Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 6, 1992

УДК (531.36+539.3):534.1

© 1992 г. Л.Д. Акуленко

КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО УПРУГИЙ ЭЛЕМЕНТ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Исследуются движения гибридной (дискретно-континуальной) системы, состоящей из несущего твердого тела и прикрепленного к нему упругого элемента с распределенными параметрами. Рассматриваются два типа крепления: 1) оба конца защемлены и 2) один из концов защемлен, а другой свободен. Получена замкнутая система интегродифференциальных уравнений, описывающая состояние объекта при произвольных начальных условиях и силах, приложенных к телу. Асимптотическими методами исследуется возмущенное движение твердого тела в случае квазилинейной возвращающей силы. Движения изучаются как при наличии внутреннего резонанса между колебаниями тела и собственными колебаниями элемента, так и при его отсутствии; обнаружены качественные эффекты.

1. Постановка задачи. Исследуются одноосные движения (вдоль оси OX) гибридной (дискретно-континуальной) системы, схематически представленной на фигуре. Здесь O – начало отсчета неподвижной (инерциальной) системы координат, s – координата твердого тела, с которым связана подвижная система ox. К несущему телу прикреплен упругий элемент с распределенными параметрами (брус или пружина); граничные условия закрепления обсуждаются ниже. Пусть заданы произвольные начальные условия движения – значения координаты и скорости твердого тела, а также распределения смещений и скоростей упругого звена и некоторый фиксированный момент времени t_0. Требуется исследовать движение твердого тела и относительные движения элемента под действием приложенной к телу сосредоточенной силы P, внешней по отношению к системе и зависящей от времени t и фазовых переменных s, $s^{\cdot}$.

Чтобы не загромождать изложение, будем считать, что линейная плотность ρ и жесткость на сжатие σ постоянны (см. замечание в конце разд. 2). Предполагая деформации достаточно малыми, выпишем уравнение состояния для упругого элемента [1]

$$\rho u^{\cdot\cdot} = \sigma u'' - \rho s^{\cdot\cdot}, \quad u = u(t, x), \quad 0 < x < l \tag{1.1}$$

Здесь u – относительное упругое смещение сечения x, $0 \leqslant x \leqslant l$ в момент времени t, $t \geqslant t_0$. Рассмотрим граничные условия двух типов: 1) оба конца упругого элемента защемлены

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \qquad t \geqslant t_0 \tag{1.2}$$

и 2) один из концов, для определенности левый, защемлен, а правый свободен

$$u(t, 0) = u'(t, l) = 0, \qquad t \geqslant t_0 \tag{1.3}$$

Если правый конец защемлен, а левый свободен ($u'(t, 0) = u(t, l) = 0$), то этот случай приведется к (1.3) заменой $x = l - y$, $l \geqslant y \geqslant 0$. Задача определения неизвестной $u = u(t, x)$ будет замкнутой, если движение $s = s(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция известна и заданы начальные распределения $u(t_0, x)$, $u^{\cdot}(t_0, x)$:

$$u(t_0, x) = f(x), \qquad u^{\cdot}(t_0, x) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{1.4}$$

где f, g – достаточно гладкие функции из определенного класса [1, 2]. В случае краевых условий (1.2) функции $f(x)$, $g(x)$ должны обращаться в нуль при $x = 0, l$; для случая условий (1.3) – только при $x = 0$.

Неизвестная $s = s(t)$ может быть найдена путем совместного решения краевой задачи (1.1)–(1.3) с начальными условиями (1.4) и задачи Коши для интегродифференциального уравнения, описывающей движение центра масс системы (уравнения типа Ньютона)

$$
\begin{aligned}
& ms^{\cdot\cdot} + \int_0^l \rho[s^{\cdot\cdot} + u^{\cdot\cdot}(t, x)]\, dx = P(t, s, s^{\cdot}) \\
& s(t_0) = s^0, \quad s^{\cdot}(t_0) = v^0
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Решение совокупной задачи (1.1)–(1.5) предлагается проводить последовательно: сперва задача (1.1)–(1.4) решается для произвольного перемещения твердого тела $s(t)$ из требуемого класса дважды непрерывно дифференцируемых функций. Построенная функция $u(t, x, [s^{\cdot\cdot}])$ как интегральный оператор от $s^{\cdot\cdot}(t)$ подставляется в уравнение (1.5) и получается замкнутая интегродифференциальная задача Коши (ИДЗК) по t типа Вольтерры [3–6] для искомой переменной s, которая подлежит определению.

Используя уравнение (1.1), ИДЗК (1.5) можно привести к более удобной форме, не содержащей интеграла по x:

$$
\begin{aligned}
& ms^{\cdot\cdot} = P(t, s, s^{\cdot}) - \sigma u'(t, x, [s^{\cdot\cdot}])\Big|_{x=0}^{x=l} \\
& s(t_0) = s^0, \quad s^{\cdot}(t_0) = v^0
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Таким образом, уравнение движения центра масс гибридной системы в виде (1.5) или (1.6) используется далее для определения координаты $s(t)$, определяющей движение твердого тела (точки o). Если решение $s(t)$ построено, то остальные характеристики движения всей системы определяются относительно просто посредством стандартных операций. Поэтому основное внимание уделяется далее выводу ИДЗК для s в явной форме, построению и анализу решения при выполнении ряда упрощающих предположений, имеющих определенный механический смысл.

