ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
2. *Жиглявский А.А.* Математическая теория глобального случайного поиска. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 293 с.
3. *Ворович И.И., Сумбатян М.А.* Восстановление образа дефекта по рассеянному волновому полю в акустическом приближении // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 79–84.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
7.VIII.1991

УДК 539.3

 А.Г. Колпаков

ОБ ЭФФЕКТЕ ДОЛГОВРЕМЕННОЙ ПАМЯТИ В ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНКАХ

Показано, что эффект долговременной памяти, обнаруженный у композиционных материалов [1, 2], может возникать в пластинках, причем в последнем случае он необязательно связан с наличием неоднородной структуры. Анализ задачи проводится на основании использования двухмасштабного асимптотического разложения [3].

1. Формулировка задачи. Рассмотрим трехмерную задачу в тонком слое $S \times [-\epsilon/2, \epsilon/2]$ постоянной толщины ϵ (при $\epsilon \to 0$ область стягивается к двумерной области $S \subset R^2$ – пластинке):

$$S_{ij,j} = f_i \text{ в } S \times [-\epsilon/2, \epsilon/2] \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ на } \partial S \times [-\epsilon/2, \epsilon/2] \tag{1.2}$$

$$\sigma_{i3} = g_i^{\pm} \text{ на поверхностях } \{\mathbf{x}' \in S,\ x_3 = \pm\epsilon/2\}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ в } S \times [-\epsilon/2, \epsilon/2] \tag{1.3}$$

Здесь $\{\sigma_{ij}\}$ – тензор напряжений, $\mathbf{u}$ – перемещения пластинки, рассматриваемой как трехмерное тело, $\mathbf{x}' = (x_1, x_2)$ – координаты в плоскости пластинки.

Определяющие соотношения возьмем в виде

$$\sigma_{ij} = \epsilon^a(a_{ijkl}u_{k,l} + \Gamma_{ijkl}u_{k,l}) \tag{1.4}$$

где $\{a_{ijkl}\}$ – тензор упругих постоянных, $\{\Gamma_{ijkl}\}$ – тензор из линейных (по времени) операторов. В случае вязкоупругого материала $\Gamma_{ijkl} = b_{ijkl}\partial/\partial t$. Множитель ϵ^a в (1.4) при $a = -1$ гарантирует нулевую жесткость пластинки в ее плоскости, а при $a = -3$ – ненулевую жесткость на изгиб при $\epsilon \to 0$.

Рассмотрим наиболее общий случай $a = -3$ (включающий, как будет видно, и случай $a = -1$). Величины a_{ijkl}, Γ_{ijkl} (b_{ijkl} в случае вязкоупругого материала) предполагаются ограниченными равномерно по ϵ).

2. Асимптотическое разложение. Рассмотрим пластинку постоянной толщины, изготовленную из однородного материала. Используем следующее асимптотическое разложение (являющееся специальным случаем ранее предложенного разложения [3]):

$$\begin{gathered}\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}', t) + \epsilon\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}', y_3, t) + \ldots \\ \sigma_{ij} = \epsilon^{-3}\sigma_{ij}^{(-3)}(\mathbf{x}', y_3, t) + \epsilon^{-2}\sigma_{ij}^{(-2)}(\mathbf{x}', y_3, t) + \ldots;\quad y_3 = x_3/\epsilon\end{gathered} \tag{2.1}$$

Подстановка разложения (2.1) в (1.1), замена операторов дифференцирования $\partial/\partial x_i$ на $\epsilon^{-1}\,\partial/\partial y_3$, $\partial/\partial x_\alpha$ (здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2, латинские – 1, 2, 3) и приравнивание выражений при одинаковых степенях ϵ приводят к уравнениям

$$\sigma_{i3,3y}^{(m+1)} + \sigma_{i\alpha,\alpha x}^{(m)} = 0,\quad m \neq 0 \tag{2.2}$$

$$,3y = \partial/\partial y_3,\quad ,\alpha x = \partial/\partial x_\alpha$$

Осреднив уравнения (2.2) по толщине пластинки и осреднив эти же уравнения, предварительно умноженные на y_3, получаем уравнения равновесия

$$\langle \sigma_{\alpha\beta}^{(-3)} \rangle_{,\alpha x} = 0, \quad \langle \sigma_{\beta\alpha}^{(-2)} \rangle_{,\alpha x} + g_\beta^+ + g_\beta^- = 0 \tag{2.3}$$

$$\langle \sigma_{3\alpha}^{(-1)} \rangle_{,\alpha x} + g_3^+ + g_3^- = 0, \quad M_{\beta\alpha,\alpha x}^{(-2)} - \langle \sigma_{\beta 3}^{(-1)} \rangle + g_\beta^+ + g_\beta^- = 0$$

