

УДК 532.5:534.1

© 1992 г. А.А. Буров, О.С. Рыжов

## О ВОЗНИКНОВЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПУЛЬСАЦИЙ НА РАННЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ РАЗВИТИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРИСТЕНОЧНОЙ СТРУЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается уравнение Кортевега – де Вриза, которое описывает нелинейное распространение возмущений в пристеночной струе несжимаемой жидкости, истекающей из щели в плоском экране. При учете собственных колебаний стенки уравнение становится неоднородным. Если внешнее воздействие задано в форме бегущей волны, то в аналогичном виде можно искать частное решение неоднородного уравнения. В результате возникает простейшая задача теории динамических систем в гамильтоновой формулировке. Как обычно, из анализа отображения Пуанкаре выводится существование гомоклинической структуры в окрестности сепаратрис. Среди траекторий, принадлежащих гомоклинической структуре на секущей плоскости, имеются такие, свойства которых формулируются в терминах детерминированного хаоса. Отсюда следует принципиально важное заключение о двойной роли солитонов в нелинейной стадии волнового движения жидкости: с одной стороны, они служат зародышами крупных когерентных структур, с другой стороны – дают начало стохастическим пульсациям.

Пусть плоская струя вязкой несжимаемой жидкости истекает из отверстия в экране в пространство, где покоится жидкость с аналогичными физическими свойствами. Будем считать, что перпендикулярно экрану расположена жесткая стенка, ограничивающая струю снизу. Для простоты в качестве стенки возьмем пластинку, расстояние от передней кромки до рассматриваемой на ее поверхности точки примем за характерную длину. Совместим пластинку с осью  $y'$  декартовой системы безразмерных координат  $x', y'$ . В силу условия прилипания на поверхности пластинки обе составляющие  $u'$  и  $v'$  вектора скорости, отнесенные к максимальной скорости частиц в струе, обращаются в нуль. При приближении к внешнему краю  $y' \rightarrow \infty$  струи скорость также стремится к нулю. Вся толща струи представляет собой своеобразный пограничный слой.

Аналогичные движения вязкой жидкости реализуются на вращающемся диске [1], а также вблизи подогреваемой вертикальной пластинки [2], в последнем случае жидкость всплывает кверху под действием силы тяжести. Были указаны особенности, возникающие в поле скоростей в окрестности кромок жестких поверхностей [3], изучены стационарный отрыв струи и последующее развитие зоны рециркуляционного течения [4]. Проанализирована устойчивость построенных ранее [1, 2] движений жидкости по отношению к длинноволновым возмущениям [5].

Результаты, которые относятся к тонкой структуре поля скоростей, были получены [3–5] в рамках современной теории пограничного слоя, находящегося в условиях свободного взаимодействия с невязким потоком. Эта теория основана на разложении искомых функций в асимптотические последовательности по степеням малого параметра  $\epsilon = R^{-1/4}$ , где число Рейнольдса  $R \rightarrow \infty$ . В прилегающем к обтекаемой стенке вязком подслое избыточное давление  $p'$ , отсчитываемое от давления в окружающем струю пространстве и отнесенное к удвоенному скоростному напору, имеет порядок  $\epsilon^4$ , а продольная  $u'$  и поперечная  $v'$  составляющие безразмерного вектора скорости оцениваются посредством  $\epsilon^3$  и  $\epsilon^5$  соответственно. В результате задача сводится к интегрированию уравнений Прандтля, в которых градиент самоиндуцированного давления подлежит определению совместно с полем скоростей. Замыкает задачу связь между избыточным давлением и толщиной вытеснения  $-A'$ , входящей также в граничное условие на внешнем краю  $y' \rightarrow \infty$  пристеночного подслоя.

