Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 6, 1992

УДК 531.36:534.1

©1992 г. М.Г. Мишанина, О.В. Музычук

К АНАЛИЗУ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ИНТЕНСИВНЫМ НЕБЕЛЫМ ШУМОМ

Предлагается метод отыскания стационарных моментов решения нелинейных стохастических уравнений с аддитивным гауссовым случайным воздействием, основанный на использовании матричных цепных дробей. Метод не накладывает априорных ограничений на интенсивность и время корреляции шума. Рассматриваются два способа построения таких дробей – на базе цепочки уравнений для совместных моментов или цепочки для совместных кумулянтов решения и случайной силы.

Как известно, динамические системы, подверженные воздействию случайных сил, обычно описываются с использованием аппарата марковских процессов и процессов диффузионного типа (см., например, [1, 2]). Однако аналитические решения соответствующих уравнений Фоккера – Планка находятся лишь в отдельных случаях. Трудности решения этих уравнений значительно возрастают, если случайные воздействия нельзя аппроксимировать дельта-коррелированным шумом.

Для нахождения стационарных значений моментов решения таких систем можно использовать матричные цепные дроби. Рассматривалось [3, 4] применение матричных цепных дробей к нелинейным системам с дельта-коррелированными силами. Сущность этого метода заключается в ведении векторов, компонентами которых являются моменты решения. В ряде случаев зацепление этих векторов, обусловленное нелинейностью, носит характер трехчленного взаимодействия, и соответствующие решения искомых (низших) моментов имеют вид матричных цепных дробей. Для системы с небелым гауссовым шумом компонентами векторов могут быть совместные моменты или совместные кумулянты решения и случайной силы. Ниже рассматриваются оба этих представления и на конкретном примере демонстрируются преимущества подхода, использующего совместные кумулянты. Применение указанного метода для отыскания моментов более сложных стохастических систем не содержит принципиальных трудностей, кроме увеличения размерности соответствующих матриц.

1. Рассмотрим динамическую систему, описываемую стохастическим уравнением

$$Tx' + x + \beta x^3 = \xi(t) \tag{1.1}$$

где $\xi(t)$ – гауссов марковский процесс, который можно определить вспомогательным уравнением

$$\Pi^{-1}\xi' + \xi = \eta(t) \tag{1.2}$$

T – постоянная времени соответствующей линейной системы, Π – ширина спектра шума ξ; η – гауссов дельта-коррелированный процесс с нулевым средним значением. На основании (1.1), (1.2) стандартным образом можно получить систему зацепляющихся уравнений для совместных моментов или совместных кумулянтов

$$\langle nm\rangle \equiv \langle x^n \xi^m\rangle, \qquad \langle n, m\rangle \equiv \langle x^n, \xi^{[m]}\rangle$$

Последнее среднее есть кумулянтная скобка порядка $(m+1)$ процесса $y = x^n$ и случайной силы ξ, которая входит m раз; использованы обозначения, введенные в [5]. Стационарные значения совместных моментов связаны уравнением

$$(n\tau + m)\langle nm\rangle - n\tau < (n-1)(m+1)\rangle + n\beta\tau < (n+2)m\rangle = m(m-1)D < n(m-2)\rangle \tag{1.3}$$

$$m, n = 0, 1, \ldots$$

а значения совместных кумулянтов – уравнением

$$(n\tau + m)\langle n, m\rangle - n\tau < (n-1),(m+1)\rangle + n\beta\tau < (n+2), m\rangle = mn\langle x^2\rangle_0 < (n-1),(m-1)\rangle \tag{1.4}$$

Здесь

$$D = \langle \xi^2 \rangle, \quad \tau = \Pi T, \quad \langle x^2 \rangle_0 = D\tau \tag{1.5}$$

Параметры D и τ – соответственно интенсивность и относительное время корреляции входного шума, $\langle x^2 \rangle_0$ – средняя интенсивность выходной координаты линейной ($\beta = 0$) системы.

