

УДК 533.6.011

© 1992 г. Г.А. Тирский, С.В. Утюжников, Н.К. Ямалеев

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА К ЗАДАЧЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

Решение задачи о пространственном гиперзвуковом обтекании сферически затупленных тел потоком вязкого газа рассматривается на основе системы уравнений полного вязкого ударного слоя (ПВУС). Применение метода малого параметра (ММП) в совокупности с методом глобальных итераций позволяет сократить затраты машинного времени приблизительно в 100 раз по сравнению со временем счета аналогичных задач в строго трехмерной постановке методами установления [1]. Рассматривается обтекание затупленных конусов и биконусов большой длины под малыми углами атаки, а также обтекание тела, мало отличающегося от осесимметричного, под нулевым углом атаки. Применимость метода малого параметра подтверждается сравнением с экспериментальными и расчетными данными.

Прямое численное моделирование гиперзвукового пространственного обтекания затупленных тел потоком вязкого газа при помощи полных нестационарных уравнений Навье – Стокса требует значительных затрат ресурсов ЭВМ. Для длинных затупленных тел такой подход становится неприемлемым даже при наличии современных супер-ЭВМ. Кроме того, отмечалось [2], что использование численных методов для решения трехмерных задач газовой аэродинамики может приводить к потере точности в случае малых углов атаки, причем относительная ошибка может увеличиваться с уменьшением угла атаки.

Эффективным в этой связи является корректное применение ММП. Он был использован в случае обтекания конусов под малыми углами атаки потоком невязкого газа [2, 3] и в случае обтекания тел, несильно отличающихся от тел вращения [4]. Были указаны [2] рамки применимости ММП, чему ранее [4] не придавалось должного значения.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается пространственное гиперзвуковое стационарное течение вязкого газа около затупленного тела. Течение газа в ударном слое описывается на основе системы уравнений ПВУС [5], которая содержит все члены полной системы уравнений Навье – Стокса вплоть до  $O(Re^{-1/2})$ . Данная система уравнений, рассматриваемая в ортогональной системе координат, нормально связанной с поверхностью тела ( $x$  – длина образующей контура тела,  $y$  – расстояние по нормали до поверхности тела,  $\varphi$  – меридиональный угол, отсчитываемый от плоскости растекания), имеет вид [6]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (H_2 \rho u) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (H_1 \rho w) + \frac{\partial}{\partial y} (H_1 H_2 \rho v) = 0 \\ & \rho \left[ Du - \frac{w^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{uw}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} + \frac{uv}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right] = \\ & = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{H_1^2 H_2 Re_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[ H_1^3 H_2 \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{H_1} \right) \right] \\ & \rho \left[ Dw + \frac{wu}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{u^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} + \frac{wv}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial y} \right] = \\ & = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_1 H_2^2 Re_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[ H_1 H_2^3 \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{w}{H_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\rho \left[ Dv - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} u^2 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial y} w^2 \right] = - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\rho DH = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{H_1 H_2 \mu}{\sigma \text{Re}_\infty} \left[ \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{V_\infty^2 (\sigma - 1)}{2H_\infty} \frac{\partial(u^2 + w^2)}{\partial y} - \frac{\sigma u^2 V_\infty^2}{H_\infty H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\sigma w^2 V_\infty^2}{H_\infty H_2} \frac{\partial H_2}{\partial y} \right] \right\}$$

$$D = \frac{u}{H_1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{w}{H_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad H = h + \frac{V_\infty^2}{2H_\infty} (u^2 + w^2 + v^2),$$

$$h = \frac{\gamma P V_\infty^2}{(\gamma - 1) \rho H_\infty}$$

$$\text{Re}_\infty = \rho_\infty V_\infty R(0) / \mu_\infty, \quad H_1 = 1 + y \kappa(x), \quad H_2 = r_w(x) + y \cos \alpha(x)$$

Здесь  $u, w, v$  — физические компоненты вектора скорости по направлениям,  $x, \varphi, y$  соответственно,  $R(x, \varphi)$  — радиус кривизны поверхности тела,  $\text{Re}_\infty$  — число Рейнольдса,  $\kappa(x, \varphi) = 1/R(x, \varphi)$  — кривизна поверхности тела,  $\sigma$  — число Прандтля,  $\alpha$  — угол наклона образующей тела,  $H_\infty$  — полная энтальпия набегающего потока.

Величины приведены к безразмерному виду следующим образом: компоненты вектора скорости отнесены к скорости набегающего потока  $V_\infty$ , давление  $P$  — к  $\rho_\infty V_\infty^2$ , полная энтальпия  $H$  — к  $H_\infty$ , величины, имеющие размерность длины, — к радиусу затупления  $R(0)$ .

В случае совершенного газа коэффициент вязкости  $\mu$  считается известной функцией абсолютной температуры  $T$ . В расчетах использовался либо закон Сюзерленда, либо степенной закон.

Система уравнений (1.1) замыкается следующими граничными условиями. На ударной волне, которая предельным переходом заменяется поверхностью сильного разрыва, ставятся обобщенные условия Ренкина — Гюгонио [7], которые в системе координат  $(x, \varphi, y)$  имеют вид [6]:

$$v_s = u_s \text{tg} \beta_s + w_s \text{tg} \gamma_s + K_s V_\infty \quad (3)$$

$$P_s = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \frac{V_\infty^2(3)(1 - K_s)}{1 + \text{tg}^2 \beta_s + \text{tg}^2 \gamma_s}$$

$$u_s = V_\infty(1) \cos^2 \beta_s - \frac{w_s}{2} \sin 2\beta_s \text{tg} \gamma_s - \frac{K_s}{2} V_\infty(3) \sin 2\beta_s +$$

$$+ \frac{\mu_s}{\text{Re}_\infty V_\infty(3)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right)_s \quad (1.2)$$

$$w_s = V_\infty(2) \cos^2 \gamma_s - \frac{u_s}{2} \sin 2\gamma_s \text{tg} \beta_s - \frac{K_s}{2} V_\infty(3) \sin 2\gamma_s +$$

$$+ \frac{\mu_s}{\text{Re}_\infty V_\infty(3)} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{w}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial y} \right)_s$$

$$H_s = 1 + \frac{\mu_s}{\sigma \text{Re}_\infty V_\infty(3)} \left( \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{V_\infty^2 (\sigma - 1)}{2H_\infty} \frac{\partial(u^2 + w^2)}{\partial y} - \frac{\sigma u^2 V_\infty^2}{H_\infty H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\sigma w^2 V_\infty^2}{H_\infty H_2} \frac{\partial H_2}{\partial y} \right)_s$$

$$\operatorname{tg} \beta_s = \frac{1}{H_{1s}} \frac{\partial y_s}{\partial x}, \quad \operatorname{tg} \gamma_s = \frac{1}{H_{2s}} \frac{\partial y_s}{\partial \varphi}, \quad K_s = \frac{1}{\rho_s}$$

Индекс  $s$  означает, что значение величины берется за поверхностью ударной волны,  $V_\infty(i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – компоненты вектора скорости набегающего потока в системе координат  $(x, \varphi, y)$ ,  $\beta_s, \gamma_s$  – углы наклона между поверхностью ударной волны и поверхностью тела,  $y_s = y_s(x, \varphi)$  – отход ударной волны.