Далее для удобства перейдем к безразмерным переменным, аргументам и параметрам по формулам

$$
\begin{aligned}
& \theta = \nu t, \quad \nu^2 = \sigma/(\rho l^2), \quad x = \xi l \\
& s = \eta l, \quad u = zl, \quad \xi \in [0, 1]
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Производные по новым аргументам времени $\theta \geqslant \theta_0$ и координате ξ, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ вновь обозначим точками и штрихами соответственно. В результате получим совместную задачу относительно неизвестных $z = z(\theta, \xi)$ и $\eta = \eta(\theta)$:

$$
\begin{aligned}
& z^{\cdot\cdot} = z'' - \eta^{\cdot\cdot}, \quad 0 < \xi < 1 \\
& 1)\ z(\theta, 0) = z(\theta, 1) = 0; \quad 2)\ z(\theta, 0) = z'(\theta, 1) = 0 \\
& z(\theta_0, \xi) = \varphi(\xi), \quad z^{\cdot}(\theta_0, \xi) = \psi(\xi)
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

$$
\begin{aligned}
& \eta^{\cdot\cdot} = \Pi(\theta, \eta, \eta^{\cdot}) + \epsilon[z'(\theta, 0) - z'(\theta, 1)] \\
& \eta(\theta_0) = \eta^0 \equiv s^0/l, \quad \eta^{\cdot}(\theta_0) = \nu^0 \equiv v^0/(\nu l), \quad \epsilon = \rho l/m
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Функции φ, ψ, Π получаются из f, g, P соответственно посредством замен (1.7), параметр ϵ характеризует влияние упругого элемента на движение несущего тела. Возможны также другие способы перехода к безразмерным переменным, диктуемые соображениями удобства и существом задачи. В дальнейших исследованиях предпочтительнее использовать замены (1.7) для построения и анализа решения задач (1.8), (1.9).

2. Решение краевых задач при известном движении несущего тела. Искомые распределения упругих смещений $z(\theta, \xi)$, удовлетворяющие граничным условиям *1* и *2* задачи (1.8) для непрерывной функции $\eta^{\cdot\cdot}(\theta)$, $\theta \in [\theta_0, \theta^*]$, $\theta^* \leqslant \infty$ может быть построено стандартными методами математической физики [1, 2]. В результате находим выражения

$$z(\theta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\theta)\, \Xi_n(\xi), \qquad \Xi_n(\xi) = \sin\lambda_n \xi \tag{2.1}$$

$$1)\ \lambda_n = \pi n; \quad 2)\ \lambda_n = \tfrac{1}{2}\pi(2n-1), \qquad n \geqslant 1$$

Здесь $\{\lambda_n\}$, $\{\Xi_n(\xi)\}$ – системы собственных значений и собственных функций соответствующих краевых задач.

Коэффициенты Фурье $\Theta_n(\theta)$, $n \geqslant 1$ в (2.1) получаются как решения счетного числа задач Коши вида

$$\Theta_n^{\cdot\cdot} + \nu_n^2 \Theta_n = -d_n \eta^{\cdot\cdot}, \quad \nu_n = \lambda_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

$$\Theta_n(\theta_0) = \varphi_n, \quad \Theta_n^{\cdot}(\theta_0) = \psi_n; \quad 1)\ \nu_n = \pi n, \quad 2)\ \nu_n = \tfrac{1}{2}\pi(2n-1)$$

Здесь φ_n, ψ_n $(n \geqslant 1)$ – коэффициенты Фурье для разложений функций $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ по базисным функциям $\Xi_n(\xi)$, ν_n – собственные частоты $(\nu_n = \lambda_n)$. Коэффициенты d_n в (2.2) определяют чувствительность каждой моды по отношению к внешнему кинематическому "воздействию" $\eta^{\cdot\cdot}$. Имеем следующие выражения:

$$\varphi_n = 2\int_0^1 \varphi(\xi) \sin\lambda_n \xi\, d\xi, \qquad \psi_n = 2\int_0^1 \psi(\xi) \sin\lambda_n \xi\, d\xi$$

$$d_n = 2\int_0^1 \sin\lambda_n \xi\, d\xi; \quad 1)\ d_n = \frac{2}{\pi n}\,[1 - (-1)^n], \quad 2)\ d_n = \frac{4}{\pi(2n-1)} \tag{2.3}$$

Из (2.3) вытекает, что в случае краевых условий (1.2), отвечающих закрепленным концам упругого элемента (случай *1* (в (1.8)), движение несущего тела не оказывает влияния на четные моды колебаний $\Theta_{2k}(\theta)$; коэффициенты чувствительности $d_{2k} = 0$. Эти моды обусловлены только начальными распределениями смещений и скоростей, т.е. коэффициентами φ_{2k}, ψ_{2k} $(k = 1, 2, \ldots)$. Искомые функции $\Theta_n(\theta)$ можно представить в виде интегрального оператора от $\eta^{\cdot\cdot}(\theta)$ (ускорения несущего тела)

$$\Theta_n(\theta, [\eta^{\cdot\cdot}]) = \varphi_n \cos\nu_n(\theta - \theta_0) + \frac{\psi_n}{\nu_n} \sin\nu_n(\theta - \theta_0) -$$

$$- \frac{d_n}{\nu_n} \int_{\theta_0}^{\theta} \eta^{\cdot\cdot}(\tau) \sin\nu_n(\theta - \tau)\, d\tau, \quad \Theta_n^{\cdot}(\theta, [\eta^{\cdot\cdot}]) = \frac{d\Theta_n}{d\theta} \tag{2.4}$$

