

и граничным условиям

$$v|_{r=r_1} = r_1 f_1(z), \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{r=r_2} = f_2(z), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{z=l} = 0 \quad (3.2)$$

Отметим, что если в (3.1) от экспонент перейти к гиперболическим функциям, то придем к аналогу полученного ранее результата [2].

Последние два условия (3.2) будут выполнены, если положить  $\omega = \pi/(2l)$  и  $n = 1, 3, 5 \dots$  или, что то же самое, сменить  $n$  на  $2k + 1$  ( $k = 1, 2 \dots$ ). Первые два условия (3.2) также будут выполнены, если функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  разложить по  $\sin n\omega z$  в интервале  $0 < z < l$  и затем использовать обычный метод Фурье. Прделав это, получим

$$a_n = D_+/\Delta, \quad b_n = D_-/\Delta, \quad \Delta = \Delta_+ + \Delta_- \quad (3.3)$$

$$D_{\pm} = -e^{\mp n\omega\rho_1} \left( \frac{B_n}{\omega} \mp \frac{nC_n}{\beta_1} \Delta_{\mp} \right)$$

$$\Delta_{\pm} = \left( \alpha_2 \pm \frac{1}{n\omega} \right) e^{\mp n\omega(\rho_1 - \rho_2)}$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(z) \sin n\omega z dz, \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(z) \sin n\omega z dz$$

$$\alpha_i = \alpha(r_i), \quad \rho_i = \rho(r_i) \quad (i = 1, 2), \quad \beta_1 = \beta(r_1)$$

Формулы (3.1), (3.3), естественно, в равной степени относятся к любой из трех комбинаций модулей сдвига (2.6) – (2.8). Вычисление крутящего момента (1.3) на свободном торце  $z = 0$  не вызывает затруднений.

Отметим, что если в (2.1) ввести обозначение  $F(\xi) = \int f(\xi) d\xi$ , то эти функции примут форму дифференциального оператора.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 368 с.
2. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971. 240 с.
3. Назаров Г.И., Пучков А.А. Кручение осесимметричного анизотропного тела со смешанными краевыми условиями на боковой поверхности // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 1094–1099.
4. Назаров Г.И. Точное решение уравнений газовой динамики // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 3. С. 113–120.

Киев

Поступила в редакцию  
26.XI.1991

УДК 539.3:518.12

© 1992 г. М.А. Сумбатян

#### МЕТОД ГЛОБАЛЬНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ПРОБЛЕМЕ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗА ДЕФЕКТА

Для решения некорректных обратных задач применяется метод, основанный на вероятностном подходе к минимизации сглаживающего функционала невязки. Метод применим как к линейным, так и к нелинейным задачам, причем в сравнении с классическими не требуется обращать оператор прямой задачи. В качестве приложения рассматривается применение к задаче восстановления формы рассеивателя по дифрагированному на нем волновому полю.

1. Многие задачи математической физики сводятся к решению операторного уравнения вида

$$Ax = f \quad (1.1)$$

где  $A$  – вполне непрерывный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве  $H$ . При этом проблема нахождения  $x$  по известной правой части  $f$  является обратной задачей. Известно [1], что уравнение вида (1.1) относится к некорректным по А.Н. Тихонову задачам в том смысле,

что малому изменению правой части может соответствовать большое изменение решения  $x$ . Это приводит к неустойчивости основных классических численных методов при их применении к уравнению (1.1).

Для преодоления указанных трудностей предложены специальные численные подходы [1]. Большинство из них так или иначе основано на идеях регуляризации уравнения (1.1) путем соответствующего малого возмущения оператора  $A$ .

В данной работе предлагается подход, естественный с физической точки зрения. Если подбирать случайным образом приближения  $x_n$ , то об их близости к точному решению  $x^*$  можно судить по близости левой и правой частей, а именно по малости значений функционала невязки

$$\psi(x_n) = \|Ax_n - f\|^2 \quad (1.2)$$

Однако известно [1], что решение некорректного уравнения (1.1) нельзя сводить к минимизации функционала  $\psi(x)$  (1.2). Вместо этого необходимо ввести сглаживающий функционал [1]

$$\psi_\epsilon(x) = \|Ax - f\|^2 + \epsilon R(x), \quad 0 < \epsilon \ll 1 \quad (1.3)$$