В качестве граничных условий на поверхности тела задаются условия прилипания, непротекания и охлаждаемой стенки:

$$u(x, \varphi, 0) = w(x, \varphi, 0) = v(x, \varphi, 0) = 0, \quad H(x, \varphi, 0) = H_w^0 \quad (1.3)$$

Индекс  $w$  означает, что величина берется на поверхности тела.

Задача решается в области между поверхностями тела и отошедшей ударной волны:  $0 \leq x \leq x_f$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq y_s$ . На поверхности  $x = x_f$  ставятся "мягкие" граничные условия.

**2. Метод малого параметра.** Как уже было отмечено выше, использование численных методов при моделировании трехмерных потоков около затупленных тел может приводить к потере точности в случае малых углов атаки [2]. Действительно, пусть некоторое затупленное осесимметричное тело помещено в потоке вязкого газа под малым углом атаки  $\epsilon$ . В системе координат  $(x, \varphi, y)$  коэффициент подъемной силы без учета сил вязкого трения будет таким:

$$C_y \sim \int_0^{2\pi} \int_0^{x_f} P_w \cos \alpha \cos \varphi r_w dx d\varphi \quad (2.1)$$

где  $\alpha$  – угол наклона образующей к оси тела. Линеаризуя давление по малому параметру  $\epsilon$  и раскладывая поправку к давлению в ряд Фурье, получим

$$C_y \sim \epsilon \int_0^{x_f} P_w^{(1)} \cos \alpha r_w dx d\varphi \quad (2.2)$$

Из последнего соотношения следует, что относительная ошибка в величине  $C_y$  пропорциональна не относительной ошибке в давлении  $P_w$ , а относительной ошибке в коэффициенте ряда Фурье  $P_w^{(1)}$ :

$$\Delta P^{(1)}/P^{(1)} \sim \epsilon^{-1} \Delta P/P \quad (2.3)$$

Соотношение (2.3) объясняет известный факт, что при использовании трехмерных численных методов решения задач аэродинамики тел вращения при малых углах атаки относительная точность в определении подъемной силы намного меньше, чем относительная точность в определении силы сопротивления, причем при уменьшении угла атаки эта ситуация усугубляется.

Применение ММП позволяет избежать трудностей, указанных выше. Кроме того, данный метод обладает еще рядом преимуществ. Использование ММП может дать эффективные результаты для следующих классов задач: 1) нахождение течения около осесимметричного тела, обтекаемого под небольшим углом атаки [1–3, 6], 2) определение течения около тела, несильно отличающегося от тела вращения [4]. Традиционный как для первого, так и для второго класса задач прием разложения возмущений в формальные ряды Фурье, позволяет свести обе задачи по существу к одной. Решению этих классов задач посвящена данная работа.

Для удобства численного решения перейдем к новым независимым переменным:  $\xi = x$ ,  $\eta = y/y_s$ ,  $\nu = \varphi$ ,  $y_s = y_s(x, \varphi)$  – отход ударной волны. Заметим, что области определения трехмерного и осесимметричного решений различаются. Такая замена переменных приводит к тому, что эти области формально совпадают.

Сущность ММП состоит в том, что пространственное решение представляется в виде суммы осесимметричного решения и некоторого малого возмущения, имеющего линейный характер. При этом все основные нелинейные эффекты в трехмерном решении относятся к осесимметричной его составляющей, а несимметричность в пространственном решении учитывается через малые возмущения, имеющие линейный характер. Таким образом, искомое решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} F(\xi, \nu, n) &= F_0(\xi, n) + \epsilon \delta F(\xi, \nu, n) + o(\epsilon) \\ w(\xi, \nu, n) &= \epsilon \delta w(\xi, \nu, n) + o(\epsilon) \\ r_w(\xi, \nu) &= r_{0w}(\xi) + \epsilon \delta r_w(\xi, \nu) + o(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Нулевым индексом обозначены соответствующие величины в осесимметричном решении,  $\epsilon$  — малый параметр, характеризующий степень неосесимметричности течения, которым может быть либо угол атаки, либо параметр, указывающий степень отличия тела от тела вращения,  $w$  — меридиональная составляющая вектора скорости,  $F$  — остальные искомые функции,  $r_w$  — уравнение поверхности тела.

Разложим возмущения в ряды Фурье по меридиональной координате  $\nu$ . Искомые функции будут коэффициенты гармоник Фурье в разложениях возмущений в формальные ряды по угловой переменной  $\nu$ . Таким образом

$$\begin{aligned} \delta F(\xi, \nu, n) &= F^{(0)}(\xi, n) + \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(\xi, n) \cos k\nu \\ \delta w(\xi, \nu, n) &= \sum_{k=1}^{\infty} w^{(k)}(\xi, n) \sin k\nu \\ \delta r_w(\xi, \nu) &= r_w^{(0)}(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} r_w^{(k)}(\xi) \cos k\nu \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь сразу было учтено, что функции  $F = (P, \rho, H, u, v, w, y_s, r_w)$  четны по  $\nu$ , а функция  $w$  нечетна по  $\nu$  в силу симметрии задачи относительно плоскости  $\nu = 0$ .

В разложении (2.4) более высокие члены по  $\epsilon$  не рассматриваются, так как аэродинамические силы и моменты зависят лишь от коэффициентов  $F_0$  и  $F^{(1)}$  в разложениях (2.4)–(2.5), в силу чего рассматривать квадратичные члены разложения (2.4) нецелесообразно, тем более, что их учет дает поправку 1 – 3% по сравнению с линейным случаем [1].

Следует заметить, что использование рядов (2.5) эффективно только в тех случаях, когда первые члены рядов (2.5) при фиксированных  $\xi$  и  $n$  быстро убывают с ростом номера гармоники  $k$ , что и обеспечивает их применимость для практических целей. В случае обтекания осесимметричного тела под углом атаки, где малым параметром  $\epsilon$  является угол атаки, ряды (2.5) содержат лишь один член, соответствующий  $k = 1$  [1, 3]. В случае обтекания тела, слабо отличающегося от осесимметричного под нулевым углом атаки, все члены рядов (2.5) являются ненулевыми. Для эффективного использования рядов (2.5) в последнем случае необходимо, чтобы поверхность тела  $r_w(\xi, \nu)$  принадлежала классу периодичности  $\tilde{C}^{(m)}$ , причем, чем больше  $m$ , тем быстрее убывают члены ряда Фурье (2.5) с ростом номера гармоники  $k$ , а именно их скорость убывания равна  $o(k^{-m})$ . Принадлежность к классу периодичности  $\tilde{C}^{(m)}$  означает [8]: 1) функция  $f(\nu)$  — непрерывна на отрезке  $[-\pi, \pi]$  вместе со своими производными вплоть до  $m$ -х включительно, 2)  $f(-\pi + 0) = f(\pi - 0)$ .

Подставляя разложение вида (2.4), (2.5) в систему уравнений ПВУС (1.1) и в граничные условия (1.2), (1.3), выделяя члены  $O(\Gamma)$  и  $O(\epsilon)$ , получаем, что пространственная система уравнений разбивается на совокупность двумерных систем уравнений:

осесимметричную систему и ряд независимых линейных систем с двумя независимыми переменными для определения коэффициентов при первых гармониках газодинамических величин.