Ситуация кардинальным образом меняется, когда безразмерное избыточное давление становится по порядку величины больше, чем  $\epsilon^4$ , что влечет соответствующее увеличение оценок продольной и поперечной составляющих скорости возмущенного течения. Была развита [6] и затем рассматривалась [7, 8] асимптотическая теория для волн с возросшей амплитудой, опирающаяся на преж-

нее предположение  $R \rightarrow \infty$ . Ее основной вывод сводится к тому, что пристеночная область струи в свою очередь расслаивается на два подслоя с существенно различными свойствами. В верхнем из образовавшихся подслоев роль вязких тангенциальных напряжений пренебрежимо мала, поэтому из уравнений Прандтля здесь выпадает член с  $\partial^2 u' / \partial y'^2$ . Упрощенная таким образом система уравнений допускает простой интеграл, удовлетворяющий всем граничным условиям задачи, если толщина вытеснения определяется уравнением Кортвега – де Вриза (КдВ). Последнее однородно для стенки с исходным положением  $y' \approx 0$ , однако учет собственных колебаний стенки в форме  $y' \approx y'_w = h'(t', x')$  приводит к неоднородному уравнению КдВ.

Способом нормированной системы единиц, где для независимых переменных и искомых функций используются прежние обозначения с опущенным штрихом в качестве верхнего индекса, имеем [6–8]

$$\frac{\partial A_h}{\partial t} + A_h \frac{\partial A_h}{\partial x} = \frac{\partial^3 A_h}{\partial x^3} - f_0(t, x)$$

$$p = - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad A_h = h + A, \quad f_0 = \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \quad (1)$$

Внешнее возмущение удобно взять в виде  $f_0 = B_0 f(\nu t, \alpha x)$ , указав явно амплитуду  $B_0$ , а также частотный и волновой параметры  $\nu$  и  $\alpha$ . Совершим замену  $t \rightarrow \nu^{-1} t$ ,  $x \rightarrow \alpha^{-1} x$  независимых переменных и введем новую искомую функцию  $A_h \rightarrow \alpha^2 A_h$ , тогда из (1) получим уравнение

$$\omega \frac{\partial A_h}{\partial t} + A_h \frac{\partial A_h}{\partial x} = \frac{\partial^3 A_h}{\partial x^3} - Bf(t, x) \quad (2)$$

куда входят только две положительные постоянные:  $\omega = \nu / \alpha^3$  и  $B = B_0 / \alpha^5$ .

Рассмотрим стенку, которая находится под воздействием волны, распространяющейся вдоль нее в направлении истечения струи. В этом простейшем случае можно считать, что  $f = f(\xi)$ ,  $\xi = x - t$ , и искать решение уравнения (2) также в виде бегущей волны  $A_h = F(\xi)$ . В результате однократного интегрирования определяющего  $F$  обыкновенного дифференциального уравнения находим

$$d^2 F / d\xi^2 + \omega F - \frac{1}{2} F^2 = C + BI(\xi), \quad I = \int f(\xi) d\xi \quad (3)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Это уравнение вынужденных колебаний нелинейного осциллятора с квадратичной восстанавливающей силой, поскольку член с  $dF/d\xi$  отсутствует, диссипации энергии во время работы осциллятора не происходит. Перепишем (3) в виде системы канонических уравнений

$$\begin{aligned} dF/d\xi &= \partial H / \partial P = P \\ dP/d\xi &= - \partial H / \partial F = \frac{1}{2} F^2 - \omega F + C + BI(\xi) \end{aligned} \quad (4)$$

в которой используется функция Гамильтона

$$H = H_0(F, P) + BH_1(F, \xi) = \frac{1}{2} P^2 - \frac{1}{6} F^3 + \frac{1}{2} \omega F^2 - CF + BFI(\xi)$$

Теперь можно использовать известные результаты современной теории колебаний, обратившись прежде всего к предельному случаю  $B \rightarrow 0$ . Для простоты примем, что волна, которая бежит вдоль стенки с прилегающей к ней струей жидкости, является гармонической, ей соответствует функция  $I = \sin \xi$ .

Начнем с фазового портрета системы (4) при  $B = 0$ . В этом случае функция Гамильтона не зависит явно от  $\xi$ , поэтому система (4) допускает первый интеграл  $H_0(F, P) = \text{const}$  и, как видно из фигуры, характеризуется двумя положениями равновесия:  $F = F_0(\xi, 0)$ ,  $P = P_0(\xi, 0)$  и  $F = F_\pi(\xi, 0)$ ,  $P = P_\pi(\xi, 0)$ , изображаемыми особыми точками