Таким образом, сильное решение краевых задач (1.8) существует и единственно, если функция $\eta^{\cdot\cdot}(\theta)$ непрерывна, а ряд $\Sigma[(\nu_n \varphi_n)^2 + \psi_n^2]$ сходится [1, 2]. Согласно (2.1), (2.4) решение можно представить в виде

$$z = z(\theta, \xi, [\eta^{\cdot\cdot}]) \equiv z_0(\theta, \xi) + z_\eta(\theta, \xi, [\eta^{\cdot\cdot}])$$

$$z_0(\theta, \xi) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sin\lambda_n \xi\, [\varphi_n \cos\nu_n(\theta - \theta_0) + \frac{\psi_n}{\nu_n} \sin\nu_n(\theta - \theta_0)] \tag{2.5}$$

$$z_\eta(\theta_0, \xi, [\eta^{\cdot\cdot}]) \equiv - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\nu_n} \sin\lambda_n \xi \int_{\theta_0}^{\theta} \eta^{\cdot\cdot}(\tau) \sin\nu_n(\theta - \tau)\, d\tau$$

Слагаемое z_0 обусловлено начальными распределениями φ, ψ, а z_η – "внешним кинематическим" воздействием $\eta^{\cdot\cdot}(\theta)$.

Подстановка выражения (2.5) в (1.9) приводит к искомой ИДЗК относительно неизвестной переменной η, которая подлежит дальнейшему определению. Заметим, что аналогичный подход сведения исходной задачи к ИДЗК для исследования колебательных систем с сосредоточенными и распределенными параметрами применялся [3–5] к гибридной системе с сосредоточенными и распределенными параметрами в виде прямоугольного сосуда с устойчиво стратифицированной жидкостью.

Сходным образом рассматривается более общая задача, когда упругий элемент неоднороден: $\rho = \rho(x) \geqslant \rho_0 > 0$, $\sigma = \sigma(x) \geqslant \sigma_0 > 0$. В этом случае требуется построить системы собственных значений $\{\lambda_n\}$ и ортогональных с весом $\rho^*(\xi)$ функций $\{\Xi_n(\xi)\}_{\rho^*(\xi)}$ краевых задач, соответствующих условиям закрепления *1, 2*

$$
\begin{gathered}
(\sigma^*(\xi)\,\Xi')' + \lambda^2 \rho^*(\xi)\,\Xi = 0, \quad 0 < \xi < 1 \\
1)\ \Xi(0) = \Xi(1) = 0; \quad 2)\ \Xi(0) = \Xi'(1) = 0
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Здесь σ^*, ρ^* – приведенные характеристики упругого элемента. Для вывода ИДЗК (1.9) необходимо найти системы собственных значений и собственных функций краевых задач (2.6). Их построению посвящена огромная литература и разработаны мощные методы, на обзоре которых здесь останавливаться, по-видимому, не следует. Далее системы $\{\lambda_n\}$, $\{\Xi_n(\xi)\}_{\rho^*(\xi)}$ предполагаются известными; отметим, что собственные частоты $\nu_n = \lambda_n$, $n \geqslant 1$. При построении уравнения для $\eta(\theta)$ типа (1.9) следует иметь в виду, что член, учитывающий влияние упругого элемента, равен $\epsilon[\sigma^*(0)z'(\theta, 0) - \sigma^*(1)z'(\theta, 1)]$.

3. Построение стандартной ИДЗК в случае квазилинейной внешней силы и слабого влияния упругого элемента. Будем рассматривать ИДЗК (1.9), (2.5), представленную в явной форме