Действительно, представим систему уравнений ПВУС (1.1) в виде

$$A \frac{\partial U}{\partial \xi} + B \frac{\partial U}{\partial n} + C \frac{\partial U}{\partial v} + F = D \frac{\partial U}{\partial n^2}, \quad U = [\rho, u, w, v, H]^T \quad (2.6)$$

Применяя ММП к системе (2.6). А именно, представляем матрицы  $A, B, C, D$  и векторы  $U$  и  $F$  в виде (2.4)–(2.5). Данные выражения подставляем в (2.6). После выделения членов  $O(I)$  и  $O(\epsilon)$  получаем, что пространственная система уравнений сводится к совокупности двумерных систем уравнений:

$$A_0 \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + B_0 \frac{\partial U_0}{\partial n} + F_0 = D_0 \frac{\partial^2 U_0}{\partial n^2} \quad (2.7)$$

$$A_0 \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} + B_0 \frac{\partial U^{(k)}}{\partial n} + F_0^{(k)} = D_0 \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial n^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

$$U^{(k)} = (\rho^{(k)}, u^{(k)}, w^{(k)}, v^{(k)}, H^{(k)})^T$$

где  $U^{(k)}$  – коэффициенты гармоник Фурье,  $A_0, B_0, D_0$  – матрицы, соответствующие осесимметричной системе уравнений, нулевому индексу соответствует осесимметричное решение. Аналогичную процедуру проделываем и для граничных условий.

В качестве искоемых величин будем рассматривать коэффициенты гармоник Фурье для линейных возмущений.

Корректное применение ММП в случае задачи пространственного обтекания затупленных тел предполагает [2]: 1) непрерывную дифференцируемость газодинамических величин по малому параметру  $\epsilon$ , в окрестности  $\epsilon = 0$ , 2) эквивалентность осесимметричного и трехмерного решений в том смысле, что они должны обладать одной и той же системой особенностей (ударных волн, контактных разрывов и т.д.), 3) применимость разложения (2.4) для осесимметричных тел под углами атаки накладывает следующее ограничение на малый параметр  $\epsilon$ :

$$\epsilon |z/r_w + \partial r_w / \partial z| \ll 1$$

где  $z$  – осевая координата (указано В.И. Ливинским), а для тела, слабо отличающегося от осесимметричного:  $\epsilon \ll 1$ .

Проведение пространственного расчета обтекания тела с заданной геометрией и при заданных параметрах набегающего потока, при использовании подхода описанного выше, позволяет найти сразу целое однопараметрическое семейство решений с параметром  $\epsilon$ , которым является либо угол атаки, либо параметр, отвечающий за степень отличия тела от тела вращения.

**3. Метод глобальных итераций.** После применения ММП трехмерная система уравнений ПВУС (1.1) свелась к совокупности двумерных систем: к осесимметричной системе (2.7) и к ряду независимых систем уравнений для определения коэффициентов при первых гармониках газодинамических величин (2.8).

Было показано [9], что осесимметричная система уравнений ПВУС (2.7) проявляет эллиптические свойства в дозвуковых областях течения, в частности, вблизи поверхности тела, и, как следствие этого, невозможно непосредственное применение какого-либо маршевого по переменной  $\xi$  метода решения данной задачи. В случае решения осесимметричной системы уравнений использовался подход, описанный ранее [10].

Совокупность систем уравнений для определения коэффициентов гармоник Фурье (2.8) по своим основным свойствам совпадает с системой уравнений ПВУС в осесим-

метричном случае (2.7), в силу того, что полностью совпадают матрицы  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $D_0$  в системах уравнений (2.7) и (2.8), определяющие тип систем уравнений.

В связи с этим при решении систем уравнений для коэффициентов гармоник Фурье применялся подход, основанный на проведении глобальных итераций. Для этого производную  $\partial P^{(k)}/\partial \xi$  в уравнении количества движения в проекции на касательную к телу представим в виде

$$\partial P^{(k)}/\partial \xi = \alpha_T (\partial P^{(k)}/\partial \xi)^{(m)} + (1 - \alpha_T) (\partial P_g^{(k)}/\partial \xi)^{(m)} \quad (3.1)$$

Расчет текущей  $m$ -й глобальной итерации осуществляется при заданном поле  $P_g^{(k)}$  и заданном коэффициенте гармоники Фурье угла наклона ударной волны  $\beta_s^{(k)}$ , которые получаются на основе расчета предыдущей глобальной итерации. Коэффициенты Фурье поля давления и наклона ударной волны к поверхности тела для следующей  $m + 1$  глобальной итерации определяются из релаксационных соотношений

$$\begin{aligned} (P_g^{(k)})^{(m+1)} &= \tau_p (P^{(k)})^{(m)} + (1 - \tau_p) (P_g^{(k)})^{(m)} \\ (\beta_s^{(k)})^{(m+1)} &= \tau_s (\beta_s^{(k)})_T + (1 - \tau_s) (\beta_s^{(k)})^{(m)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $(\beta_s^{(k)})_T$  и  $(P^{(k)})^{(m)}$  — соответственно коэффициенты Фурье угла наклона ударной волны и давления, полученные в результате расчета  $m$ -й глобальной итерации,  $\tau_p$  и  $\tau_s$  — релаксационные параметры.

В отличие от принятого ранее [10] был предложен новый метод расчета ударной волны на затуплении. А именно, фурье-образ угла наклона ударной волны на текущей глобальной итерации находился не из баланса массы [10], а из граничного условия Ренкина — Гюгонио для фурье-образа нормальной компоненты вектора скорости  $v_s^{(k)}$ . Для линейных по углу атаки поправок к осесимметричному решению интегральный закон сохранения массы выполняется тождественно и никакой дополнительной информации не дает. Заметим, что такой подход к расчету ударной волны является принципиальным в пространственном случае, так как при решении трехмерной задачи не ясно, как соотношение баланса массы можно применить для нахождения положения ударной волны, а подход, описанный выше, позволяет преодолеть эту трудность.

