Определим значения первых двух частот осесимметричных свободных колебаний полусферического купола при граничном условии $u(\pi/2) = 0$.

Решение уравнения (2) выполнено при помощи таблиц [1]: $m_1 = 1{,}92$; $m_2 = 3{,}95$. Далее используя уравнение (6), находим $\lambda_{01} = 0{,}718$; $\lambda_{02} = 0{,}920$, что дает для двух первых частот значения 1530 и 1960 1/с. Экспериментально исследовались [2] свободные колебания стального полусферического купола диаметром 76,2 см и толщиной 0,159 см, жестко закрепленного по контуру. Первые две частоты оказались такими: 1540 и 1880 1/с, что хорошо соответствует расчету.

В заключение отметим, что проведенное в работе исследование позволяет достаточно легко определять частоты и формы свободных безмоментных колебаний сферических оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Таблицы присоединенных функций Лежандра. М.: ВЦ АН СССР, 1962. 322 с.
2. *Baker W.E.* Axisymetric modes of vibrations of thin spherical shells // T. Acoust. Soc. Amer. 1961. V. 33. P. 1749–1758.

Москва

Поступила в редакцию 12.II.1991

УДК 539.3

© 1992 г. **Г.И. Назаров, А.А. Пучков**

К ЗАДАЧЕ О КРУЧЕНИИ ПОЛОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА С ПЕРЕМЕННЫМИ МОДУЛЯМИ СДВИГА

Выделены классы функций для модулей сдвига, зависящих от цилиндрической системы координат, и для них построены общие решения для функций напряжения и перемещения в виде конечного интегрального оператора, состоящего из вполне определенных переменных коэффициентов и произвольной аналитической функции комплексного аргумента. Приведен пример решения задачи со смешанными краевыми условиями о кручении полого цилиндра, один конец которого жестко закреплен.

1. Основные уравнения. Общее решение. Кручение анизотропного неоднородного тела вращения в цилиндрической системе координат r, θ, z (z – направлена по оси симметрии) характеризуется линейной системой уравнений эллиптического типа [1, 2]

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} - r^3 G_1 \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z} + r^3 G_2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь ψ – функция напряжений, φ – функция перемещения, $G_{\theta z} = G_1(r)$, $G_{r\theta} = G_2(r)$ – модули сдвига.

При этом силовые напряжения $\tau_{\theta z} = \tau_1(r, z)$, $\tau_{r\theta} = \tau_2(r, z)$ и перемещение $u_r = v(r, z)$ определяется через функции ψ и φ по формулам

$$\tau_1 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r} = rG_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad \tau_2 = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} = rG_2\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad v = r\varphi \tag{1.2}$$

а крутящий момент на торце $z = 0$ – формулой

$$M = 2\pi\int_{r_1}^{r_2} r^2\tau_1\,dr = 2\pi[\psi(r_2, 0) - \psi(r_1, 0)] \tag{1.3}$$

При произвольных модулях сдвига, зависящих от радиуса, было построено [3] общее решение системы (1.1) в виде комплексных бесконечных интегральных и дифференциальных рядов.

Выделим классы функций для модулей сдвига, которые позволят для системы (1.1) построить общее решение в виде конечного оператора.

В дальнейшем рассмотрим случай, когда $r \neq 0$ (полый цилиндр).

2. Построение общего решения. Ищем решение системы (1.2) в виде интегрального оператора

$$\psi = \mathrm{Re}\,[\alpha(r)f(\zeta) + A\int f(\zeta)\,d\zeta] \tag{2.1}$$

$$\varphi = \mathrm{Im}\,[\beta(r)f(\zeta) + B\int f(\zeta)\,d\zeta]$$

Здесь A, B – произвольные постоянные, $\alpha(r)$, $\beta(r)$ – действительные функции от одного аргумента r, а $f(\zeta)$ – произвольная аналитическая функция комплексной переменной ζ:

$$\zeta = \int \rho dr + iz \quad (\rho = \sqrt{G_1/G_2}) \tag{2.2}$$

Составляем соответствующие производные от выражений (2.1) и вносим их в систему уравнений (1.1). В результате, используя известные свойства аналитических функций комплексного переменного и освобождаясь от знаков Re и Im, придем к двум уравнениям

$$(\alpha' - Br^3 G_1 + A\rho) f + (\alpha\rho - r^3 G_1 \beta) f' = 0 \tag{2.3}$$
$$[r^3 G_2 (\beta' + B\rho) - A] f + (r^3 G_2 \beta\rho - \alpha) f' = 0$$