При соответствующем выборе векторов X_n как соотношение (1.3), так и (1.4) приводят к цепочкам трехчленного взаимодействия

$$A_n X_n + B_n X_{n+1} = C_n X_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.6}$$

где A_n, B_n, C_n – некоторые матрицы. Решение таких цепочек можно представить матричной цепной дробью

$$X_n = \cfrac{C_n X_{n+1}}{A_n + \cfrac{B_n C_{n+1}}{A_{n+1} + \cfrac{B_{n+1} C_{n+2}}{A_{n+2} + \dots}}}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.7}$$

(подробнее о реализации соответствующего вычислительного алгоритма см. [3]). Заметим, что в случае дельта-коррелированного шума ξ ($\tau \to 0$, $\langle x^2 \rangle_0 = \mathrm{const}$) средняя интенсивность представима одномерной цепной дробью

$$\langle x^2 \rangle = \cfrac{\langle x^2 \rangle_0}{1 + \cfrac{3\sigma}{1 + \cfrac{5\sigma}{1 + \dots}}}, \quad \sigma = \beta \langle x^2 \rangle_0 \tag{1.8}$$

сходящейся при любых значениях параметра σ (хотя скорость сходимости уменьшается с ростом σ).

2. Определим векторы X_n следующим образом:

$$X_n = (\langle x^{2n} \rangle, \langle x^{2n-1} \xi \rangle, \dots, \langle \xi^{2n} \rangle), \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.1}$$