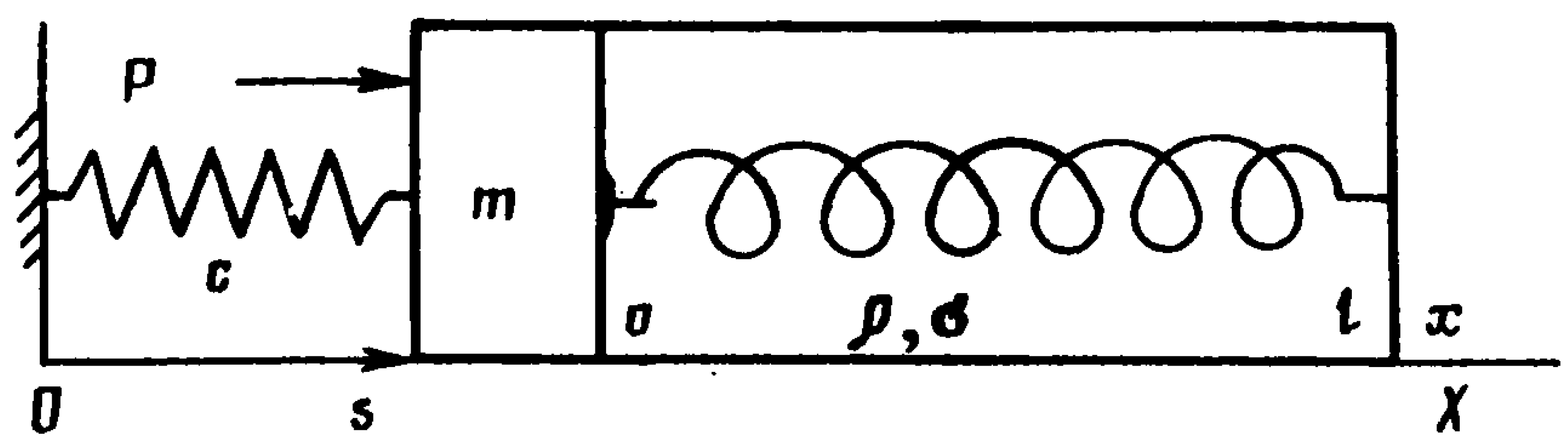
$$
\begin{gathered}
\eta^{\cdot\cdot} = \Pi(\theta, \eta, \eta^{\cdot}) + \epsilon\gamma(\theta) - \epsilon I(\theta, [\eta^{\cdot\cdot}]) \\
I(\theta, [\eta^{\cdot\cdot}]) \equiv \int_0^\theta E(\theta - \tau)\,\eta^{\cdot\cdot}(\tau)\,d\tau \\
\eta(\theta_0) = \eta^0, \quad \eta^{\cdot}(\theta_0) = \nu^0, \theta \in [\theta_0, \theta^*]
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Здесь известная функция γ и разностное ядро E интегрального оператора имеют вид

$$
\begin{gathered}
\gamma(\theta) \equiv z_0'(\theta, 0) - z_0'(\theta, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(1 - \cos\lambda_n)\,[\varphi_n \cos\nu_n(\theta - \theta_0) + \\
+ \psi_n \nu_n^{-1} \sin\nu_n(\theta - \theta_0)], \quad 1)\ \cos\lambda_n = (-1)^n, \quad 2)\ \cos\lambda_n = 0 \\
E(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin\nu_n\theta, \quad e_n = d_n(1 - \cos\lambda_n), \quad E(0) = 0
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Заметим, что ряды (3.2) могут быть свернуты и выражены через исходные функции (и их производные) $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$,1, заданные на промежутке $\xi \in [0, 1]$ и продолженные нечетным образом; они оказываются $2\pi/\nu_1$ – периодическими по θ. Кроме того, из (3.1) следует, что при $\Pi = \gamma \equiv 0$ движение твердого тела (и центра масс системы) будет равномерным: $\eta = \eta^0 + \nu^0(\theta - \theta_0)$, $\theta \geqslant \theta_0$. Если внешнее воздействие Π зависит только от θ, т.е. $\Pi = \Pi(\theta)$, то уравнение (3.1) можно рассматривать как линейное интегральное уравнение (ИУ) типа Вольтерры относительно ускорения $w = \eta^{\cdot\cdot}$, имеющее единственное решение $w(\theta)$ [6]. Искомые переменные η, $\eta^{\cdot}$ получаются интегрированием $w(\theta)$ с учетом начальных условий (3.1). Если $\Pi = \Pi(\theta, \eta^{\cdot})$, то введением переменной $v = \eta^{\cdot}$ порядок производных в ИДЗК (3.1) можно уменьшить на единицу. В общем случае ИДЗК (3.1) эквивалентна системе трех ИУ относительно η, v, w. Отметим также, что в случаях, когда можно ограничиться рассмотрением конечного (обычно небольшого) числа $N \geqslant 1$ мод колебаний упругого элемента и отбросить в рядах (3.2) члены с номерами $n > N$, при условии гладкости функций Π, γ дифференцированием по θ и исключением интегралов ИДЗК (3.1) можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ниже исследуется ИДЗК (3.1), (3.2) в предположении, что внешнее воздействие Π



представляет сумму линейной возвращающей упругой силы и произвольного периодического по θ возмущения (фигура),

$$\Pi(\theta, \vartheta, \eta, \eta^{\cdot}) = -\Omega^2(\eta - \eta_0) + \mu\Gamma(\omega\theta, \vartheta, \eta, \eta^{\cdot}) \tag{3.3}$$

Здесь $\Omega^2 = (c/m)/(\sigma/\rho l^2)$ – постоянная величина, имеющая смысл квадрата приведенной частоты, $c > 0$ – коэффициент упругости возвращающей силы, ω – приведенная частота внешнего воздействия, μ – малый параметр $(0 < \mu \leqslant \mu_0 \ll 1)$, $\vartheta = \mu\theta$ – медленное безразмерное время, $\eta_0 = \eta_0(\vartheta)$ – положение равновесия, которое можно считать нулевым. Далее будем полагать, что величина частоты Ω имеет порядок величин, низших собственных частот упругого элемента ν_1, ν_2 и т.п., т.е. порядка единицы. Параметр $\epsilon = \rho l/m$ будем считать также, как и μ, малым: $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_0 \ll 1$. Отметим, что в пределе при $\mu = \epsilon = 0$ уравнение (3.1) описывает линейные колебания твердого тела, несмотря на особенность замен (1.7) и выражения (3.3).