$$F_0 \approx \omega - \sqrt{\omega^2 - 2C}, \quad P_0 = 0 \quad (5)$$

$$F_{\pi} = \omega + \sqrt{\omega^2 - 2C}, P_{\pi} = 0 \quad (6)$$

Их существование обусловлено неравенством  $\omega^2 > 2C$ , которое предполагается выполненным. Окружающие центр  $C$  замкнутые траектории представляют периодические решения исходного уравнения КдВ, петля с сепаратрисами седла  $S$  — солитоны, распространяющиеся вдоль струи по положительному фону  $F_{\pi} = \omega + \sqrt{\omega^2 - 2C}, P_{\pi} = 0$  при любом значении постоянной  $C$ . Уравнение сепаратрис в параметрическом виде получается из известного соотношения, задающего форму солитона  $F = F_{\text{sol}}(\xi, 0), P = P_{\text{sol}}(\xi, 0)$ . Согласно, например, [10] имеем

$$\begin{aligned} F_{\text{sol}} &= F_{\pi} - 3\sqrt{\omega^2 - 2C} \operatorname{ch}^{-2} \eta \\ P_{\text{sol}} &= 3(\omega^2 - 2C)^{3/4} \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch}^{-3} \eta, \quad \eta = (\omega^2 - 2C)^{1/4} \xi/2 \end{aligned} \quad (7)$$

Основной интерес заключается в ответе на вопрос, какие движения могут возникать в системе (4) и, в частности, что происходит с сепаратрисами седловой точки при  $B \neq 0$ .

Наиболее просто формулируются результаты, относящиеся к окрестности центра  $C$ . Согласно теореме Пуанкаре [11], при достаточно малых значениях параметра  $B$  существует семейство периодических решений  $F = F_0(\xi, B), P = P_0(\xi, B)$  системы уравнений (4), аналитически зависящее от этого параметра и переходящее при  $B = 0$  в решение (5) при условии, что

$$(\omega^2 - 2C)^{1/4} \neq j, \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (8)$$

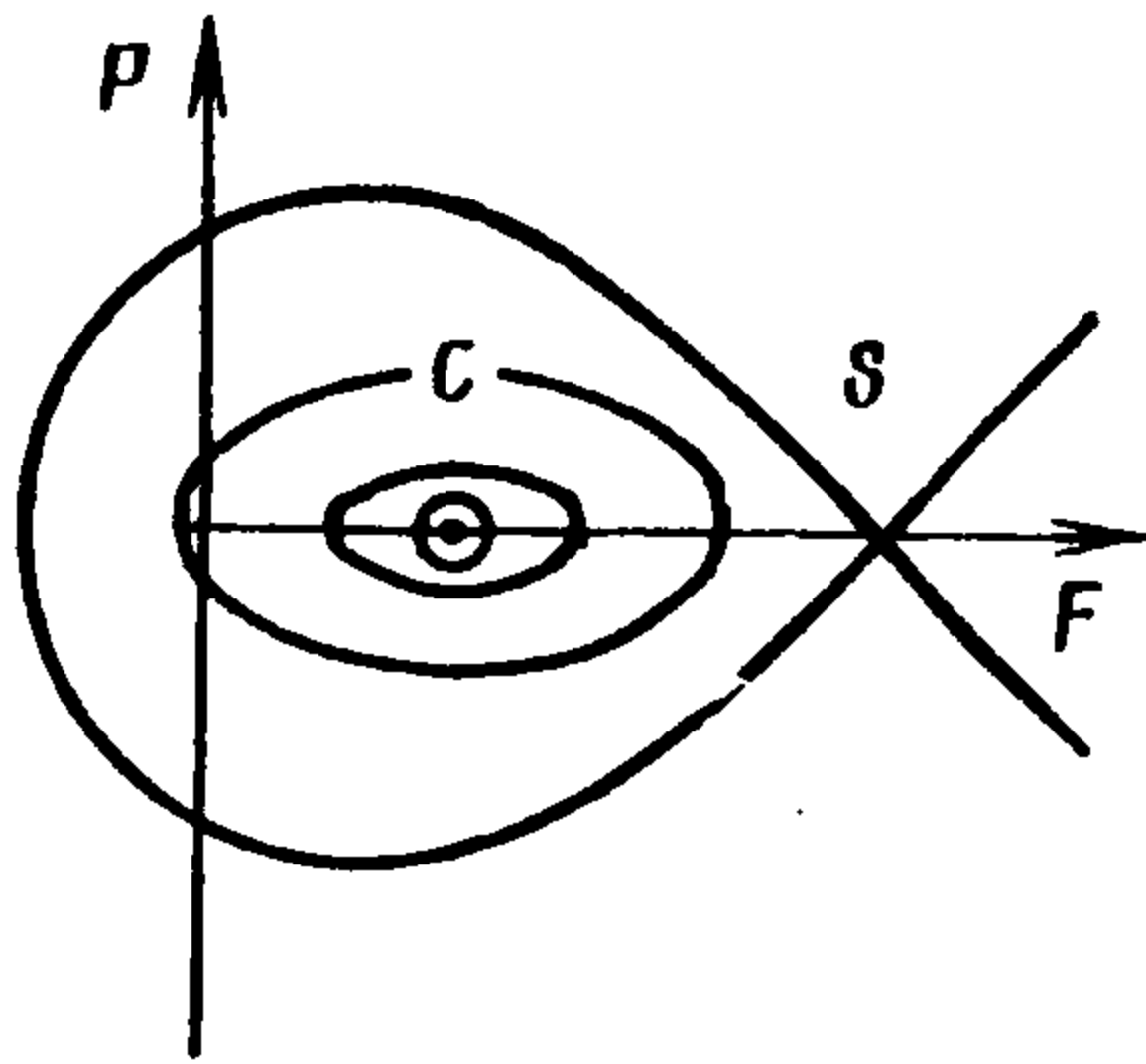
В рассматриваемом случае протекающие в системе процессы фактически являются слабо нелинейными; применительно к исходной пристеночной струе жидкости они реализуются в бегущих вдоль нее волнах малой амплитуды. Условие (8) служит для исключения резонансов.