Заметим, что в силу гауссовости входного шума $\langle \xi^{2n} \rangle = (2n-1)!!D^n$ и последняя компонента в (2.1) кажется лишней. Однако ее введение необходимо для того, чтобы зацепление соответствующих векторов имело трехчленный характер. Матрицы, входящие в (1.6), находим на основании (1.3) и (2.1); для первого матричного уравнения сумма индексов в (1.3) равна трем, для второго – пяти, и т.д. Отличные от нуля матричные элементы таковы:

$$\| A_n \|_{i,i} = (N - i)\tau + i - 1, \quad \| A_n \|_{i,i+1} = (i - N)\tau \tag{2.2}$$

$$\| B_n \|_{i,i} = \beta\tau(N - i), \quad \| C_n \|_{i,i-2} = \langle x^2 \rangle_0 (i-1)(i-2), \quad N = 2n + 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad n = 1, 2, \dots$$

N – размерность квадратных матриц A_n (добавляя или убирая нулевые элементы, матрицы B_n и C_n можно также сделать квадратными).

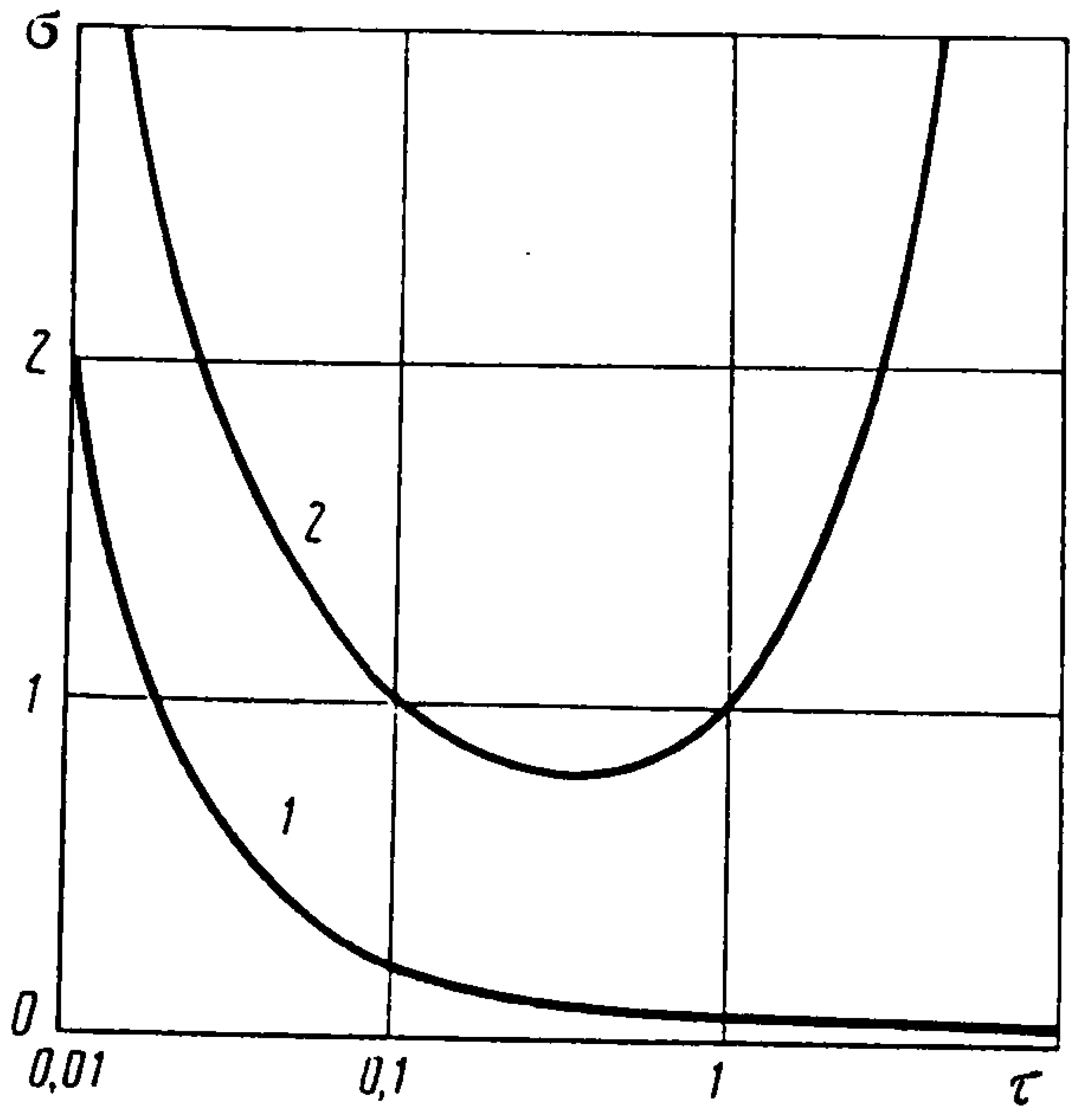
Реализуемая на компьютере процедура построения приближенных решений для моментов на основании (1.7) заключается в следующем: положив вектор X_k тождественно равным нулю, ограничиваем тем самым дробь и вычисляем ее снизу вверх. Соответствующий результат для вектора X_1 назовем k-м приближением. Если норма разности соседних приближений меньше заданной точности, вычисления прекращаем.