Посредством замены переменных η, $v = \eta^{\cdot}$ к переменным a, b типа Ван дер Поля [3–5]

$$\begin{aligned} &\eta = \eta_0(\vartheta) + a\cos\Omega\theta + b\sin\Omega\theta \\ &v = \Omega(-a\sin\Omega\theta + b\cos\Omega\theta) \end{aligned} \tag{3.4}$$

получим стандартную систему в форме Боголюбова для оскулирующих переменных a, b [7]

$$\begin{aligned} &a^{\cdot} = \mu\Gamma_a(\theta, \vartheta, a, b) + \epsilon\Omega^{-1}[-\gamma(\theta) + I]\sin\Omega\theta \\ &b^{\cdot} = \mu\Gamma_b(\theta, \vartheta, a, b) + \epsilon\Omega^{-1}[\gamma(\theta) - I]\cos\Omega\theta \\ &a(\theta_0) = a^0 \equiv \eta^0 - \eta_0(\vartheta_0), \quad b(\theta_0) = b^0 \equiv v^0/\Omega \\ &\Gamma_a = -\Omega\eta_0'(\vartheta)\cos\Omega\theta - \Gamma(\omega\theta, \vartheta, \eta, v)\sin\Omega\theta \equiv \Gamma_a(\theta, \vartheta, a, b) \\ &\Gamma_b = -\Omega\eta_0'(\vartheta)\sin\Omega\theta + \Gamma(\omega\theta, \vartheta, \eta, v)\cos\Omega\theta \equiv \Gamma_b(\theta, \vartheta, a, b) \end{aligned} \tag{3.5}$$

В выражении для Γ переменные η, v выражаются через θ, ϑ, a, b согласно формулам замены (3.4). Функция Γ, а вместе с нею и $\Gamma_{a,b}$, являются двоякопериодическими, т.е. имеют частотный базис $\{\omega, \Omega\}$. Система (3.5) непосредственно непригодна для применения асимптотических методов усреднения, поскольку интегральный оператор I

определен на функциях $\eta^{\cdot\cdot}(\theta)$, для которых нет явных формул замены через переменные a, b, θ, ϑ ($\eta^{\cdot\cdot}$ можно выразить через указанные и $a^{\cdot}$, $b^{\cdot}$). Попытка использования формул интегрирования по частям для получения выражения в терминах более низких производных (через $\eta^{\cdot}$, η, см. [3–5]) приводит к некоторым трудностям, поскольку ядро $E(\theta)$ интегрального оператора I недифференцируемо: $E(\theta)$ – кусочно-непрерывная функция, а $E^{\cdot}(\theta)$ – обобщенная, типа периодической импульсной δ-функции Дирака [6]. Поэтому предлагается более корректный прием, связанный с приведением ИДЗК (3.5) к виду системы ИУ путем их интегрирования по θ с использованием формул повторного интегрирования [3–5].

Действительно, интегрируя (3.5) по θ, с учетом начальных условий получим:

$$a(\theta) = a^0 + \mu \int_{\theta_0}^{\theta} \Gamma_a(\tau, \kappa, a, b)\,d\tau - \epsilon\gamma_s(\theta) +$$

$$+ \epsilon I_s(\theta, [v]) - \epsilon J_c(\theta, [v]), \quad \kappa = \mu\tau \tag{3.6}$$

$$b(\theta) = b^0 + \mu \int_{\theta_0}^{\theta} \Gamma_b(\tau, \kappa, a, b)\,d\tau + \epsilon\gamma_c(\theta) - \epsilon I_c(\theta, [v]) - \epsilon J_s(\theta, [v]), \quad v = \eta^{\cdot}$$

$$\gamma_{s,c}(\theta) = \frac{1}{\Omega} \int_{\theta_0}^{\theta} [\gamma(\tau) + b^0 E(\tau)] \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \Omega\tau\,d\tau, \quad \theta \in [\theta_0, \theta^*]$$

$$I_{s,c} = \frac{1}{\Omega} \int_{\theta_0}^{\theta} v(\tau) E(\theta - \tau) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \Omega\tau\,d\tau, \quad J_{s,c} = \int_{\theta_0}^{\theta} v(\tau)\,d\tau \int_{\tau}^{\theta} E(\chi - \tau) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \Omega\chi\,d\chi$$

Здесь $I_{s,c}(\theta, [v])$, $J_{s,c}(\theta, [v])$ – интегральные операторы от переменной $v(\theta)$, для которой имеет место представление (3.4), т.е. в итоге получаются операторы от $a(\theta)$, $b(\theta)$. Таким образом, получена система ИУ (3.6) относительно неизвестных $a(\theta)$, $b(\theta)$ в стандартной форме [5, 7], отвечающая ИДЗК (3.5). Для ее приближенного решения и анализа применим асимптотический подход метода усреднения, развитый в [5] для случая незатухающих периодических и почти (квази-)периодических ядер линейных интегральных операторов.