Аналогичные результаты имеют место также для окрестности седловой точки  $S$ . Опираясь на цитированную выше теорему Пуанкаре, можно утверждать, что возникающее при достаточно малых значениях параметра  $B$  семейство периодических решений  $F = F_{\pi}(\xi, B), P = P_{\pi}(\xi, B)$  аналитически зависит от этого параметра и переходит при  $B = 0$  в решение (6). Поскольку нелинейный член  $\frac{1}{2}F^2$  в правой части второго из уравнений (4) оказывает определяющее влияние на ход всего процесса, дополнительные условия типа (8), исключающие существование резонансов, отсутствуют. Указанные периодические решения описывают пульсации, развивающиеся на неустойчивом фоне (6). Для исходного уравнения КдВ этот фон представляет предельное состояние струек, достигаемое ими в результате роста толщины вытеснения.

Выясним теперь, что происходит с сепаратрисами седловой точки, когда параметр  $B$  отличен от нуля, но сохраняется достаточно малым. Как отмечалось выше, при  $B = 0$  петля интегральных кривых с сепаратрисами седла служит изображением солитонов уравнения КдВ. Таким образом, введение в систему (4) внешней периодической силы позволяет указать состояния, в которые может переходить солитон под воздействием волны, бегущей вдоль ограничивающей струю стенки.

До сих пор явно не использовался тот факт, что одна из сепаратрис в окрестности седла  $S$  устойчива, другая — неустойчива (локально под устойчивой подразумевается сепаратриса, входящая в  $S$ , когда  $\xi \rightarrow \infty$ , под неустойчивой — исходящая из  $S$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ ). Обозначим первую через  $\Lambda_s$ , другую посредством  $\Lambda_u$  и будем различать в каждой из них по две ветви:  $\Lambda_s^+, \Lambda_s^-$  и  $\Lambda_u^+, \Lambda_u^-$  в соответствии с положением этих ветвей в верхней или нижней полуплоскостях фазовой плоскости  $F, P$  (см. фигуру). Образующие петлю продолжения ветвей  $\Lambda_s^+$  и  $\Lambda_u^-$  даются одним и тем же решением (7), т.е. фактически совпадают между собой. Саму седловую точку можно трактовать как неустойчивое состояние равновесия гиперболического типа. Тогда при достаточно малых значениях  $B$  периодические решения  $F = F_{\pi}(\xi, B), P = P_{\pi}(\xi, B)$  будут также гиперболическими. В трехмерном фазовом пространстве  $\xi, F, P$  сепаратрисы становятся инвариантными поверхностями  $W_s(B)$  и  $W_u(B)$ . По первой из них траектории (инте-