Для минимизации функционала (1.3) используем метод глобального случайного поиска ([2], алгоритм 5.1.3). В отличие от прямого случайного поиска он обладает важными свойствами, которые позволяют существенно ускорить подбор хорошего приближения  $x_n$ :

1) выбор случайных значений  $x_n$  в окрестности точек  $X$  с меньшим значением  $\psi_\epsilon(X)$  происходит чаще, чем в окрестности точек  $Y$  с большим значением  $\psi_\epsilon(Y)$ ;

2) области, в которых выбираются случайные значения  $x_n$ , постепенно стягиваются в малые окрестности точек с наименьшими значениями  $\psi_\epsilon(x)$ .

Данный алгоритм апробирован [2] на примерах минимизации конечномерных функций с малым числом переменных. Здесь применим его к проблеме решения функциональных уравнений в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим сначала в качестве модельного примера интегральное уравнение первого рода

$$Ax = \int_0^{2\pi} \cos[\rho \cos(\varphi - \theta)] x(\theta) d\theta = f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \rho = \text{const} \quad (1.4)$$

ядро которого бесконечно дифференцируемо, что говорит о сильной некорректности этого уравнения.

Будем разыскивать его решение в виде ряда Фурье с конечным числом членов

$$x(\theta) = \sum_{m=0}^M a_m \cos m\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (1.5)$$

Здесь для простоты рассмотрен случай, когда правая часть  $f(\varphi)$  (как и ядро) – четная функция по  $\varphi$ . При таком подходе минимизация функционала (1.3) описанным выше методом глобального случайного поиска сводится к выбору случайных наборов вещественных чисел  $(a_0, a_1, \dots, a_M)_n$ . При этом регуляризирующий функционал предлагается выбирать в виде [1]

$$R(x) = \|x\|_{W_2^2(0, 2\pi)} \quad (1.6)$$

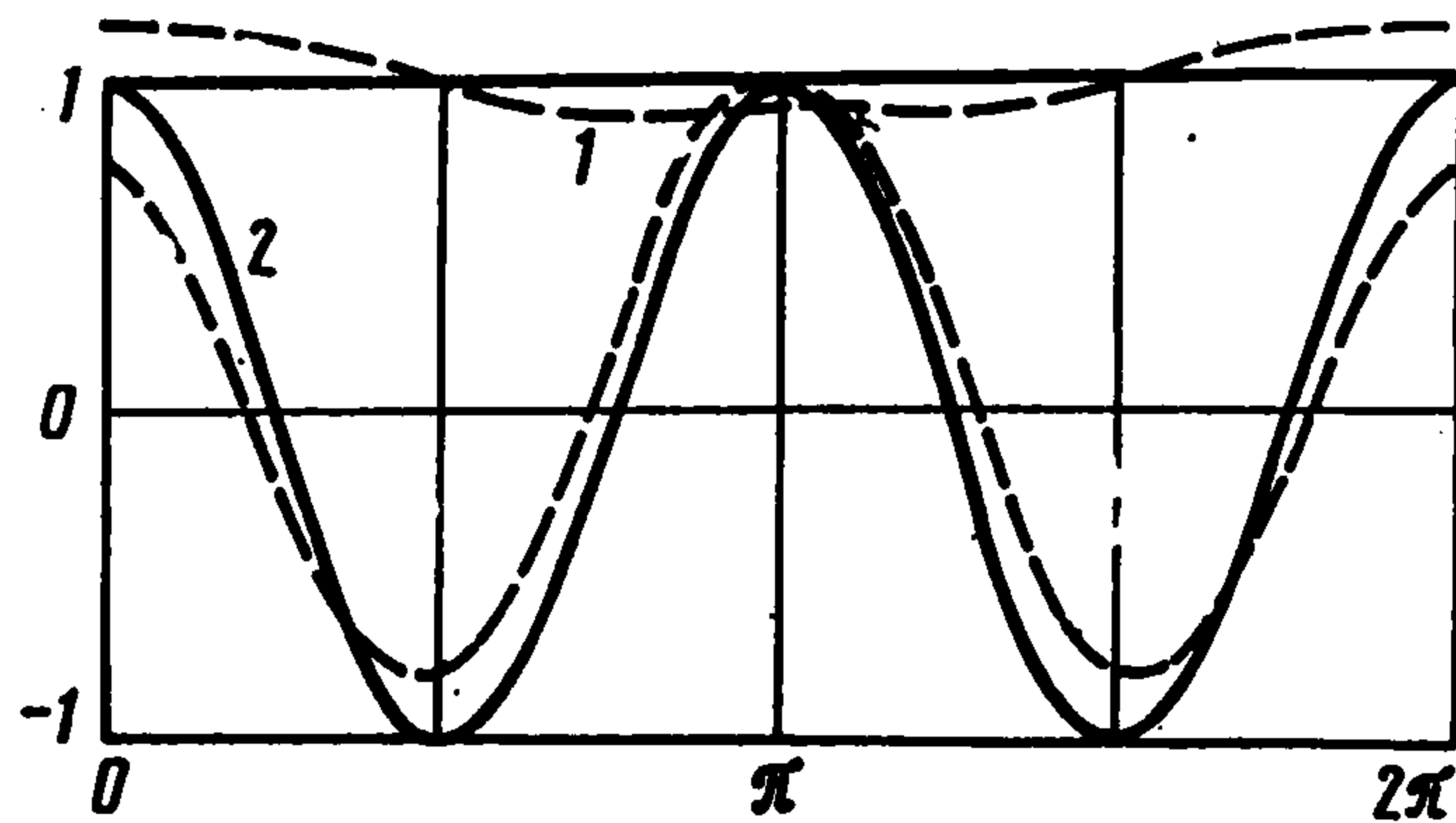
$W_2^2$  – пространство Соболева, основное пространство  $H = L_2(0, 2\pi)$ .

