УДК 539.3:534.1

© 1992 г. В.М. Любимов, Г.И. Пшеничнов

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ БЕЗМОМЕНТНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Исследуется задача о собственных колебаниях безмоментной сферической оболочки. Она сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных управлений четвертого порядка в перемещениях. Показано, что имеется два класса решений этой системы: 1) отличны от нуля все три компоненты смещений, 2) отличны от нуля лишь тангенциальные компоненты. Для каждого из этих классов система уравнений сводится к разрешающим уравнениям второго порядка, т.е. в каждом классе имеется по два линейно-независимых решения. Получено выраженное в присоединенных функциях Лежандра регулярное решение для класса *1* и разрешающее уравнение для класса *2*. Обнаруженные два класса решений позволяют достаточно эффективно решать задачи колебаний безмоментной сферической оболочки при любых тангенциальных краевых условиях.

Уравнения движения безмоментной сферической оболочки и граничные условия в стандартных обозначениях запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial u\sin\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)-(1+\sigma)\frac{\partial w}{\partial\theta}+$$

$$+(1-\sigma)\left[u+\frac{1}{2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{\partial v\sin\theta}{\partial\theta}\right)\right]-\frac{(1-\sigma^2)\rho R^2}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial u\sin\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)-\frac{(1+\sigma)}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}- \qquad (1)$$

$$-(1-\sigma)\left[v+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial v\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right]-\frac{(1-\sigma^2)\rho R^2}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{1+\sigma}{\sin\theta}\left(\frac{\partial u\sin\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)-2(1+\sigma)w-\frac{(1-\sigma^2)\rho R^2}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

$$k_1N_1=(1-k_1)Eu,\quad k_2S=(1-k_2)Ev\quad \text{при}\quad \theta=\theta_0 \qquad (2)$$

$$0<k_1<1,\quad 0<k_2<1$$

где N_1 – нормальное меридиональное усилие, S – сдвигающее усилие, k_1, k_2 – коэффициенты упругого закрепления.

Запишем соотношения упругости и выражения для деформаций

$$N_1=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\epsilon_1+\sigma\epsilon_2),\quad S=\frac{Eh}{1+\sigma}\omega \qquad (3)$$

$$\epsilon_1=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}-w\right),\quad \epsilon_2=\frac{1}{R}\left(u\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\theta}-w\right)$$

$$\omega=\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v}{\sin\theta}\right)\right] \qquad (4)$$

Используя метод разделения переменных, получим регулярное в вершине оболочки решение задачи (1), (2) для указанного выше класса *1* в следующем виде:

$$u=(1+\sigma)C_{mn}(dP_m^n(\theta)/d\theta)\cos n\varphi\cos\omega t$$

$$v=-(1+\sigma)C_{mn}(P_m^n(\theta)/\sin\theta)\sin n\varphi\cos\omega t$$

$$w=[1-\sigma-m(m+1)+(1-\sigma^2)\lambda_n^2]C_{mn}P_m^n(\theta)\cos n\varphi\cos\omega t,\quad \lambda_n^2=\rho R^2\omega^2/E \qquad (5)$$

где $P_m^n(\theta)$ – присоединенные функции Лежандра ($n=1, 2, \ldots$), а m – корни алгебраического уравнения

$$(1-\lambda^2)m(m+1)-[2+(1+3\sigma)\lambda^2-(1-\sigma^2)\lambda^n]=0 \qquad (6)$$

Задача решается отдельно для каждого числа n волн вдоль параллели оболочки.

Итак, для определения индекса m в присоединенных функциях Лежандра, через которые выражается решение (5), получено квадратное уравнение (6). Его корни m_1 и m_2 действительны, их сумма равна − 1. Известно, что в этом случае функции Лежандра $P^n_{m_1}$ и $P^n_{m_2}$ линейно-зависимы. Таким образом, двух линейно-независимых решений, выражающихся через присоединенные функции Лежандра, не существует.

Покажем, что в этом классе решений (все три компоненты перемещения отличны от нуля) второго регулярного в вершине оболочки решения вообще не существует.

Разделяя переменные, решения системы (1) берем в виде

$$u = U(\theta)\cos n\varphi\cos\omega t,\quad v = V(\theta)\sin n\varphi\cos\omega t,\quad w = W(\theta)\cos n\varphi\cos\omega t \tag{7}$$

После подстановки в систему (1) и сокращения множителей, зависящих от φ и t из третьего уравнения, имеем выражение

$$L(U, V) = (2 - X)W$$
$$L(U, V) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{dU\sin\theta}{d\theta} + nV\right),\quad X_{\pm} = \frac{1-\sigma}{E}\rho R^2\omega^2 \tag{8}$$

Подставив его в первые два уравнения, запишем их в виде

$$a\frac{dW}{d\theta} + bU - \frac{n(1-\sigma)}{\sin\theta}L(V, U) = 0$$
$$-\frac{n}{\sin\theta}aW + bV + (1-\sigma)\frac{dL(V, U)}{d\theta} = 0 \tag{9}$$
$$a = 1 - \sigma - X_-,\ b = 1 - \sigma + X_-$$