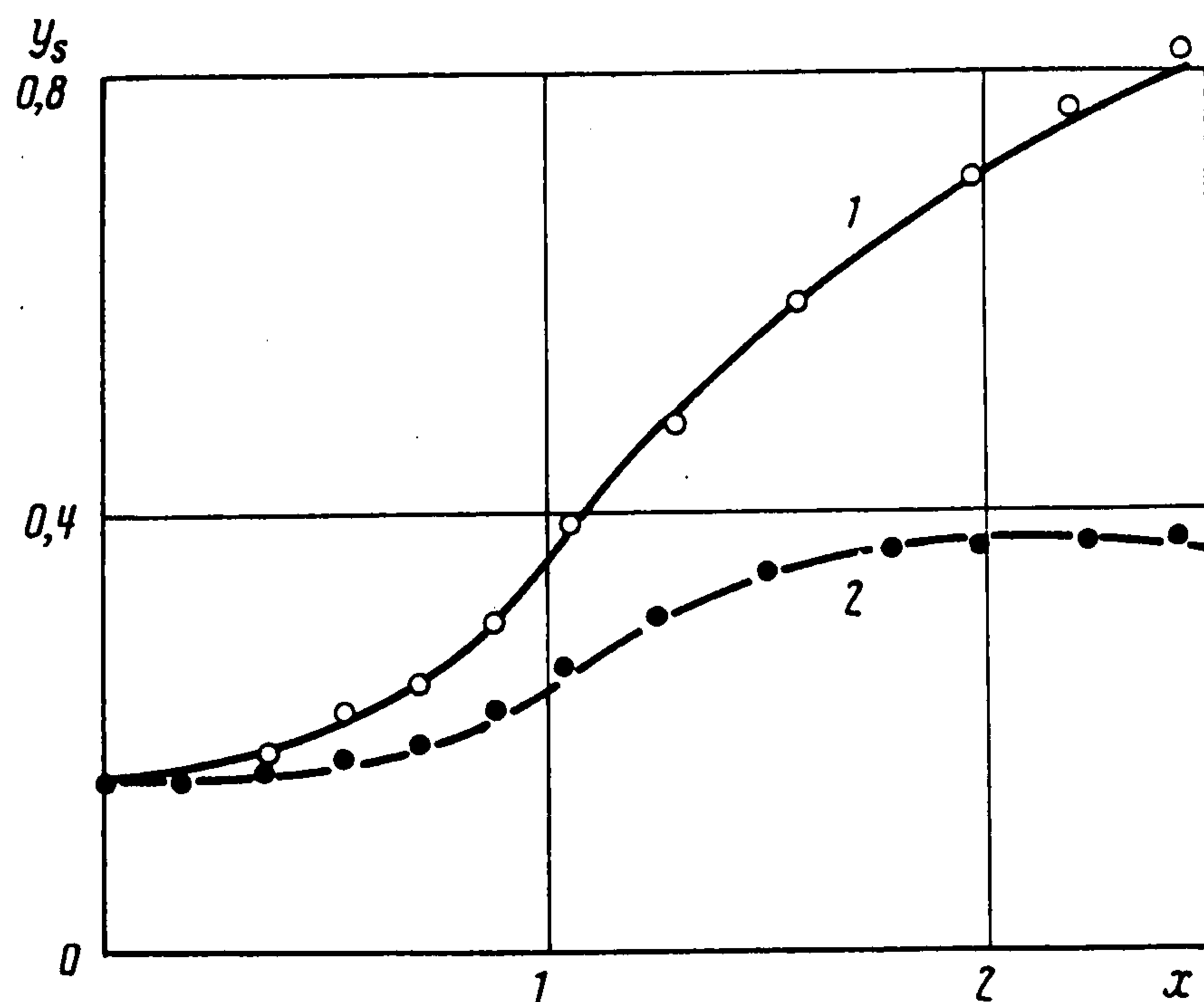
Производные в (3.1) необходимо аппроксимировать разностными выражениями таким образом, чтобы учитывалось при проведении итераций распространение возмущений вверх по потоку в дозвуковых областях течения. Для этого применялась аппроксимация разностями назад в первом слагаемом и разностями вперед во втором слагаемом в выражении (3.1).

При решении смешанной задачи для коэффициентов гармоник Фурье использовался численный метод, основанный на применении разностной схемы, имеющей первый порядок аппроксимации по продольной к телу координате и четвертый порядок — по поперечной.

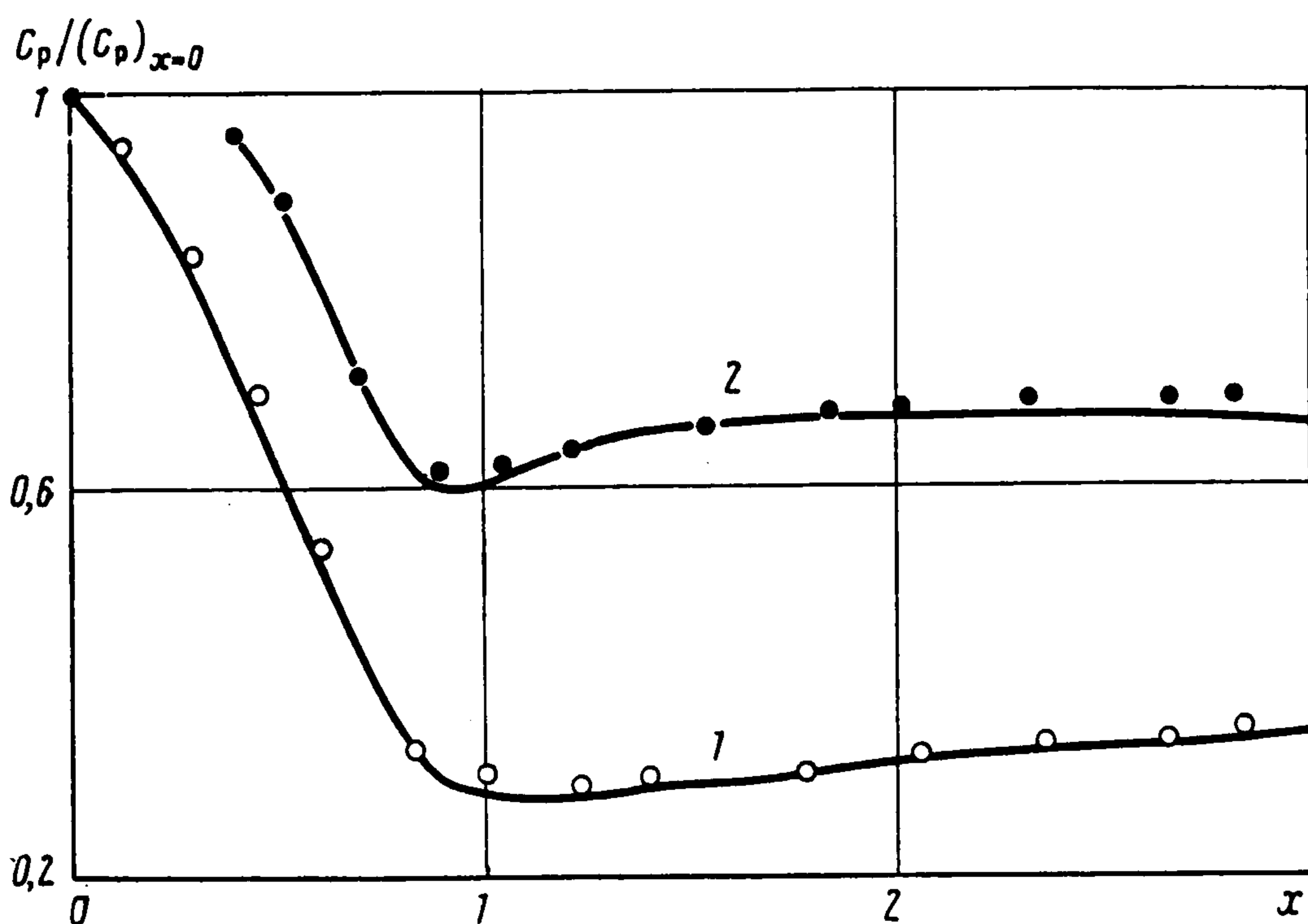
Для расчета течений с большими градиентами потока (при больших числах Рейнольдса) использовалась адаптивная по  $n$  сетка, шаг сетки выбирался в каждой точке в зависимости от первой и второй производной продольной составляющей вектора скорости  $u$  по координате  $n$  [11]. Это позволило проводить расчеты в широком диапазоне чисел Рейнольдса ( $10^2 \leq Re_\infty \leq 10^7$ ), который охватывает режимы течения от полностью вязкого ударного слоя до невязкого ударного слоя с тонким пограничным слоем около тела.

**4. Результаты расчетов.** При помощи описанного выше алгоритма были проведены следующие расчеты: 1) обтекание затупленных по сфере конусов под небольшими углами атаки  $5^\circ - 10^\circ$ , 2) численное моделирование течения около длинного затупленного по сфере биконуса под малым углом атаки, 3) обтекание эллиптического конуса под нулевым углом атаки.