На фиг. 1 отражены результаты применения предлагаемого алгоритма (штриховые линии) для двух правых частей  $f_1(\varphi) = 2\pi J_0(\rho)$  и  $f_2(\varphi) = -2\pi J_2(\rho) \cos 2\varphi$  (кривые 1 и 2). При этом точные решения для этих двух случаев имеют соответственно вид  $x_1(\theta) = 1$ ,  $x_2(\theta) = \cos 2\theta$  и показаны сплошными линиями. Значения параметров  $\rho = 1$ ,  $M = 4$ ,  $\epsilon = 10^{-2} \dots 10^{-4}$ . Число случайных выборок решения, определяющее число вычислений прямого оператора  $A$ , равнялось  $N = 300$ .

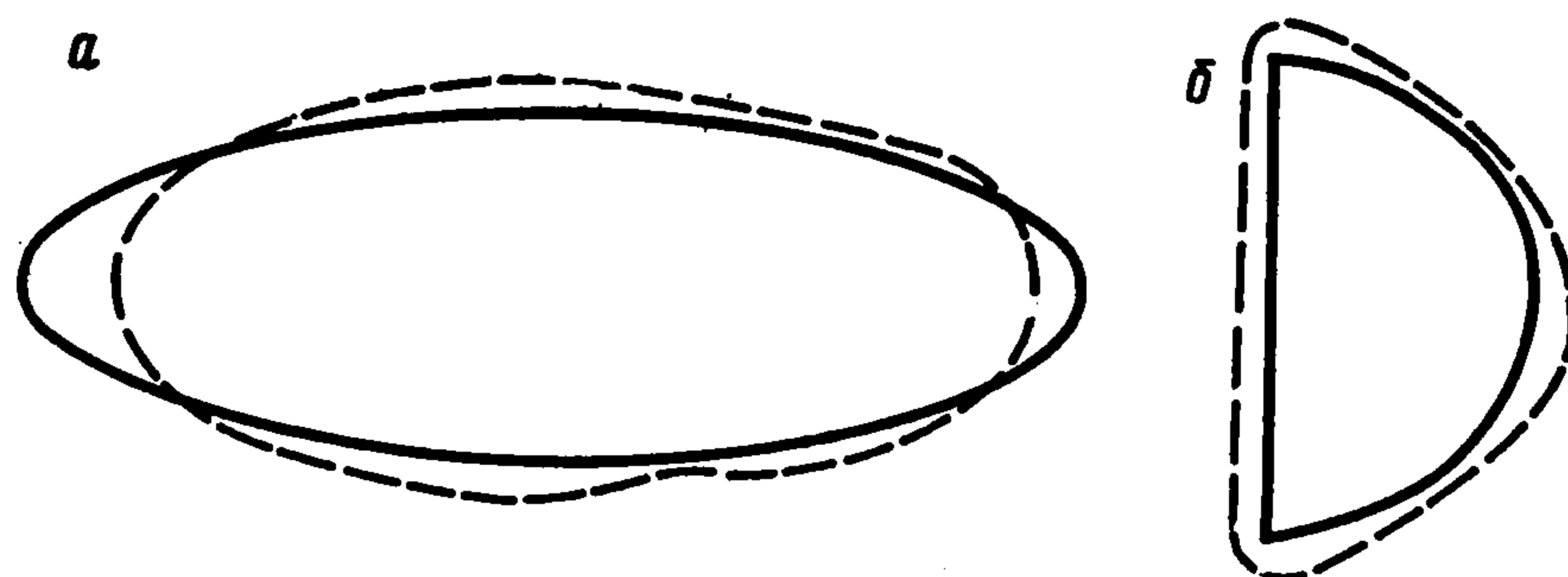
2. Подход, изложенный в разд. 1, особенно эффективен в задачах, где функционал (1.3) имеет много локальных минимумов, а также в задачах с большими градиентами функционала, когда нахождение глобального минимума регулярными методами практически невозможно. Этими свойствами, как показывает подробный анализ, отличаются задачи распознавания объекта по рассеянному на нем волновому полю.