Здесь $\langle \cdot \rangle = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \cdot \, dy_3$ – среднее по толщине пластинки, $\langle \sigma_{ij}^{(m)} \rangle$ – усилия, $M_{ij}^{(m)} = \langle y_3 \sigma_{ij}^{(m)} \rangle$ – моменты.

Определяющие уравнения пластинки (не материала, из которого она изготовлена, а именно пластинки) должны связать усилия и моменты с деформационными характеристиками (при применении асимптотического метода ими оказываются классические деформации в плоскости пластинки и кривизны).

Определяющие уравнения материала пластинки (2.2) после подстановки в них разложения (2.1), замены операторов дифференцирования и приравнивания выражений при одинаковых степенях ϵ дают

$$\sigma_{ij}^{(m)} = a_{ijk\alpha} u_{k,\alpha x}^{(m+3)} + a_{ijk3} u_{k,3y}^{(m+4)} + \Gamma_{ijk\alpha} u_{k,\alpha x}^{(m+3)} + \Gamma_{ijk3} u_{k,3y}^{(m+4)} \tag{2.4}$$

Подстановка выражений (2.4) при $m = -3$ в (2.2) дает задачу (переменными являются y_3 и t, $\mathbf{x}'$ – параметр, $\gamma_{\beta\alpha}$ – деформации в плоскости пластинки)

$$\sigma_{i3,3y}^{(-3)} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(-3)} = 0 \quad \text{при} \quad y_3 = \pm 1/2 \tag{2.5}$$

Здесь

$$\sigma_{ij}^{(-3)} = a_{ijk3} u_{k,3y}^{(1)} + \Gamma_{ijk3} u_{k,3y}^{(1)} + a_{ij\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha} + \Gamma_{ij\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha} + a_{ij3\alpha} u_{3,\alpha x}^{(0)} + \Gamma_{ij3\alpha} u_{3,\alpha x}^{(0)} \tag{2.6}$$

Подстановка (2.1) в (1.3) дает начальные условия

$$\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}', y_3, 0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

в частности

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}', y_3, 0) = 0 \tag{2.8}$$

Решение задачи (2.5), (2.6), (2.8) даст выражение $\mathbf{u}^{(1)}$ через $\{u_{3,\alpha x}^{(0)}\}$, $\{\gamma_{\beta\alpha}\}$, а подстановка полученного выражения в (2.6) и интегрирование результата по толщине – связь усилий с $\{\gamma_{\beta\alpha}\}$ ($\{u_{3,\alpha x}^{(0)}\}$ в эту связь, как будет видно далее, не входят).

3. Анализ определяющих соотношений. Растяжение в плоскости пластинки. Представим решение задачи (2.5), (2.6), (2.8) в виде суммы слагаемых, соответствующих деформациям пластинки в плоскости и ее изгибу: $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_1^{(1)} + \mathbf{u}_2^{(1)}$, где $\mathbf{u}_1^{(1)}$ – решение задачи

$$\sigma_{i3,3y}^{u} = 0, \quad \sigma_{i3}^{u} = 0 \quad \text{при} \quad y_3 = \pm 1/2 \tag{3.1}$$

где

$$\sigma_{i3}^{u} = a_{i3k3} u_{1k,3y}^{(1)} + \Gamma_{i3k3} u_{1k,3y}^{(1)} + a_{i3\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha} + \Gamma_{i3\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha} \tag{3.2}$$

Ищем решение (3.1), (3.2) в виде (имея в виду независимость входящих в (3.1), (3.2) величин от y_3)

$$\frac{\partial}{\partial y_3} u_{1k}^{(1)}(x', y_3, t) = V_k(t), \quad \text{т.е.} \quad u_{1k}^{(1)}(x', y_3, t) = V_k(t) y_3 + C_k \tag{3.3}$$