В случае затупленного конуса при умеренных углах атаки в разложении (2.5) ненулевым является лишь член, соответствующий  $k = 1$  [1, 3]. В силу этого для нахождения пространственного



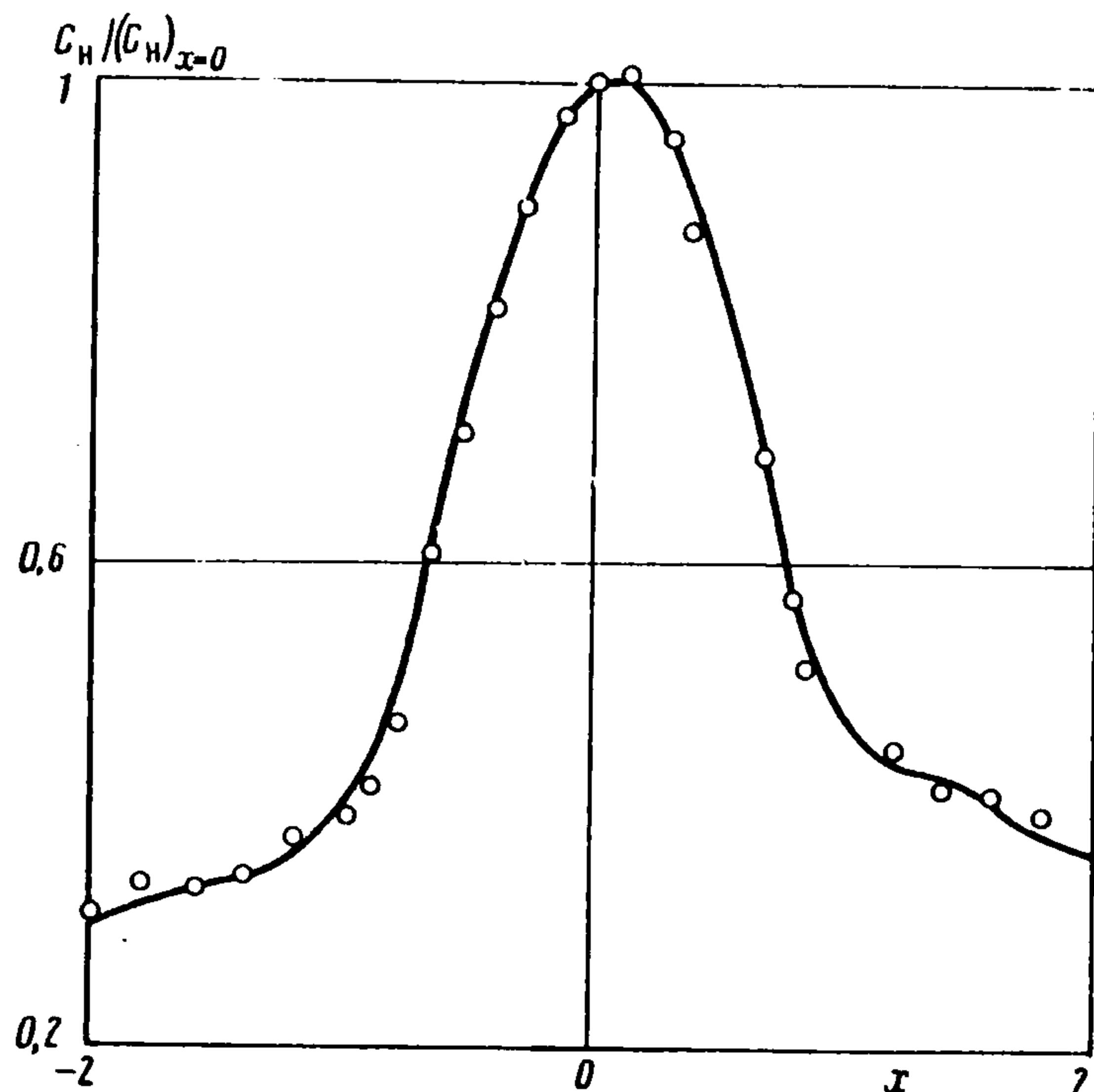
Фиг. 1



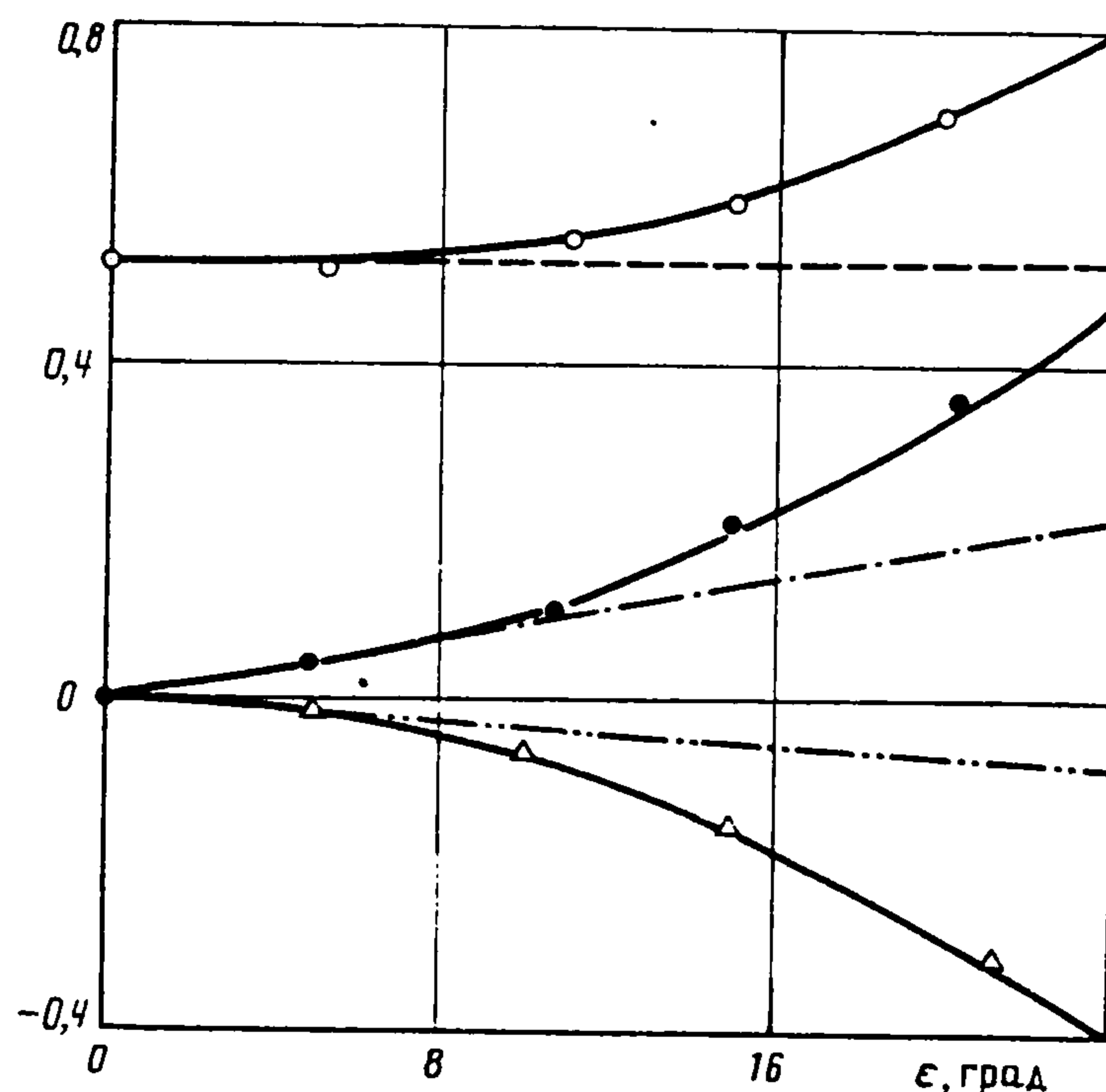
Фиг. 2

течения решались две двумерные задачи. На фиг 1–3 приведено сравнение расчетов с результатами эксперимента [12] для подветренной ( $\varphi = 0$ , кривые 1) и для наветренной ( $\varphi = \pi$ , кривые 2) сторон конуса. Расчетная сетка составляла  $35 \times 31$  узлов, где первое число соответствует координате  $n$ . На фиг. 1 представлены данные по отходу ударной волны при следующих входных параметрах:  $Re_\infty = 3,95 \cdot 10^4$ ,  $H_w = 0,701$  – температурный фактор,  $M_\infty = 5,9$  – число Маха,  $T_\infty = 53,7$  К,  $\theta_c = 25^\circ$  – угол полураствора конуса,  $\epsilon = 10^\circ$  – угол атаки. На фиг. 2 представлены данные по распределению давления при  $Re_\infty = 3,95 \cdot 10^4$ ,  $M_\infty = 5,8$ ,  $T_w = 300$  К,  $T_0 = 428$  К – температура торможения,  $\epsilon = 8^\circ$ ,  $\theta_c = 40^\circ$ . На фиг. 3 приведены данные по нормированному коэффициенту теплопередачи:  $C_H = 2\mu\sigma^{-1}Re_\infty^{-1}\partial h/\partial y|_w$  при  $Re_\infty = 1,3 \cdot 10^5$ ,  $H_w = 0,316$ ,  $M_\infty = 10,33$ ,  $T_\infty = 46,82$  К,  $\theta_c = 45^\circ$ ,  $\epsilon = 5^\circ$ .

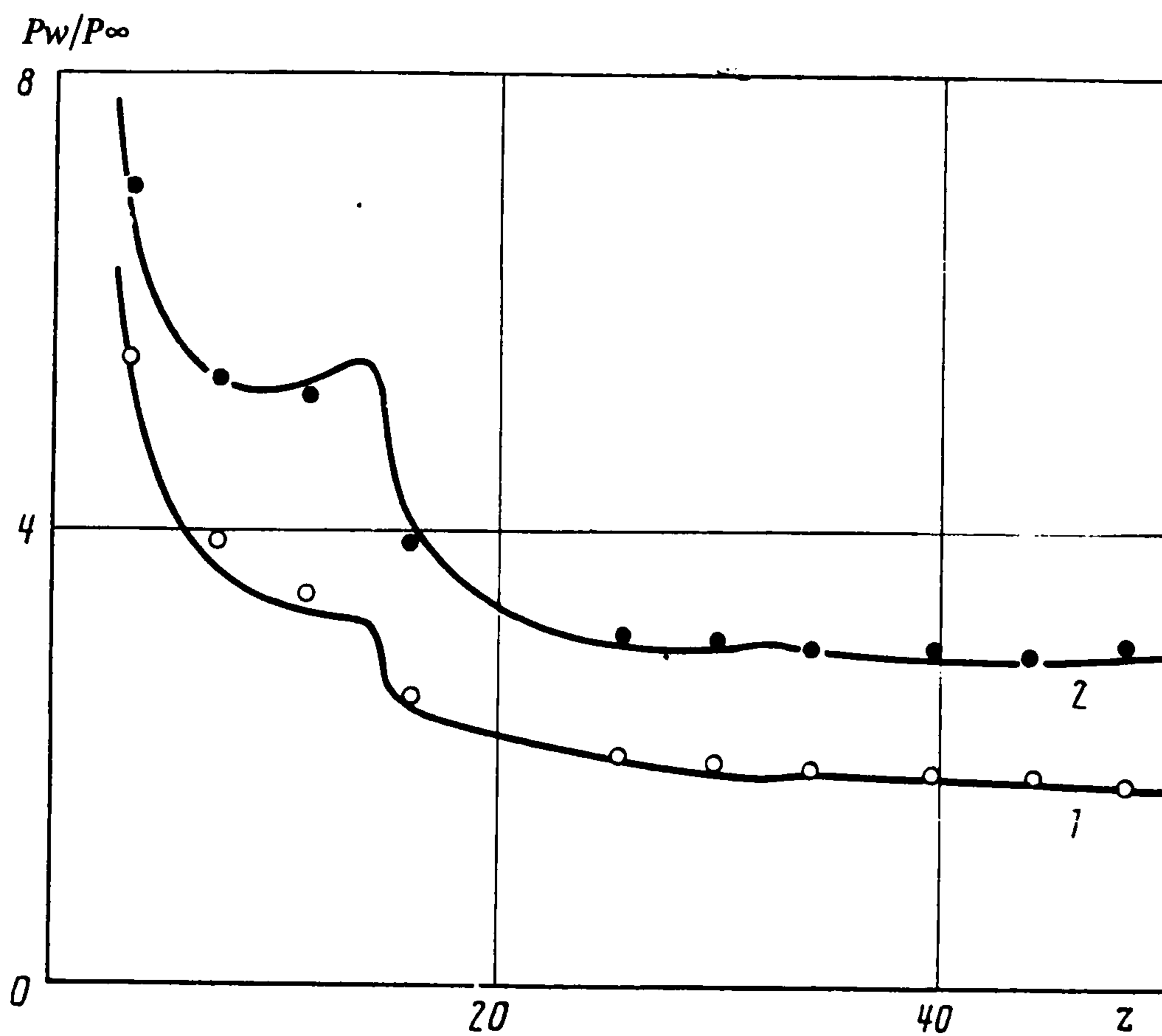
На фиг. 4 приведены зависимости коэффициентов лобового сопротивления  $C_x$  (штриховая линия), подъемной силы  $C_y$  (штрихпунктир) и момента тангажа  $M_z$  (штрих–две точки) от угла атаки  $\epsilon$ , полученные настоящим методом для затупленного по сфере конуса, при  $Re_\infty = 4,1 \cdot 10^3$ ,  $M_\infty = 13$ ,  $H_w = 0,27$ ,  $\sigma = 0,72$ ,  $p = 0,75$  – показатель степени в законе для вязкости,  $\theta_c = 5^\circ$ ,  $L = 6,98$  – длина конуса в радиусах затупления. Сплошные линии соответствуют расчету [13], а точки – экспериментальным данным [14, 15]. Как было отмечено выше, корректное применение ММП накладывает в данном случае следующее ограничение на величину угла атаки:  $\epsilon \ll 5^\circ$ . Однако, как видно из