При исследовании проблемы распознавания образа дефекта для простоты ограничимся двумерным случаем и простейшей моделью акустической среды, описываемой одним уравнением Гельмгольца. Тогда задачу удастся свести к системе двух нелинейных интегральных уравнений [3]

$$\int_l e^{ik(q \cdot x)} g(x) ds_x = f(\alpha), \quad 0 \leq \alpha < 2\pi \quad (2.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\int_l H_0^{(1)}(k|x-y|)g(x)ds_x = e^{ik(q \cdot y)}, \quad y \in l \quad (2.2)$$

$$q = -\{\cos \alpha, \sin \alpha\}$$

Здесь  $k$  – волновое число,  $H_0^{(1)}$  – функция Ганкеля. Неизвестными в (2.1), (2.2) являются функция  $g(x)$ , связанная с нормальной производной от скорости, и функция  $x \in l$ , определяющая положение граничного контура  $l$  (последняя может быть задана, например, в какой-либо параметрической форме).

Система (2.1), (2.2) записана для случая, когда известна амплитуда обратного рассеяния от объекта во всем диапазоне изменения угла сканирования  $\alpha \in (0, 2\pi)$ . Такой метод сканирования, при котором направления падающей и отраженной волны совпадают, соответствует наиболее распространенному в ультразвуковом контроле эхо-методу. В нем один и тот же ультразвуковой датчик работает и на излучение, и на прием. При этом известна амплитуда отраженного сигнала  $f(\alpha)$ , фаза, как правило, неизвестна. Считается, что подобные измерения в принципе можно провести для любого угла падения  $\alpha \in (0, 2\pi)$ .

Прямая задача дифракции состоит в вычислении функции  $f(\alpha)$  по известному контуру  $l$ . Для этого сначала надо решить граничное интегральное уравнение (2.2) относительно функции  $g(x)$ ,  $x \in l$ , а затем вычислить квадратуру (2.1). Очевидно, что соответствующий оператор  $Ax$  в (1.1) является нелинейным. При этом вычисление прямого действия нелинейного оператора сводится к решению одного линейного уравнения и одной квадратуры. Такая ситуация очень типична для нелинейных обратных задач. В отличие от этого обратный оператор  $A^{-1}$  (если он вообще существует) сильно нелинеен. Применение регулярных методов для обращения уравнения (1.1) требовало бы вычисления производной Фреше для оператора  $A$ , что сильно затруднено. В то же время подход, описанный в п. 1, требует вычисления лишь прямого оператора, что, как отмечено выше, связано только с линейными операциями.