Подстановка (3.3) в (3.2) при учете краевых условий дает

$$\sigma_{i3}^{u} = a_{i3k3} V_k + \Gamma_{i3k3} V_k + a_{i3\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha} + \Gamma_{i3\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha} = \tag{3.4}$$

$$= (a_{i3k3}) \{ \mathbf{V} + (a_{i3k3})^{-1} (a_{i3\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha}) \} + (\Gamma_{i3k_3}) \{ \mathbf{V} + (\Gamma_{i3k3})^{-1} (\Gamma_{i3\beta\alpha})\gamma_{\beta\alpha} \} = 0$$

где (a_{i3k3}), (Γ_{i3k3}) – матрицы 3×3 (числовая и операторная), -1 означает их обращение (в соответствующем смысле), $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ и $(a_{i3\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha})_{i=1,2,3}$, $(\Gamma_{i3\beta\alpha}, \gamma_{\beta\alpha})_{i=1,2,3}$ – векторы.

В общем случае (так как Γ_{ijkl} – операторы по времени) (3.1) представляет собой операторное уравнение (в случае вязкоупругого материала – дифференциальное) и его решение дается некоторым нелокальным по времени разрешающим оператором.

Замечание. В частном случае, когда выполнены соотношения (ср. с [2])

$$(a_{i3k3})^{-1} (a_{i3\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha})_{i=1,2,3} = (\Gamma_{i3k3})^{-1} (\Gamma_{i3\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha})_{i=1,2,3} \tag{3.5}$$

равенство (3.4) удовлетворяется функцией

$$V = -(a_{i3k3})^{-1}(a_{i3\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha})_{i=1,2,3} \tag{3.6}$$

Обратимся к функции $u_2^{(1)}$ из равенства $u^{(1)} = u_1^{(1)} + u_2^{(1)}$. Она определяется из решения задачи (3.1) с

$$\sigma_{i3}^{u} = a_{i3k3}u_{k,3y}^{(1)} + \Gamma_{i3k3}u_{k,3y}^{(1)} + a_{i33\alpha}u_{3,\alpha x}^{(0)} + \Gamma_{i33\alpha}u_{3,\alpha x}^{(0)}$$

Решением этой задачи, как ранее [2], является функция $u_k^{(1)} = -y_3\delta_{k\alpha}u_{3,\alpha x}^{(0)}$, что проверяется подстановкой (при учете симметрии коэффициентов $a_{i33\alpha} = a_{i3\alpha 3}$, $\Gamma_{i33\alpha} = \Gamma_{i3\alpha 3}$).

Подстановка полученных выражений в (2.4) при $m = -3$ дает после интегрирования по толщине

$$\langle \sigma_{ij}^{(-3)} \rangle = \langle a_{ijk3}V_k + \Gamma_{ijk3}V_k + a_{ij\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha} + \Gamma_{ij\beta\alpha}\gamma_{\beta\alpha} \rangle \tag{3.7}$$

Видно, что при выполнении (3.5) уравнения (3.7) – определяющие уравнения пластинки, имеют тот же тип, что и (2.1) – определяющие уравнения материала. В общем случае это не так.

Пример. Рассмотрим пластинку из вязкоупругого материала, для которого $\Gamma_{ijkl} = b_{ijkl}\partial/\partial t$, $b_{ijkl} = \text{const}$. Для простоты рассмотрим случай одноосного растяжения: $\gamma_{\beta\alpha} = \gamma_{22}\delta_{\beta 2}\delta_{\alpha 2}$. В этом случае (3.4) принимает вид (при учете того, что для рассматриваемого здесь случая изотропных материалов (a_{i3k3}) и (Γ_{i3k3}) – диагональные матрицы [4])

$$\sigma_{i3}^{u} = a_{i3i3}V_i + a_{i322}\gamma_{22} + b_{i3i3}\frac{\partial V_i}{\partial t} + b_{i322}\frac{\partial\gamma_{22}}{\partial t} =$$

$$= a_{i3i3}\left(V_i + \frac{a_{i233}}{a_{i3i3}}\gamma_{22}\right) + b_{i3i3}\frac{\partial}{\partial t}\left(V_i + \frac{b_{i233}}{b_{i3i3}}\gamma_{22}\right) \tag{3.8}$$