Выполненный численный анализ показал, что процедура, основанная на цепной дроби по совместным моментам, сходится лишь в области достаточно малых значений величин σ и τ (фиг. 1, кривая *1*) и поэтому не может быть рекомендована для анализа стохастических систем с интенсивными шумами.

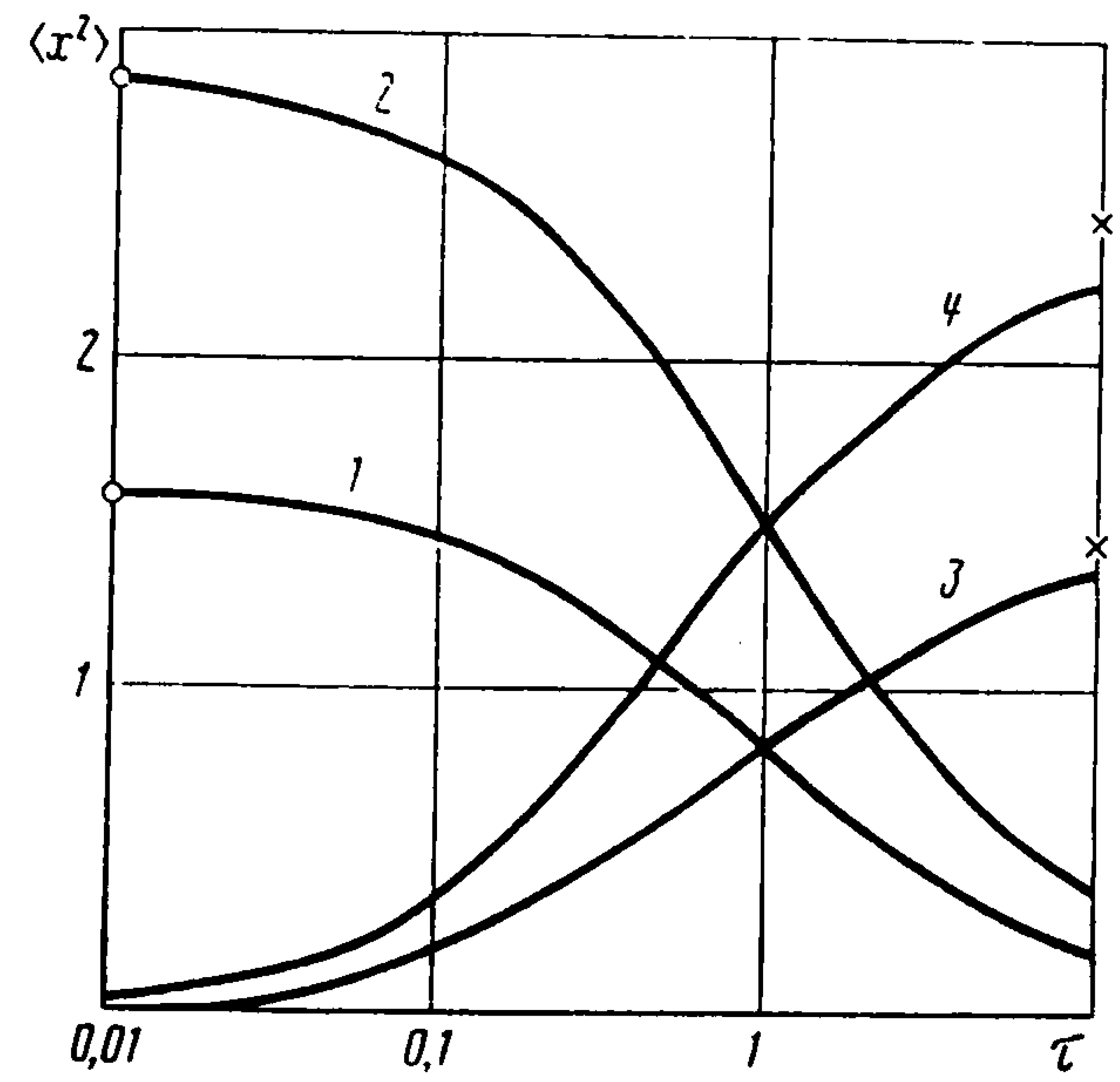
3. Для стохастических систем с гауссовым шумом ξ есть основания полагать, что более адекватной была процедура, основанная на построении цепочек по совместным кумулянтам $\langle n, m \rangle$ совокупности $\{ x^n, \xi \}$. В самом деле, с ростом индекса m увеличивается число гауссовых членов в соответствующей кумулянтной скобке, что, по-видимому, приводит к уменьшению ее относительной величины.

Введем векторы X_n, компонентами которых кроме искомых моментов будут совместные кумулянты:

$$X_n = (\langle x^{2n} \rangle, \langle \xi, x^{2n-1} \rangle, \dots, \langle \xi^{[n-1]} x \rangle), \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

(Заметим, что их размерность теперь равна $2n$, "лишней" компоненты не требуется). На основании (1.4) и (3.1) находим отличные от нуля элементы матриц

$$\| A_n \|_{i,i} = (2n - i + 1)\,\tau + i - 1, \quad \| A_n \|_{i,i+1} = (i - 2n - 1)\,\tau \tag{3.2}$$

$$\| B_n \|_{i,i} = (2n - i + 1)\,\beta\tau, \quad \| C_n \|_{i,i-1} = \langle x^2 \rangle_0 (i - 1)(2n - i + 1)$$

$$i = \overline{1, 2n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Численный анализ, выполненный на основании (1.7), (3.2), показал, что процедура отыскания моментов, осуществляемая путем разложения в цепную дробь по векторам (3.1), сходится в области параметров σ и τ, лежащей ниже кривой *2* на фиг. 1. Эта область гораздо шире, чем соответствующая разложению по моментным векторам (2.1). Отметим, что сходимость метода теперь имеет место и в области больших времен корреляции. Это позволяет сравнить соответствующие результаты, полученные при $\tau \gg 1$ (D = const) с точными квазистатическими значениями моментов процесса x, которые можно получить интегрированием плотности вероятности

$$W_\infty(x) = \frac{1 + 3\beta x^2}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left[- \frac{x^2 (1 + \beta x^2)^2}{2D} \right] \tag{3.3}$$

(последняя элементарно находится из квазистатического соотношения между x и ξ, получаемого при опускании производной в исходном уравнении (1.1)).