На фиг. 2 приведены результаты восстановления двух объектов – эллипса с полуосями 3:1 и полукруга с диаметром, равным 10, по амплитуде кругового обратного рассеяния. При этом длина волны  $\lambda = 2\pi$ . Как и в модельном примере, параметрическое представление контура  $l$  бралось в виде конечного отрезка ряда Фурье с  $M = 4$ . Истинный контур показан сплошной линией, а результат применения описанного алгоритма штриховой. Характерный размер объектов  $\sim (1 \dots 1,5)\lambda$ . Среднее время счета на РС/АТ – 286/287 – 20–25 мин.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
2. Жигляевский А.А. Математическая теория глобального случайного поиска. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 293 с.
3. Воронич И.И., Сумбатян М.А. Восстановление образа дефекта по рассеянному волновому полю в акустическом приближении // Изв. АН СССР, МТТ. 1990. № 6. С. 79–84.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
7.VIII.1991

УДК 539.3

© 1992 г. А.Г. Колпаков

### ОБ ЭФФЕКТЕ ДОЛГОВРЕМЕННОЙ ПАМЯТИ В ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНКАХ

Показано, что эффект долговременной памяти, обнаруженный у композиционных материалов [1, 2], может возникать в пластинках, причем в последнем случае он необязательно связан с наличием неоднородной структуры. Анализ задачи проводится на основании использования двух-масштабного асимптотического разложения [3].

1. **Формулировка задачи.** Рассмотрим трехмерную задачу в тонком слое  $S \times [-\epsilon/2, \epsilon/2]$  постоянной толщины  $\epsilon$  (при  $\epsilon \rightarrow 0$  область стягивается к двумерной области  $S \subset R^2$  – пластинке):

$$S_{ij,j} = f_i \text{ в } S \times [-\epsilon/2, \epsilon/2] \quad (1.1)$$

$$u(x, t) = 0 \text{ на } \partial S \times [-\epsilon/2, \epsilon/2] \quad (1.2)$$

$$\sigma_{i3} = g_i^\pm \text{ на поверхностях } \{x' \in S, x_3 = \pm \epsilon/2\} \\ u(x, 0) = 0 \text{ в } S \times [-\epsilon/2, \epsilon/2] \quad (1.3)$$

Здесь  $\{\sigma_{ij}\}$  – тензор напряжений,  $u$  – перемещения пластинки, рассматриваемой как трехмерное тело,  $x' = (x_1, x_2)$  – координаты в плоскости пластинки.

Определяющие соотношения возьмем в виде

$$\sigma_{ij} = \epsilon^a (a_{ijkl} u_{k,l} + \Gamma_{ijkl} u_{k,l}) \quad (1.4)$$

где  $\{a_{ijkl}\}$  – тензор упругих постоянных,  $\{\Gamma_{ijkl}\}$  – тензор из линейных (по времени) операторов. В случае вязкоупругого материала  $\Gamma_{ijkl} = b_{ijkl} \partial/\partial t$ . Множитель  $\epsilon^a$  в (1.4) при  $a = -1$  гарантирует нулевую жесткость пластинки в ее плоскости, а при  $a = -3$  – ненулевую жесткость на изгиб при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Рассмотрим наиболее общий случай  $a = -3$  (включающий, как будет видно, и случай  $a = -1$ ). Величины  $a_{ijkl}$ ,  $\Gamma_{ijkl}$  ( $b_{ijkl}$  в случае вязкоупругого материала) предполагаются ограниченными равномерно по  $\epsilon$ .

2. **Асимптотическое разложение.** Рассмотрим пластинку постоянной толщины, изготовленную из однородного материала. Используем следующее асимптотическое разложение (являющееся специальным случаем ранее предложенного разложения [3]):

$$u = u^{(0)}(x', t) + \epsilon u^{(1)}(x', y_3, t) + \dots \\ \sigma_{ij} = \epsilon^{-3} \sigma_{ij}^{(-3)}(x', y_3, t) + \epsilon^{-2} \sigma_{ij}^{(-2)}(x', y_3, t) + \dots; \quad y_3 = x_3/\epsilon \quad (2.1)$$

Подстановка разложения (2.1) в (1.1), замена операторов дифференцирования  $\partial/\partial x_i$  на  $\epsilon^{-1} \partial/\partial y_3$ ,  $\partial/\partial x_\alpha$  (здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2, латинские – 1, 2, 3) и приравнивание выражений при одинаковых степенях  $\epsilon$  приводят к уравнениям

$$\sigma_{i3,3y}^{(m+1)} + \sigma_{i\alpha,\alpha x}^{(m)} = 0, \quad m \neq 0 \\ ,3y = \partial/\partial y_3, \quad ,\alpha x = \partial/\partial x_\alpha \quad (2.2)$$