которые удовлетворятся при произвольной функции $f(\zeta)$, если на α, β наложить условия

$$\alpha = B\int r^3 G_1 dr - A\int \rho dr, \quad \beta = A\int \frac{dr}{r^3 G_2} - B\int \rho dr \tag{2.4}$$

$$\alpha = r^3 \sqrt{G_1 G_2}\, \beta \tag{2.5}$$

В равенствах (2.4) опущены аддитивные постоянные интегрирования как несущественные. Подстановкой можно убедиться, что в случае $A = 1$, $B = 0$ равенство (2.5) удовлетворяется, например, для следующих модулей сдвига:

$$1)\ G_1 = ar^p, \quad G_2 = br^q \quad (q = (p-2)/3) \tag{2.6}$$

$$2)\ G_1 = ar^{-3} e^{pr}, \quad G_2 = br^{-3} e^{qr} \quad (q = p/3) \tag{2.7}$$

$$3)\ G_1 = ar^{-4} \ln^2 r, \quad G_2 = br^{-2} \ln^2 r \tag{2.8}$$

Здесь a, b – постоянные, p – произвольное число (целое, дробное, положительное, отрицательное), которые можно использовать при аппроксимации модулей сдвига.

В случае $A = 0$, $B = 1$ условие (2.5) удовлетворяется для модулей (2.6) при $q = 3p + 10$, а для модулей (2.7) – при $q = 3p$. Для функций (2.8) равенство (2.5) не может быть удовлетворено.

В случае $A \neq 0$, $B \neq 0$ условие (2.5) выполняется только для функции (2.6), причем $p = -4$, $q = -2$.

Формулы (2.6) – (2.8) пригодны при $r \neq 0$, то есть для определения напряженного состояния полых цилиндров.

Для каждого случая (2.6) – (2.8) функции α, β, ζ и φ, ψ (2.1) принимают конкретный вид.

Модули сдвига типа (2.6) при $p = q$ ($p = \pm 1$, $p = \pm 2$) и при $q = p + 2$ ($p \neq -4$ и $p = -4$) рассматривались [2] при определении иным путем функции напряжений в виде рядов, содержащих функции Бесселя первого и второго рода мнимого аргумента ir; были выделены случаи, когда они вырождаются в гиперболические или степенные функции со сложными показателями.

Если в формулах (2.1) функцию $f(\zeta)$ задать произвольно в виде степенной или какой-нибудь иной элементарной аналитической функции комплексной переменной, то все они, как и их суммы, дадут целый набор различных обратных краевых задач, часть из которых может оказаться полезной для практики.

Для решения прямой граничной задачи функцию $f(\zeta)$ возьмем в виде сходящегося экспоненциального ряда [4]

$$f(\zeta) = \Sigma n^{-1} (a_n e^{n\omega\zeta} + b_n e^{-n\omega\zeta}) \tag{2.9}$$

в котором a_n, b_n – произвольные действительные числа (в общем случае комплексные), ω – характерное число конкретной задачи, определяемое из краевых условий. Здесь и далее суммирование ведется от $n = 1$ до $n = \infty$.

3. Полый цилиндр со смешанными краевыми условиями на боковых поверхностях. Рассмотрим неоднородный полый круговой цилиндр длиной l с внутренним радиусом r_1 и наружным r_2. Пусть на внутренней поверхности задано перемещение, а на внешней – поверхностная сила. Торец $z = l$ считаем жестко закрепленным (консоль), а на свободном торце ($z = 0$) приложены силы, приводящие к крутящему моменту (1.3).