графальные кривые) стремятся к периодическому движению, по второй уходят от него, когда  $\xi \rightarrow \infty$ . При  $B = 0$  обе поверхности  $W_s(B)$  и  $W_u(B)$  сливаются и превращаются в одну цилиндрическую поверхность, форму которой можно получить, пропустив



через каждую точку петли сепаратрис, состоящей из ветвей  $\Lambda_s^+$  и  $\Lambda_u^-$  вместе с их продолжениями, образующую параллельно оси  $\xi$ . Взаимное положение поверхностей  $W_s(B)$  и  $W_u(B)$  с  $B \neq 0$  определяет возможные классы решений  $F = F_{sol}(\xi, B)$ ,  $P = P_{sol}(\xi, B)$ .

Мера расстояния между рассматриваемыми устойчивым и неустойчивым многообразиями задается функцией Мельникова [12]

$$J(\varphi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ H_0[F_{sol}(\xi), P_{sol}(\xi)], H_1\left[\xi + \frac{\varphi_0}{\omega}, F_{sol}(\xi)\right] \right\} d\xi$$

где фигурные скобки означают, как обычно, канонические скобки Пуассона. Применительно к системе уравнений (4) прямыми вычислениями находим

$$\begin{aligned} J(\varphi_0) &= 3 \sqrt{\omega^2 - 2C} \cos \varphi_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh } \eta}{\text{ch}^3 \eta} \sin \frac{2\eta}{(\omega^2 - 2C)^{1/4}} d\eta = \\ &= 12\pi \frac{\text{sh } \pi(\omega^2 - 2C)^{-1/4}}{\text{ch } 2\pi(\omega^2 - 2C)^{-1/4} - 1} \cos \varphi_0 \end{aligned}$$

Равенство  $\cos \varphi_0 = 0$  фиксирует простые изолированные нули  $\varphi_0 = (n + \frac{1}{2})\pi$  ( $n = \dots -1, 0, 1, \dots$ ) функции Мельникова. Отсюда следует, что при  $B \neq 0$  устойчивая  $W_s(B)$  и неустойчивая  $W_u(B)$  поверхности расщепляются, пересекаются, а система уравнений (4) не имеет первого интеграла, аналитически зависящего от  $\xi$  и фазовых переменных  $F, P$ .

Полезно сформулировать полученные результаты в терминах отображения Пуанкаре, находя зависимость координат точек  $(F, P)$  на секущей плоскости  $\xi = 2\pi(n+1)$  как функцию координат  $(F, P)$  на плоскости  $\xi = 2\pi n$ . Все плоскости  $\xi = \text{const}$ , образованные таким образом, сдвинуты на целое число периодов возмущающей силы, будем поэтому отождествлять их друг с другом. Отсюда следует возможность говорить о точечном отображении плоскости  $\xi = \text{const}$  на себя. Сечение поверхностей  $W_s(B)$  и  $W_u(B)$  рассматриваемой плоскостью  $\xi \bmod 2\pi = \text{const}$  дает кривые, образующиеся в результате последовательного применения отображения, эти кривые также принято называть сепаратрисами [13]. Устойчивая и неустойчивая сепаратрисы имеют счетное множество общих точек. Эти точки пересечения сепаратрис на секущей плоскости принадлежат двоякоасимптотическим траекториям, названным Пуанкаре гомоклиническими. Их окрестность, для обозначения которой используется термин гомоклиническая структура, содержит бесконечное разнообразие траекторий и определяет поэтому очень сложную динамику рассматриваемой системы, несмотря на ее относительно простой вид. Для исследования нелинейных колебаний в этой области характерны методы изучения стохастических процессов. Анализ таких колебаний в терминах символической динамики был развит в [14].