Фиг. 2 показывает зависимость средней интенсивности от относительного времени корреляции случайной силы. Кривые *1*, *2*, построенные при $\langle x^2 \rangle_0$ = const, допускают предельный переход к известным результатам для белого шума ($\tau \to 0$). Кривые *3* и *4*, построенные при D = const, позволяют сравнить полученные результаты с квазистатическими ($\tau \to \infty$). Белошумовые значения интенсивности показаны светлыми точками на линии $\tau = 0{,}01$, а квазистатические – крестиками на линии $\tau = 10$.

Для кривых *1*, *2* $\langle x^2 \rangle_0 = 1$ и 2 соответственно. Для кривых *3*, *4* $D = 1$ и 2 соответственно. Всюду $\beta = 0{,}1$.

Итак, на примере одномерной системы с кубической нелинейностью установлены преимущества метода, использующего разложение по совместным кумулянтам решения и случайной силы. Есть основания полагать, что данный вывод справедлив и для более сложных систем с аддитивным случайным воздействием. Разумеется, с увеличением порядка системы, как и при учете нескольких степенных членов разложения нелинейностей [4], растет размерность соответствующих матриц, но эти трудности чисто технические. Представляют интерес и остающиеся открытыми вопросы сходимости указанной процедуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.

2. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
3. *Музычук О.В.* Метод матричных цепных дробей для анализа нелинейных стохастических систем // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 2. С. 169–175.
4. *Музычук О.В.* Применение матричных цепных дробей к анализу стохастических систем с полиномиальной нелинейностью // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 620–625.
5. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио. 1978. 376 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
16.IV.1991

УДК 531.36:62–50

 Б.Н. Соколов

ОГРАНИЧЕННОЕ ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Предлагается позиционное ограниченное по модулю управление, приводящее систему большой размерности из ограниченной области фазового пространства в заданную окрестность начала координат. Получены достаточные условия, которые выделяют класс систем, допускающих такой переход; дается оценка необходимого времени движения; приводятся численные примеры. Работа продолжает исследование позиционных законов управления большими динамическими системами при геометрических ограничениях на управление [1, 2] и примыкает к [3–6].

Рассматривается динамическая система с ограниченным по величине управлением

$$x^{\cdot} = Fx + Gu, \quad |u| \leqslant 1, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m \tag{1}$$

F и G – соответствующие матрицы фазового состояния и управления, удовлетворяющие условию полной управляемости [7]

$$\operatorname{rank} \| G, FG, F^2 G, \ldots, F^{n-1} G \| = n \tag{2}$$

Пусть задана ограниченная область возможных начальных положений системы (1)

$$|x_0| \leqslant R_1, \quad R_1 = \text{const} > 0. \tag{3}$$

Требуется построить позиционное ограниченное по величине управление $u(x, t)$, $|u| \leqslant 1$, переводящее систему (1) из любой точки области (3) в заданную окрестность

$$x^{\mathrm{T}} S_{\mathrm{T}} x \leqslant R_2^2, \quad R_2 = \text{const} > 0 \tag{4}$$

начала координат, S_{T} – заданная положительно определенная матрица.

Предположим, что область (3) не содержится в области (4). Это эквивалентно неравенству

$$R_1^2 > R_2^2 \, \| S_{\mathrm{T}} \|^{-1} \tag{5}$$

Рассмотрим два варианта построения позиционного управления:

$$\begin{gathered} u_i(x, t) = k_i(t) \, G^{\mathrm{T}} S_i(t) \, x \\ k_i(t) = -R_i^{-1} \, \| G^{\mathrm{T}} \|^{-1} \, \| S_i(t) \|^{-1/i} \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $k_i(t)$ $(i = 1,2)$ – скалярные функции времени, $\| G^{\mathrm{T}} \|$, $\| S_i(t) \|$ – евклидовы нормы матриц G^{T} и $S_i(t)$.

Пусть матрица $S_i(t)$ в законе управления (6) выбирается из условия

$$(x^{\mathrm{T}} S_i(t) \, x)^{\cdot} = 0, \quad S_i(T) = S_{\mathrm{T}} \tag{7}$$

Производная по времени берется в силу системы, получаемой после подстановки управления (6) в уравнение движения (1). Тогда

$$x^{\mathrm{T}} \Phi_i(S_i^{\cdot}, S_i) x = 0 \tag{8}$$