Фиг. 3



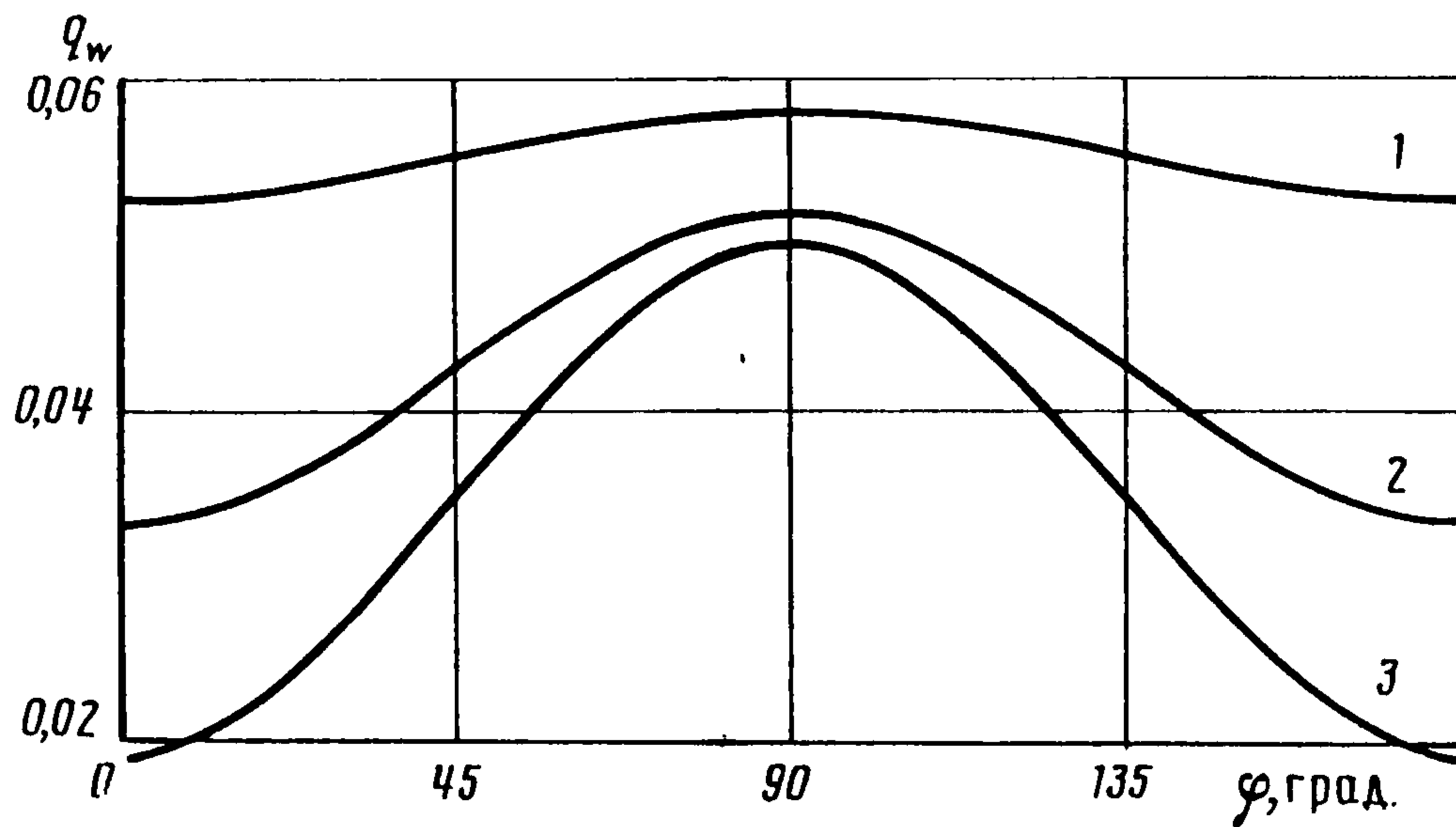
Фиг. 4



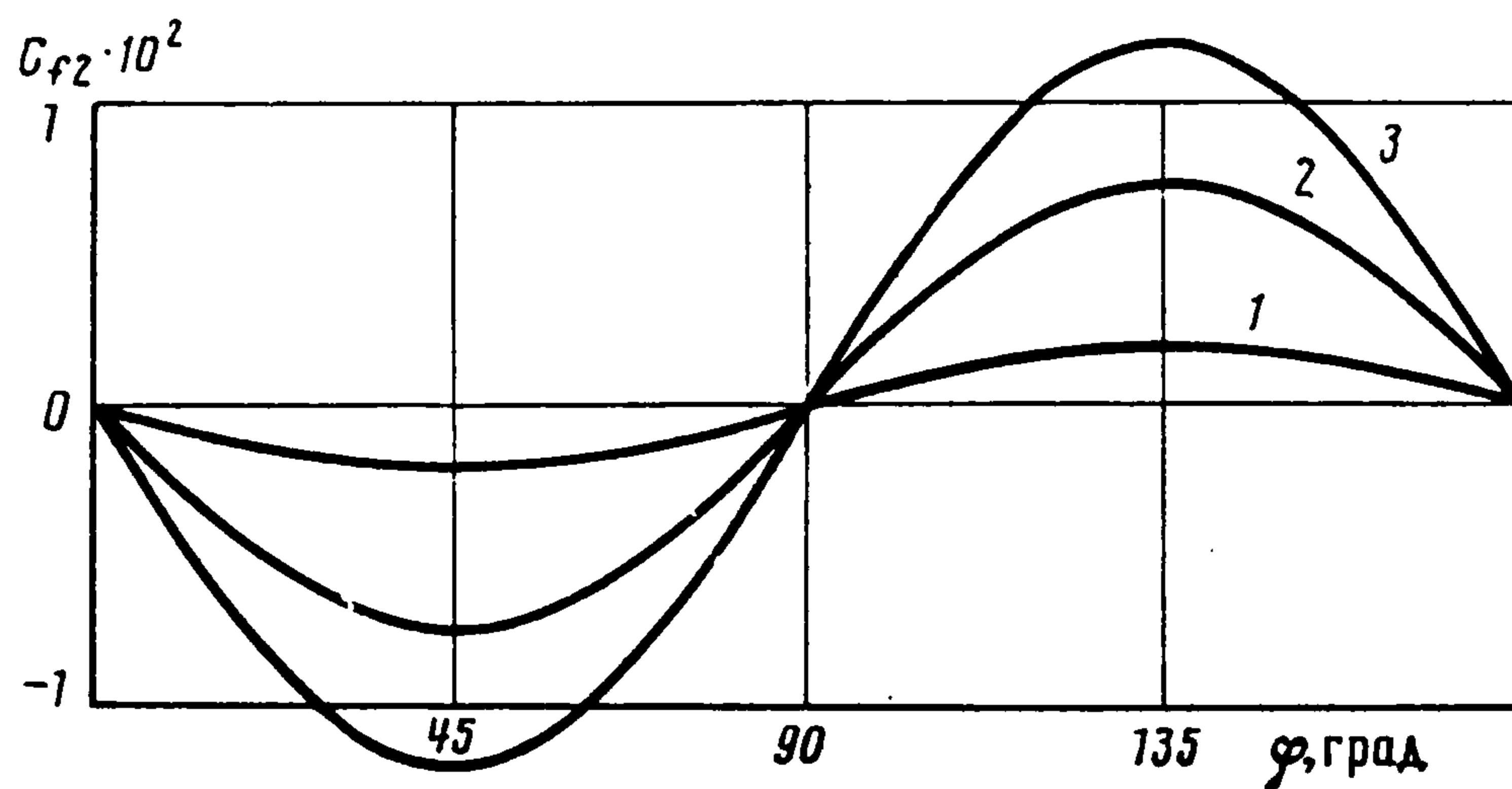
Фиг. 5

сравнения, имеет место хорошее совпадение с результатами эксперимента вплоть до углов атаки около  $10^\circ$ . Это указывает на то, что для интегральных характеристик ММП справедлив в более широком диапазоне, чем следовало бы ожидать из теоретических оценок.