Укажем основные следствия. Простейшие ограниченные решения системы (4) представляют периодические интегралы с циклом, величина которого кратна периоду воз-

мушающей силы; их существование вытекает из изложенного выше. Среди ограниченных имеются также аperiodические решения в них фазовые переменные  $F, P$  изменяются в фиксированных пределах, зависящих от амплитуды  $B$  возмущающей силы. Упомянутые двоякоасимптотические решения принадлежат этому множеству, двум таким решениям соответствуют орбиты, при движении вдоль которых точка с координатами  $F = F(\xi), P = P(\xi)$  совершает единственный полный оборот при изменении  $\xi$  от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Система (4) допускает различные типы неограниченных интегралов. Среди них существуют такие, которые неограниченно растут при  $\xi \rightarrow -\infty$ , но ограничены при  $\xi \rightarrow \infty$ , причем интервал изменения  $F, P$  при достаточно больших значениях  $\xi$  остается конечным для неасимптотических движений и становится малым для асимптотических движений, если  $B \rightarrow 0$ . В противоположность им имеются интегралы, ограниченные при  $\xi \rightarrow -\infty$ , но неограниченно возрастающие при  $\xi \rightarrow \infty$ , в них фазовые переменные  $F, P$  изменяются в интервале, остающемся конечным для неасимптотических движений и становящемся малым для асимптотических движений в пределах  $B \rightarrow 0$ . Наконец, система (4) обладает неограниченными при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  решениями, в которых  $F, P$  совершают колебания в конечных пределах на любом наперед заданном достаточно большом отрезке  $\xi$ .

Кроме того, полный анализ траекторий, принадлежащих гомоклинической структуре на секущей плоскости  $\xi \bmod 2\pi = \text{const}$ , ведет к принципиально важному заключению о развитии динамики, которая получила название детерминированного хаоса. Чтобы пояснить основные свойства орбит, входящих в эту весьма сложную динамику, фиксируем точность в задании начальных условий для системы (4). Тогда можно указать множество таких условий, которые совпадают с принятой точностью между собой и определяют решения уравнений (4), различающиеся не только количественно, но и качественно. Ясно, что поведение соответствующих им орбит в трехмерном фазовом пространстве  $\xi, F, P$  будет случайным.

Воспользуемся теперь установленными свойствами решений гамильтоновой системы, чтобы описать волновые движения, которые могут возникать в струе несжимаемой жидкости, если ограничивающая ее снизу стенка совершает гармонические колебания. Основной вывод состоит в том, что, как только возмущения вступают в существенно нелинейную стадию своего развития, в них формируются крупные упорядоченные структуры, определяемые солитонами уравнения КдВ. Разрушение этих структур под воздействием осциллирующей пластинки сопровождается зарождением различных, более сложных форм движения, в частности случайных пульсаций. Последние возникают в недрах ламинарного течения в результате дальнейшего естественного развития нелинейных процессов, приводящих к сильному искажению исходных волн Толлмина — Шлихтинга. Таким образом, появление в записи сигналов на реальных осциллограммах узких всплесков сравнительно большой амплитуды служит предвестником начала стахастизации полей возмущений. Характерно, что случайные компоненты в движении жидкости возникают очень рано, их последующее усиление ведет к переходу ламинарного потока в турбулентный. С другой стороны, возможно формирование новых упорядоченных структур, которые чрезвычайно близки к солитонам, если амплитуда возмущающих колебаний стремится к нулю.

Родственными чертами характеризуется усиление широкополосного шума в результате его нелинейного взаимодействия с первоначально монохроматической волной Толлмина — Шлихтинга. Эксперименты с пограничным слоем Блазиуса на плоской пластинке, помещенной в поток несжимаемой жидкости, были выполнены недавно [15]. В этом случае распространение возмущений в существенно нелинейной стадии, которая соответствует рассмотренной в изложенном выше анализе, подчиняется интегродифференциальному уравнению Бенджамина — Оно [6, 7]. В принятых обозначениях вместо (1) имеем

$$\frac{\partial A_n}{\partial t} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A_n}{X - x} dX - f_0(t, x) \quad (9)$$

$$A_n = h + A, f_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 h / \partial X^2}{X - x} dX$$

Как и прежде, внешнее возмущение запишем посредством  $f_0 = B_0 f(\nu t, \alpha x)$  с указанными явно амплитудой  $B_0$ , а также частотным и волновым параметрами  $\nu$  и  $\alpha$ . Совершив замену  $t \rightarrow \nu^{-1} t, x \rightarrow \alpha^{-1} x$  независимых переменных и введя новую искомую функцию  $A_n \rightarrow \alpha A_n$ , получим из (9) стандартное уравнение

$$\omega \frac{\partial A_n}{\partial t} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A_n / \partial X^2}{X - x} dX - Bf(t, x)$$