Перейдем к построению усредненных ИУ и на их основе усредненных дифференциальных уравнений первого приближения. Малые параметры μ, ϵ далее считаются связанными. В соответствии с процедурой усреднения [5] будем различать два качественно различных режима колебаний, отвечающих а) наличию внутреннего резонанса ($\Omega \simeq \nu_k$, где $k \geqslant 1$ – "небольшое" значение индекса); б) отсутствию внутреннего резонанса ($\Omega \neq \nu_k$). Далее эти предположения уточняются в терминах малых параметров. При этом допускается как наличие, так и отсутствие внешнего резонанса, обусловленного внешним периодическим воздействием (с частотой ω).

В заключение подчеркнем следующее весьма важное обстоятельство. Асимптотическое решение стандартной по Боголюбову системы вида $x^{\cdot} = \epsilon X(t, x)$, $x(t_0) = x^0$ сводится к интегрированию усредненной системы $\xi' = X_0(\xi)$, где X_0 – среднее X по t; $\xi(\tau_0) = x^0$, $\tau = \epsilon t$. С точки зрения теории ИУ сопоставляются две системы

$$x(t) = x^0 + \epsilon \int_{t_0}^{t} X(t_1, x(t_1))\,dt_1, \quad \xi(\tau) = x^0 + \int_{\tau_0}^{\tau} X_0(\xi(\tau_1))\,d\tau_1$$

где $\tau = \epsilon t \sim 1$. В случае ИДЗК или ИУ вида

$$x^{\cdot}(t)=\epsilon\int_{t_0}^{t} X(t, t_1, x(t), x(t_1))dt_1, \quad x(t_0)=x^0$$

$$x(t)=x^0+\epsilon\int_{t_0}^{t} Y(t, t_1, x(t), x(t_1))dt_1$$

усреднение по внутреннему аргументу t_1 и обоснование близости решений исходных и усредненных уравнений весьма проблематично. В общем случае среднее функции Y по t_1 не существует ("резонанс" [3–5]). Если же оно существует, то из получающихся упрощенных уравнений не следует, что x – медленная переменная [5], а ее определение не становится существенно проще.

4. Асимптотический анализ колебаний гибридной системы в резонансном и нерезонансном случаях. В зависимости от режима колебаний будем рассматривать различные взаимосвязи между малыми параметрами μ и ϵ [5].

4.1. Усредненная система в резонансном случае. Для теории и приложений представляют интерес следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&\Omega=\nu_k+O(\mu), \quad k=1,2,\ldots; \quad \epsilon=\mu^2\\ &\theta\in[\theta_0, \Theta/\mu], \quad \Theta=\text{const}\ (\theta^*\sim 1/\mu=1/\sqrt{\epsilon})\end{aligned} \tag{4.1}$$

Связь (4.1) между ϵ и μ приводит к одинаковому порядку влияния возмущений [5]. Тогда усредненные значения α, β переменных a, b описываются двумя связанными ИУ [5] на относительно коротком интервале медленного времени ϑ:

$$\begin{aligned}&\alpha(\vartheta)=a^0+\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\Gamma_\alpha^*(\kappa,\alpha(\kappa), \beta(\kappa))d\kappa-\frac{e_k\nu_k}{4}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}(\vartheta-\kappa)\alpha(\kappa)d\kappa\\ &\beta(\vartheta)=b^0+\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\Gamma_\beta^*(\kappa, \alpha(\kappa), \beta(\kappa))d\kappa-\frac{e_k\nu_k}{4}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}(\vartheta-\kappa)\beta(\kappa)d\kappa\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\vartheta=\mu\theta=\sqrt{\epsilon}\theta, \quad \vartheta\in[\vartheta_0,\Theta], \quad \kappa=\mu\tau$$

$$\Gamma_{\alpha,\beta}^*(\vartheta,\alpha,\beta)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\theta_0}^{T}\Gamma_{a,b}(\theta,\vartheta,\alpha,\beta)d\theta$$

Остальные слагаемые в правой части (3.6) (в том числе переменное положение равновесия $\eta_0=\eta_0(\vartheta)$) дают вклад $O(\mu)$ в решение, т.е. имеем оценки [5]

$$\begin{aligned}&|a(\theta,\mu)-\alpha(\vartheta)|+|b(\theta,\mu)-\beta(\vartheta)|\leqslant C\mu\\ &\theta\in[\theta_0,\Theta/\mu], \qquad C=\text{const}\end{aligned} \tag{4.3}$$