Вносим функцию (2.9) в формулы (2.1) ($A = 1$, $B = 0$) и выделяем вещественные и мнимые части. Придем к выражениям

$$\psi = \Sigma n^{-1} [(\alpha + (n\omega)^{-1}) a_n e^{n\omega\rho} + (\alpha - (n\omega)^{-1}) b_n e^{-n\omega\rho}] \cos n\omega z \tag{3.1}$$
$$\varphi = \beta \Sigma n^{-1} (a_n e^{n\omega\rho} - b_n e^{-n\omega\rho}) \sin(n\omega z)$$

и граничным условиям

$$v|_{r=r_1} = r_1 f_1(z), \quad \frac{\partial\psi}{\partial z}\Big|_{r=r_2} = f_2(z), \quad \frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{z=0} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{z=l} = 0 \tag{3.2}$$

Отметим, что если в (3.1) от экспонент перейти к гиперболическим функциям, то придем к аналогу полученного ранее результата [2].

Последние два условия (3.2) будут выполнены, если положить $\omega = \pi/(2l)$ и $n = 1, 3, 5 \ldots$ или, что то же самое, сменить n на $2k+1$ $(k = 1, 2 \ldots)$. Первые два условия (3.2) также будут выполнены, если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ разложить по $\sin n\omega z$ в интервале $0 < z < l$ и затем использовать обычный метод Фурье. Проделав это, получим

$$a_n = D_+/\Delta, \quad b_n = D_-/\Delta, \quad \Delta = \Delta_+ + \Delta_- \tag{3.3}$$

$$D_\pm = -e^{\mp n\omega\rho_1}\left(\frac{B_n}{\omega} \mp \frac{nC_n}{\beta_1}\Delta_\mp\right)$$

$$\Delta_\pm = \left(\alpha_2 \pm \frac{1}{n\omega}\right)e^{\mp n\omega(\rho_1-\rho_2)}$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(z)\sin n\omega z dz, \quad B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_2(z)\sin n\omega z dz$$

$$\alpha_i = \alpha(r_i), \quad \rho_i = \rho(r_i) \quad (i = 1, 2), \quad \beta_1 = \beta(r_1)$$

Формулы (3.1), (3.3), естественно, в равной степени относятся к любой из трех комбинаций модулей сдвига (2.6) – (2.8). Вычисление крутящего момента (1.3) на свободном торце $z = 0$ не вызывает затруднений.

Отметим, что если в (2.1) ввести обозначение $F(\zeta) = \int f(\zeta)d\zeta$, то эти функции примут форму дифференциального оператора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 368 с.
2. *Лехницкий С.Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971. 240 с.
3. *Назаров Г.И., Пучков А.А.* Кручение осесимметричного анизотропного тела со смешанными краевыми условиями на боковой поверхности // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 1094–1099.
4. *Назаров Г.И.* Точное решение уравнений газовой динамики // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 3. С. 113–120.

Киев

Поступила в редакцию
26.XI.1991

УДК 539.3:518.12

© 1992 г. М.А. Сумбатян

МЕТОД ГЛОБАЛЬНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ПРОБЛЕМЕ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗА ДЕФЕКТА

Для решения некорректных обратных задач применяется метод, основанный на вероятностном подходе к минимизации сглаживающего функционала невязки. Метод применим как к линейным, так и к нелинейным задачам, причем в сравнении с классическими не требуется обращать оператор прямой задачи. В качестве приложения рассматривается применение к задаче восстановления формы рассеивателя по дифрагированному на нем волновому полю.

1. Многие задачи математической физики сводятся к решению операторного уравнения вида

$$Ax = f \tag{1.1}$$

где A – вполне непрерывный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве H. При этом проблема нахождения x по известной правой части f является обратной задачей. Известно [1], что уравнение вида (1.1) относится к некорректным по А.Н. Тихонову задачам в том смысле,