При $i = 1, 2$ и учете равенств $a_{i322} = 0$, $b_{i322} = 0$, для изотропных материалов соотношение (3.8) принимает вид (при $i = \alpha = 1, 2$)

$$\sigma_{\alpha 3}^{u} = a_{\alpha 3\alpha 3}V_\alpha + \frac{\partial}{\partial t}b_{\alpha 3\alpha 3}V_\alpha$$

и из (3.3) следует, что $V_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2)$. Таким образом, от (3.1) в рассматриваемом случае остается только третье $(i = 3)$ уравнение, которое при учете (3.8) дает (ср. с (3.4))

$$a_{3333}(V_3 + A\gamma_{22}) + b_{3333}\partial(V_3 + A\gamma_{22})/\partial t = -b_{3333}\partial(B - A)/\partial t$$

$$A = a_{3322}/a_{3333}, \quad B = b_{3322}/b_{3333} \tag{3.9}$$

Согласно (3.3) и (2.8)

$$V_3(0) = 0 \tag{3.10}$$

(напомним, что V_3 – функция одного аргумента t). Решение уравнений (3.9), (3.10) есть

$$V_3(t) = A(-\gamma_{22}(t) + \gamma_{22}(0)) + \int_0^t e^{C\tau}\Delta\frac{\partial\gamma_{22}}{\partial t}(\tau)\,d\tau \quad \left(C = \frac{a_{3333}}{b_{3333}}\right), \quad \Delta = B - A \tag{3.11}$$

Подстановка выражения (3.11) в (3.7) дает следующие определяющие соотношения (для рассматриваемого случая, когда только величина γ_{22} отлична от нуля):

$$\langle \sigma_{ij}^{(-3)} \rangle = a_{ij33}A(-\gamma_{22}(t) + \gamma_{22}(0)) + a_{ij33}\Delta\int_0^t e^{C\tau}\frac{\partial\gamma_{22}}{\partial t}(\tau)\,d\tau +$$

$$+ b_{ij33}\left(-A\frac{\partial\gamma_{22}}{\partial t}(t) + \Delta e^{Ct}\frac{\partial\gamma_{22}}{\partial t}(t)\right) + a_{ij22}\gamma_{22}(t) + b_{ij22}\frac{\partial\gamma_{22}}{\partial t}(t) \tag{3.12}$$

Знак $\langle\ \rangle$ в правой части (3.12) опущен, так как входящие в нее функции не зависят от y_3, а для них среднее равно им самим.

Как видно, определяющие уравнения пластинки, изготовленной из вязкоупругого материала (описываемого локальными по времени определяющими соотношениями), содержат нелокальный интегральный член (типа наследственной теории упругости [4]) и явно зависящий от времени член (типа теории старения [4]). Оценим величины этих членов. Интегральный член имеет порядок (вычисляется интеграл в (3.12) при $\partial\gamma_{22}/\partial t = 1$)

$$a_{ij33}/C^{-1}(B - A)(e^{C\tau} - 1)$$

Интервал существенного (в e раз) затухания памяти равен $|1/C|$ при $C < 0$. При $C > 0$ в пластинке возникает незатухающая память. Величины A и B имеют порядки упругого и "вязкого" коэффициентов Пуассона, а $1/C$ – порядок отношения коэффициента вязкости материала к его модулю Юнга.

4. Анализ определяющих соотношений. Изгиб. В силу предыдущего

$$u_k^{(1)} = u_{1k}^{(1)} + u_{2k}^{(1)} = u_{1k}^{(1)} - y_3 \delta_{k\alpha} u_{3,\alpha x}^{(0)} + U_k(x') \tag{4.1}$$

Последнее слагаемое возникает в связи с тем, что (3.1) – задача в переменных y_3, t. Аналогично [3] проверяется, что при наличии единственного решения задачи о деформировании пластинки с определяющими соотношениями (3.7), это решение нулевое: $u_\alpha^{(0)} = 0$ $(\alpha = 1, 2)$. После этого имеем

$$u_\alpha^{(1)} = -y_3 u_{3,\alpha x}^{(0)} + U_\alpha(x'), \quad u_3^{(1)} = U_3(x') \tag{4.2}$$

Подстановка выражения (4.2) в (2.4) при $m = -2$ дает

$$\sigma_{ij}^{(-2)} = a_{ijk3} u_{k,3y}^{(2)} - y_3 a_{ij\beta\alpha} u_{3,\alpha x\beta x}^{(0)} + a_{ijk\alpha} U_{k,\alpha x} + \Gamma_{ijk3} u_{k,3y}^{(2)} - \Gamma_{ij\beta\alpha} y_3 u_{3,\alpha x\beta x}^{(0)} + \Gamma_{ijk\alpha} U_{k,\alpha x} \tag{4.3}$$

