения (21) существует при всех R_1 и R_2.

На фиг. 2 изображены фазовые траектории системы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 + u$. Расчеты показывают, что время перехода из любой точки области радиуса $R_1 = 2{,}1$ в область радиуса $R_2 = 0{,}1$ с управлением (6) не превосходит 6,1. Гарантированное время быстродействия из любой точки области радиуса R_1 = 2,1 на заданную окрестность радиуса R_2 при ограниченном управлении (1) составляет π.

Рассмотрим маятник, точка подвеса которого может перемещаться с ограниченной по величине скоростью вдоль горизонтальной направляющей. Предположим, что скорость подвеса может в заданных пределах меняться практически мгновенно. Уравнения движения такой системы записываются в виде: $x_1^{\cdot} = u$, $x_2^{\cdot} = x_3$, $x_3^{\cdot} = -x_3 + u$ [10]. Переменная x_2 имеет смысл абсолютной безразмерной скорости груза, x_3 – угол отклонения маятника от вертикали. На фиг. 3 изображены графики изменения фазовых координат как функций времени. Цифры на кривых соответствуют индексу фазовой переменной. Штриховой кривой показана управляющая функция $u(t)$ при следующих начальных условиях: $x_1(0) = x_3(0) = 0$, $x_2(0) = 3$.

Значение управления колеблется в заданных пределах и не стремится к нулю при $t \to T$.

Замечание. Представляет интерес сравнить способ управления (6) при $i = 2$ с управлением, которое реализует оптимальной синтез в задаче приведения динамической системы $x^{\cdot} = Fx + Gu$ в начало координат за фиксированное время T с квадратичным по управлению функционалом. Известно [7], что решение последней задачи доставляет линейное по фазовым координатам управление с матрицей обратной связи, зависящей от оставшегося до конца движения времени.

Пусть система (1) вполне управляема (2), соответствующая однородная система (1) устойчива и $\alpha = 0$ (18). Было показано [1], что в этом случае для выполнения условия ограниченности управления (1) время движения T должно превосходить некоторую квадратичную функцию радиуса R_1 области (3) начальных положений системы. Из аналогичного рекуррентному уравнению (19) соотношения при $i = 2$ можно получить, что при тех же предположениях величина μ_{2N} (19) превосходит некоторую квадратичную функцию N ($N = 1, 2, 3, \ldots$). Из уравнения (21) поэтому следует, что время движения τ_2 в произвольную фиксированную окрестность начала координат, соответствующее управлению (6) при $i = 2$, не превосходит линейной функции R_1. Поэтому при достаточно больших размерах R_1 области возможных начальных состояний системы (1) управление (6) при $i = 2$ заведомо эффективнее по быстродействию рассмотренного ранее [1] способа движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов Б.Н.* Оценка величины управления в линейной динамической задаче оптимизации с квадратичным функционалом // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 678–681.
2. *Соколов Б.Н.* Стабилизация динамических систем при геометрических ограничениях на управление // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 48–53.
3. *Коробов В.И.* Общий подход к решению задач синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Математ. сб. 1979. Т. 109 (151), № 4 (8). С. 582–606.
4. *Черноусько Ф.Л.* О построении ограниченного управления в колебательных системах // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 549–558.
5. *Овсеевич А.И.* О полной управляемости линейных динамических систем // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 845–848.
6. *Черноусько Ф.Л.* Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 883–893.
7. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
8. *Демидович В.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
9. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. М.: Наука, 1982. 271 с.
10. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 343 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.V.1991