Для моделирования течения около затупленного по сфере длинного (более 50 радиусов затупления) биконуса под углом атаки  $2^\circ$  применялся следующий блочно-маршевый способ реализации метода. Вся расчетная область разбивалась на взаимопересекающиеся блоки, расчет каждого блока проводился посредством применения метода глобальных итераций. Взаимопересечение блоков вводилось для учета передачи возмущений вверх по потоку в дозвуковых областях течения. Размеры дозвуковых областей могут существенно меняться на разных участках тела. Применение блочно-маршевого метода позволяет значительным образом сократить общее время счета, так как для каждого блока имеет место свое число глобальных итераций, необходимых для сходимости. В окрестности точки сопряжения конусов проводилось сглаживание разрыва угла образующей биконуса. Данное сглаживание было незначительным и распространялось на 4–5 узлов расчетной сетки по



Фиг. 6



Фиг. 7

направлению  $\xi$ . В этом расчете проводилась адаптация сетки не только в нормальном, но и в продольном к телу направлениях, что позволило более точно рассчитывать окрестность точки сопряжения конусов. Расчетная сетка составляла  $35 \times 119$  узлов.

На фиг. 5 приведено сравнение с результатами эксперимента [16] по распределению давления на теле, как для наветренной (кривая 2), так и для подветренной (кривая 1) сторон биконуса. Расчет проводился при  $Re_\infty = 3,5 \cdot 10^4$ ,  $M_\infty = 10,1$ ,  $T_\infty = 49,3$  К,  $H_w = 0,705$ ,  $z_c = 14,81$  — точка сопряжения конусов,  $\theta_{c1} = 9,33^\circ$ ,  $\theta_{c2} = 5^\circ$ ,  $\epsilon = 2^\circ$ . Систематическое отличие около 2–3% по величине давления на конце биконуса объясняется тем, что на решение начинают влиять квадратичные члены по  $\epsilon$  в разложении (2.4), которые не учитывались в этом подходе.

В случае обтекания затупленного по сфере эллиптического конуса в качестве малого параметра выбиралась величина  $\epsilon = 1 - \sin \theta_1 / \sin \theta_0$  ( $\theta_1 < \theta_0$ ). Поверхность эллиптического конуса задавалась следующим образом:

$$r_w(x, \varphi) = \left( \frac{\sin^2 \varphi}{r_{0w}^2(x)} + \frac{\cos^2 \varphi}{r_{1w}^2(x)} \right)^{-1/2} \quad (4.1)$$

$$r_{0w}(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq x_0, x_0 = \pi - \theta_0 \\ \cos \theta_0 + \sin \theta_0 (x - x_0), & x > x_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$r_{1w}(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq x_0 \\ \cos \theta_0 + \sin \theta_1 (x - x_0), & x > x_0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Чтобы обеспечить плавный переход со сферического затупления на поверхность эллиптического конуса, разрыв угла образующей в (4.3) сглаживался. Линеаризуя (4.1) по малому параметру  $\epsilon$ , а затем разлагая полученные возмущения в ряды Фурье, получим, что ненулевыми будут всего лишь два члена ряда Фурье (2.5), соответствующие  $k = 0, 2$ . Тем самым поверхность эллиптического кону-

са заменяется поверхностью, которая имеет следующий вид:

$$r_w(x, \varphi) = r_{0w}(x) + \epsilon(x - x_0) \sin \theta_0 (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi) + O(\epsilon^2)$$

В данном случае пространственная задача по определению течения около эллиптического конуса свелась к решению осесимметричной задачи (по нахождению течения около кругового конуса) и двух двумерных задач по определению гармоник Фурье газодинамических величин. Расчет течения газа проводился при  $Re_\infty = 10^3$ ,  $H_w = 0,1$ ,  $T_\infty = 200$  К,  $M_\infty = 15$ ,  $\theta_0 = 30^\circ$ . На фиг. 6 и 7 приведены тепловой поток  $-q_w = \mu \sigma^{-1} Re_\infty^{-1} \partial H / \partial y|_w$  и коэффициент трения  $C_{f2} = 2\mu Re_\infty^{-1} \partial w / \partial y|_w$  в трех сечениях по  $x$ :  $x_1 = 1,388$ ,  $x_2 = 1,976$ ,  $x_3 = 2,671$ . Все результаты по эллиптическому конусу приведены для случая  $\epsilon = 0,3$ .

Как видно из приведенных выше сравнений, корректное применение описанного выше подхода позволяет получать результаты с хорошей точностью и в широком диапазоне параметров набегающего потока, а также дает возможность найти однопараметрическое семейство решений, где параметром является либо угол атаки, либо параметр, отвечающий за степень отличия тела от тела вращения. Все это показывает эффективность предлагаемого подхода.

В заключение следует отметить, что требуемое вычислительное время при самых различных значениях  $Re_\infty$  от  $10^2$  до  $10^7$  изменялось незначительным образом и составляло 20–30 мин на IBM PC/AT-386.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Карякин В.Е.* Расчет сверхзвукового обтекания тел вращения вязким газом при малых углах атаки // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1981. Т. 21. № 1. С. 150–156.
2. *Ливинский В.И.* Применение метода малого параметра к решению задач обтекания тел сверхзвуковым потоком газа: Препринт № 167. М., Ин-т прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР. 1984. 19 с.
3. *Васильев М.М.* Обтекание конуса сверхзвуковым потоком газа под углом атаки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 1. С. 33–39.
4. *Скиба Г.Г., Федотов Б.Н.* Метод расчета аэродинамических коэффициентов некоторых объемных тел с произвольным поперечным сечением // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 6. С. 92–98.
5. *Davis R.T.* Numerical solution of the hypersonic viscous shocklayer equations // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 5. P. 843–851.
6. *Утюжников С.В., Ямалеев Н.К.* Применение метода малого параметра к задаче пространственного обтекания затупленных конусов под малыми углами атаки потоком вязкого газа // Моделирование процессов обработки информации и управления, М.: Изд. МФТИ. 1990. С. 142–147.
7. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
8. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.
9. *Утюжников С.В.* Метод глобальных итераций для решения уравнений вязкого ударного слоя // Математические методы управления и обработки информации. М.: Изд. МФТИ, 1985. С. 141–145.
10. *Васильевский С.А., Тирский Г.А., Утюжников С.В.* Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // Ж. вычисл. математики и мат. физ. 1987. Т. 27. № 5. С. 741–750.
11. *Дуайер Х.А.* Адаптация сеток для задач гидродинамики // Аэрокосмическая техника. 1985. Т. 3. № 8. С. 172–181.
12. *Kumar A., Graves R.A.* Numerical solution of the viscous hypersonic flow past blunted cones at small angle of attack // AIAA Paper. 1977. № 172. 9 p.
13. *Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Черный С.Г.* Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, 1990. 246 с.
14. *Киселев В.Я.* Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик простых тел в гиперзвуковой трубе при  $M_\infty \approx 23$  // Сб. докл. 3-й Всесоюз. школы по методам аэрофиз. исследований. Новосибирск: Изд. Ин-та теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1982. С. 111–113.
15. *Красильщиков А.П., Носов В.В.* Результаты систематических экспериментальных исследований аэродинамических характеристик круговых конусов в вязком гиперзвуковом потоке // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1341. 29 с.
16. *Maune A.W.* Calculation of the laminar viscous shock layer on a blunt biconic body at incidence to supersonic and hypersonic flow // AIAA Paper. 1977. № 88. 6 p.