Заметим, что согласно (3.5) между частотами ω и Ω могут быть резонансные соотношения, приводящие к дополнительным членам в указанных в (4.2) средних $\Gamma_{\alpha,\beta}^*$. Далее, дифференцированием по ϑ (дважды) уравнения (4.2) сводятся к связанной системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в медленном времени ϑ, $\vartheta_0\leqslant\vartheta\leqslant\Theta$:

$$\begin{aligned}&\alpha''=\partial\Gamma_\alpha^*/\partial\vartheta+(\partial\Gamma_\alpha^*/\partial\alpha)\alpha'+(\partial\Gamma_\alpha^*/\partial\beta)\beta'-(e_k\nu_k/4)\alpha\\ &\beta''=\partial\Gamma_\beta^*/\partial\vartheta+(\partial\Gamma_\beta^*/\partial\alpha)\alpha'+(\partial\Gamma_\beta^*/\partial\beta)\beta'-(e_k\nu_k/4)\beta\\ &\alpha(\vartheta_0)=a^0, \quad \alpha'(\vartheta_0)=\Gamma_\alpha^*(\vartheta_0, a^0, b^0)\\ &\beta(\vartheta_0)=b^0, \quad \beta'(\vartheta_0)=\Gamma_\beta^*(\vartheta_0, a^0, b^0)\end{aligned} \tag{4.4}$$

Для ряда классов функций Γ (т.е. $\Gamma_{a,\,b}$), имеющих механическое содержание, система (4.4) допускает полное интегрирование, в частности если $\partial\Gamma^*_{\alpha,\beta}/\partial\alpha$, $\partial\Gamma^*_{\alpha,\beta}/\partial\beta$ постоянны. Если $\Gamma^*_\alpha = \Gamma^*_\alpha(\vartheta, \alpha)$, $\Gamma^*_\beta = \Gamma^*_\beta(\vartheta, \beta)$, уравнения (4.4) разделяются и в стационарном случае к ним применимы топологические и качественные методы исследования (методы фазовой плоскости, см., например, [8]). Была полностью проинтегрирована задача Коши [5] для случая, когда возмущающая нелинейная добавка $\mu\Gamma$ в (3.3) определяла кубическую нелинейность возвращающей силы ($\Gamma = \Delta\eta^3$); решение найдено в эллиптических функциях. Отметим также, что динамическая система (4.4) имеет определенную структуру, свойства симметрии которой могут быть использованы при ее анализе.

Интересно отметить, что возмущающее влияние интегрального члена эквивалентно линейной "возвращающей силе". Поэтому при $\Gamma^*_{\alpha,\beta} \equiv 0$ переменные α, β совершают гармонические колебания с частотой $\Lambda_k = (e_k\nu_k/4)^{1/2}$, а искомое решение η согласно (3.4) равно ($\theta_0 = 0$):

$$\begin{aligned}
&\eta = \eta(\vartheta) + \mathrm{A}\cos\mu\Lambda_k\theta\cos(\Omega\theta - \zeta) + O(\mu), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \Theta/\mu \\
&v = \eta^\cdot = -\mathrm{A}\Omega\cos\mu\Lambda_k\theta\sin(\Omega\theta - \zeta) + O(\mu) \\
&\cos\zeta = a^0/\mathrm{A}, \quad \sin\zeta = b^0/\mathrm{A}, \quad \mathrm{A} = (a^{0\,2} + b^{0\,2})^{1/2}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Таким образом, колебания твердого тела совершают биения с малой частотой $\mu\Lambda_k$ ($\mu = \sqrt{\epsilon}$) в безразмерном времени θ, причем амплитуда колебаний изменяется от величин порядка единицы до нуля (величин $O(\mu)$). Из (4.4) следует, что наличие внешнего периодического воздействия $\Gamma = \Gamma(\omega\theta)$ в резонансном случае ($\omega \simeq \Omega \simeq \nu_k$) не приводит к "неограниченному" линейному росту величин $\alpha(\vartheta)$, $\beta(\vartheta)$ вследствие влияния "возвращающей силы", обусловленной упругим элементом. Чтобы происходила дополнительная медленная "раскачка", нужно модулировать воздействие Γ, т.е. внести периодическую зависимость от ϑ: $\Gamma = \Gamma(\omega\theta, \Lambda_k\ \vartheta)$.

Для приведения системы ИУ (4.2) к виду обыкновенных дифференциальных уравнений без предположения дифференцируемости $\Gamma^*_{\alpha,\beta}$ по ϑ, α, β можно воспользоваться следующим приемом. Продифференцируем систему (4.2) по ϑ один раз и введем новые неизвестные переменные p, q ($p' = \alpha$, $q' = \beta$); получим

$$\begin{aligned}
&p'' = \Gamma^*_\alpha(\vartheta, p', q') - \Lambda_k^2 p, \quad p(\vartheta_0) = 0, \quad p'(\vartheta_0) = a^0 \\
&q'' = \Gamma^*_\beta(\vartheta, p', q') - \Lambda_k^2 q, \quad q(\vartheta_0) = 0, \quad q'(\vartheta_0) = b^0 .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Уравнения (4.6) существенно отличаются от (4.4) и по виду более компактны. Наряду с (4.2), (4.4) они составляют математический аппарат исследования колебаний гибридной системы в случае внутреннего резонанса.