а (2.5) дает задачу

$$\sigma_{i3,3y}^{(-2)} = 0, \quad \sigma_{i3}^{(-2)} = 0 \quad \text{при} \quad y_3 = \pm ½ \tag{4.4}$$

Решение задачи (4.4) представимо в виде $\mathrm{u}^{(2)} = \mathrm{u}_1^{(2)} + \mathrm{u}_2^{(2)} + \mathrm{u}_3^{(2)}$, где $\mathrm{u}_1^{(2)}, \mathrm{u}_2^{(2)}$ аналогичны вводившимся выше функциям $\mathrm{u}_1^{(1)}, \mathrm{u}_3^{(1)}$ (только $\gamma_{\beta\alpha}$ вычисляются по $\mathrm{U}(x')$, а не по $\mathrm{u}^{(0)}(x')$), а $\mathrm{u}_3^{(2)}$ – решение задачи

$$\sigma_{i3,3y}^{u} = 0, \quad \sigma_{i3}^{u} = 0 \quad \text{при} \quad y_3 = \pm ½ \tag{4.5}$$

$$\sigma_{i3}^{u} = a_{i3k3} u_{3k,3y}^{(2)} + \Gamma_{i3k3} u_{3k,3y}^{(2)} - y_3 a_{ij\beta\alpha} u_{3,\alpha x\beta x}^{(0)} - y_3 \Gamma_{ij\beta\alpha} u_{3,\alpha x\beta x}^{(0)} \tag{4.6}$$

Решение задачи (4.5), (4.6) может быть найдено в форме

$$u_{3k,3y}^{(2)} = C_k(t) y_3, \quad \text{т.е.} \quad u_{3k}^{(2)} = C_k(t)\frac{y_3^2}{2} + B_k \tag{4.7}$$

Действительно, соотношение (4.6) сводится к $\sigma_{i3}^{u} = 0$. Подставляя выражение (4.7) в (4.5), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{u} &= a_{i3k3} C_k y_3 + \Gamma_{i3k3} C_k y_3 - y_3 a_{i3\beta\alpha} u_{3,\alpha x\beta x}^{(0)} - \\ &- y_3 \Gamma_{i3\beta\alpha} u_{3,\alpha x\beta x}^{(0)} = y_3 \{(a_{i3k3})(C - (a_{i3k3})^{-1}(a_{i3\beta\alpha} u_{3,\alpha x\beta x}^{(0)}) + \\ &+ (\Gamma_{i3k3})(C - (\Gamma_{i3k3})^{-1}(\Gamma_{i3\beta\alpha} u_{3,\alpha x\beta x}^{(0)})\} = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Операторное (в случае вязкоупругого материала – дифференциальное) уравнение (4.8) в общем случае имеет решение, даваемое нелокальными по времени операторами от кривизн $\{u_{3,\alpha x\beta x}^{(0)}\}$.

Сравнение уравнений (4.8) и (3.4) показывает, что и в отношении (4.8) справедливы выводы из предыдущего раздела. В частности, при замене осевого растяжения на цилиндрический изгиб в вышеприведенном примере, получаем те же параметры памяти для пластинки.

Таким образом, для пластинок постоянной толщины, изготовленных из однородных материалов, в общем случае определяющие уравнения пластинки и материала, из которого она изготовлена, имеют разный тип.

Обнаруженные эффекты также возникают в тонких стержнях и тонкостенных структурах [5–7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1978. 700 p.
2. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
3. *Caillerie D.* Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. in the Appl. Sci. 1984. V. 6. № 2. P. 159–191.
4. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
5. *Колпаков А.Г.* К вычислению характеристик тонких упругих стержней периодического строения // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 440–448.
6. *Колпаков А.Г.* Тонкие упругие пластинки периодического строения с внутренними односторонними контактами Журн. ПМиТФ. 1991. № 5. С. 136–142.
7. *Kolpakov A.G.* On dependence of velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Second World Congress on Comp. Mech., August 27–31. Stuttgart, FRG. 1990. Extended Abstructs of Lectures P. 453–456.

Новосибирск

Поступила в редакцию
4.III.1991