куда входят две положительные постоянные:  $\omega = \nu / \alpha^2$  и  $B = B_0 / \alpha^3$ . Пусть  $f = f(\xi)$ ,  $\xi = x - t$ , тогда решение последнего уравнения будем искать также в виде бегущей волны  $A_n = F(\xi)$ . В результате однократного интегрирования определяющего  $F$  уравнения находим

$$\frac{1}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta - \omega F + \frac{1}{2} F^2 = C - BI(\xi), I = \int f(\xi) d\xi \quad (10)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\xi} \frac{d\xi}{\zeta - \xi} = \pm i\pi e^{i\xi}$$

можно считать, что функция  $I = \sin \xi$ .

Уравнение (10) было успешно применено для объяснения природы упоминавшихся выше коротких всплесков большой амплитуды на осциллограммах периодических пульсаций, порождаемых в несжимаемом пограничном слое Блазиуса гармоническим по времени источником [16]. В пределе периодические решения дают солитоны, как это имело место для уравнения КдВ. Поэтому уравнение (10) можно использовать для изучения возможных форм движений, возникающих при разрушении алгебраических солитонов Бенджамина — Оно. По-видимому, оно дает также математическую модель, поиск которой обсуждался [15] в связи с развитием хаотических пульсаций под воздействием широкополосного шума на волну Толлмина — Шлихтинга в нелинейной стадии роста амплитуды. Однако предлагаемая модель значительно сложнее составлявшей основу выполненного анализа, так как она не сводится к гамильтоновой системе уравнений из-за интегрального члена в левой части (10). Последние экспериментальные данные [17] свидетельствуют в пользу близости (в качественном отношении) нелинейных процессов в пристеночной струе и пограничном слое Блазиуса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Von Kármán Th. Über laminare und turbulente Reibung // ZAMM. 1921. Bd. 1. Ht. 4. S. 233–252.
2. Von Schmidt E., Beckmann W. Das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld vor einer Wärme abgebenden senkrechten Platte bei natürlicher Konvektion // Forsch. aus dem Gebiete des Ingenieurwesens. Tech. Mech. und Therm. 1930. Bd. 1. № 10. S. 341–349; № 11. S. 391–406.
3. Messiter A.F., Linnán A. The vertical plate in laminar free convection: Effects of leading and trailing edges and discontinuous temperature // ZAMP. 1976. V. 27. № 5. S. 633–651.
4. Smith F.T., Duck P.W. Separation of jets or thermal boundary layers from a wall // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1977. V. 30. Pt. 2. P. 143–156.
5. Рыжов О.С. Неустойчивость распространяющейся вдоль стенки струи вязкой жидкости // ПМТФ. 1982. № 2. С. 26–33.
6. Жук В.И., Рыжов О.С. О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 1. С. 56–59.
7. Smith F.T., Burggraf O.R. On the development of large-sized short-scaled disturbances in boundary layers // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1985. V. 399. № 1876. P. 25–55.
8. Жук В.И., Попов С.П. О нелинейном развитии длинноволновых невязких возмущений в пограничном слое // ПМТФ. 1989. № 3. С. 101–108.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Физматгиз, 1958. 206 с.
10. Drazin P.G. Solitons. Cambridge Univ. Press, 1983. 136 P.

11. *Poincaré H.* Les Méthodes Nouvelles de la mécanique celeste. Т. 3. Paris: Gauthier – Villars, 1957. 414 P.
12. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. матем. об-ва. 1963. Т. 12. С. 3–52.
13. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
14. *Алексеев В.М.* Символическая динамика // Тр. 11-й летней математической школы. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. 210 с.
15. *Gaster M.* The nonlinear phase of wave growth leading to chaos and breakdown to turbulence in a boundary layer as an example of an open system // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1990. V. 430. № 430. 1878. P. 3–24.
16. *Рыжов О.С.* Об образовании упорядоченных вихревых структур из неустойчивых колебаний в пограничном слое // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30. № 12. С. 1804–1814.
17. *Дрыганец С.В., Качанов Ю.С., Левченко В.Я., Рамазанов М.П.* Резонансная стохастизация течения в К-режиме перехода пограничного слоя // ПМТФ. 1990. № 2. С. 83–94.

Москва

Поступила в редакцию  
11.XI.1991