4.2. Усредненная система в нерезонансном случае. Колебания твердого тела описываются ИУ при следующих естественных предположениях [4, 5]:

$$\begin{aligned}
&\Omega \neq \nu_k + O(\sqrt{\epsilon}) \quad (\Omega = \nu_k + O(1)), \quad k = 1, 2, \ldots; \quad \mu = \epsilon \\
&\theta \in [\theta_0, \ \theta/\epsilon], \quad \Theta = \mathrm{const}, \quad \vartheta = \epsilon\theta
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Внешний резонанс, обусловленный периодическим возмущающим воздействием произвольной частоты ω, как и в разд. 4.1, может иметь место или отсутствовать. При помощи подхода [5] получаем следующую систему ИУ первого приближения, отвечающую (3.6):

$$\alpha(\vartheta) = a^0 + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \Gamma^*_\alpha(\kappa, \alpha(\kappa), \beta(\kappa))d\kappa + \Lambda \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \beta(\kappa)d\kappa$$

$$\beta(\vartheta) = b^0 + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \Gamma_\beta^*(\kappa, \alpha(\kappa), \beta(\kappa))\, d\kappa - \Lambda \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \alpha(\kappa) d\kappa \tag{4.8}$$

$$\Lambda = \frac{\Omega}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_k e_k}{\nu_k^2 - \Omega^2}, \qquad \vartheta \in [\vartheta_0,\ \Theta]$$

Остальные слагаемые, входящие в СИУ (3.6), в том числе члены в $\Gamma^*_{\alpha,\beta}$, обусловленные переменностью положения равновесия $\eta_0(\vartheta)$, дают вклад $O(\epsilon)$ для $\theta \sim \epsilon^{-1}$. Согласно [5] имеем оценку погрешности между решениями исходной системы ИУ (3.6) и усредненной (4.8)

$$\begin{gathered} |a(\theta, \epsilon) - \alpha(\vartheta)| + |b(\theta, \epsilon) - \beta(\vartheta)| \leqslant C\epsilon \\ \theta \in [\theta_0, \Theta/\epsilon], \quad C = \text{const} \end{gathered} \tag{4.9}$$

В отличие от системы (4.2) (см. (4.4), (4.6)), отвечающей случаю внутреннего резонанса, при отсутствии резонанса система ИУ (4.8) эквивалентна двум дифференциальным уравнениям первого порядка, которые следует из (4.8) после однократного дифференцирования

$$\begin{aligned} \alpha' &= \Gamma_\alpha^*(\vartheta, \alpha, \beta) + \Lambda\beta, \qquad \alpha(\vartheta_0) = a^0 \\ \beta' &= \Gamma_\beta^*(\vartheta, \alpha, \beta) - \Lambda\alpha, \qquad \beta(\vartheta_0) = b^0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Существенное различие состоит и в том, что влияние интегрального члена в (3.1) или (3.5) эквивалентно "гироскопическим силам". Отметим, что коэффициент Λ может быть произвольного знака, в частности, равным нулю. Для ряда классов возмущающих воздействий, имеющих механический смысл, задача Коши (4.10) допускает полное аналитическое и качественное исследование. В частности, при условии стационарности (автономности) (4.10), когда $\Gamma^*_{\alpha,\beta} = \Gamma^*_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta)$, применимы методы фазовой плоскости [7, 8]. Если $\Gamma^*_{\alpha,\beta} = \text{const}$ (внешний резонанс), то гироскопические члены (как и возвращающие в разд 4.1) препятствуют при $\Lambda \neq 0$ неограниченному росту α, β; "раскачка" в медленном времени возможна, если функции $\Gamma^*_{\alpha,\beta} = \Gamma^*_{\alpha,\beta}(\Lambda\vartheta)$ периодичны по ϑ. Для приложений представляется интересным случай нерезонансных колебаний при $\Gamma^*_{\alpha,\beta} \equiv 0$ [4, 5]. Согласно (3.4), (4.10) получим выражения ($\theta_0 = 0$):

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0(\vartheta) + a^0 \cos(\Omega + \epsilon\Lambda)\theta + b^0 \sin(\Omega + \epsilon\Lambda)\theta + O(\epsilon) \\ \dot\vartheta &= -a^0 \Omega \sin(\Omega + \epsilon\Lambda)\theta + b^0 \Omega \cos(\Omega + \epsilon\Lambda)\theta + O(\epsilon) \\ \theta &\in [0,\ \Theta\epsilon^{-1}], \quad \Theta = \text{const} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Отсюда следует, что влияние упругого элемента сводится к смещению на $\epsilon\Lambda$ частоты колебаний невозмущенной системы; биение (см. разд. 4.1) отсутствует, амплитуда постоянна. Влияние возмущающей потенциальной добавки к возрастающей силе приводит к малому $O(\epsilon)$ изменению частоты на постоянную величину [5]. Система (4.10) обладает определенными структурными свойствами и симметрией, которые могут быть использованы при ее анализе.

В заключение отметим, что полученные выше результаты могут быть использованы для создания систем диагностики (неразрушающего контроля) при оперативном анализе функционирования упругого элемента, находящегося внутри замкнутой полости и недоступного непосредственному прямому наблюдению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
3. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 27–36.
4. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Нерезонансные колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую двухслойную жидкость // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 52–58.
5. *Акуленко Л.Д.* Исследование квазилинейных колебаний механических систем с распределенными и сосредоточенными параметрами // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 392–401.
6. *Краснов М.П.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 304 с.
7. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.
8. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И. и др.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.

Поступила в редакцию
15.I.1991

Москва