Умножая первое уравнение (9) на $\sin\theta$, дифференцируя его по θ, затем складывая полученное уравнение со вторым уравнением (9), предварительно умноженным на n, и используя равенство (8), предварительно умноженное на $\sin\theta$, получим

$$a\sin\theta\frac{d^2W}{d\theta^2} + a\cos\theta\frac{dW}{d\theta} - \left[\frac{na}{\sin\theta} - b\sin\theta(2 - X_-)\right]W = 0 \tag{10}$$

Таким образом, разрешающим уравнением оказалось уравнение второго порядка, а не четвертого, как можно было предположить. Регулярное решение этого уравнения будет совпадать с компонентой W в (5), если в выражении для нее опустить множитель $C_{mn}\cos n\varphi\cos\omega t$. Второе решение этого уравнения из-за наличия особенности при второй производной в (10) в вершине оболочки ($\theta = 0$) будет нерегулярным.

При $n \neq 0$, когда требуется удовлетворение двум граничным условиям (2), необходимо иметь еще одно регулярное решение. Поскольку краевые условия (2) не содержат функцию прогиба W, было предположено, что при $n \neq 0$ существует второй класс решений системы (1) вида (7) при $W \equiv 0$.

В связи с этим необходимо показать, что при $W = 0$ система трех уравнений для двух неизвестных функций U и V совместна и приводится к разрешающему уравнению второго порядка.

Действительно, при $W \equiv 0$ система примет вид

$$bU - \frac{2n(1-\sigma)}{\sin\theta}L(V, U) = 0$$
$$bV + 2(1-\sigma)dL(V, U)/d\theta = 0,\quad L(U, V) = 0 \tag{11}$$

Умножая первое уравнение (11) на $\sin\theta$ и дифференцируя его по θ, можно убедиться, что второе уравнение (11) является следствием первого и третьего.

Рассмотрим теперь систему из первого и третьего уравнений (11). Находя V из третьего уравнения и подставляя в первое, получим уравнение второго порядка для компоненты U

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} + 3\frac{dU}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta + \left(2a - 1 + \operatorname{ctg}^2\theta - \frac{n^2}{\sin^2\theta}\right)U = 0$$

При помощи этого уравнения можно найти второе регулярное решение, которое будет линейно-независимым по отношению к ранее найденному регулярному решению (5).

Пример расчета. Рассмотрим осесимметричные колебания оболочки в виде сферического купола ($n = 0$).

Из краевых условий (2) необходимо удовлетворить только первому. Для частного случая $u(\theta_0) = 0$ из этого условия и решения (5) следует, что частотное уравнение имеет вид

$$dP^0_m/d\theta = 0 \quad\text{при}\quad \theta = \theta_0 \tag{2}$$

Определим значения первых двух частот осесимметричных свободных колебаний полусферического купола при граничном условии $u(\pi/2) = 0$.

Решение уравнения (2) выполнено при помощи таблиц [1]: $m_1 = 1{,}92$; $m_2 = 3{,}95$. Далее используя уравнение (6), находим $\lambda_{01} = 0{,}718$; $\lambda_{02} = 0{,}920$, что дает для двух первых частот значения 1530 и 1960 1/с. Экспериментально исследовались [2] свободные колебания стального полусферического купола диаметром 76,2 см и толщиной 0,159 см, жестко закрепленного по контуру. Первые две частоты оказались такими: 1540 и 1880 1/с, что хорошо соответствует расчету.

В заключение отметим, что проведенное в работе исследование позволяет достаточно легко определять частоты и формы свободных безмоментных колебаний сферических оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Таблицы присоединенных функций Лежандра. М.: ВЦ АН СССР, 1962. 322 с.
2. *Baker W.E.* Axisymetric modes of vibrations of thin spherical shells // T. Acoust. Soc. Amer. 1961. V. 33. P. 1749–1758.

Москва

Поступила в редакцию 12.II.1991

УДК 539.3

© 1992 г.

Г.И. Назаров, А.А. Пучков

К ЗАДАЧЕ О КРУЧЕНИИ ПОЛОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА С ПЕРЕМЕННЫМИ МОДУЛЯМИ СДВИГА

Выделены классы функций для модулей сдвига, зависящих от цилиндрической системы координат, и для них построены общие решения для функций напряжения и перемещения в виде конечного интегрального оператора, состоящего из вполне определенных переменных коэффициентов и произвольной аналитической функции комплексного аргумента. Приведен пример решения задачи со смешанными краевыми условиями о кручении полого цилиндра, один конец которого жестко закреплен.

1. Основные уравнения. Общее решение. Кручение анизотропного неоднородного тела вращения в цилиндрической системе координат r, θ, z (z – направлена по оси симметрии) характеризуется линейной системой уравнений эллиптического типа [1, 2]

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} - r^3 G_1 \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z} + r^3 G_2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь ψ – функция напряжений, φ – функция перемещения, $G_{\theta z} = G_1(r)$, $G_{r\theta} = G_2(r)$ – модули сдвига.

При этом силовые напряжения $\tau_{\theta z} = \tau_1(r, z)$, $\tau_{r\theta} = \tau_2(r, z)$ и перемещение $u_r = v(r, z)$ определяется через функции ψ и φ по формулам

$$\tau_1 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r} = rG_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad \tau_2 = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} = rG_2\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad v = r\varphi \tag{1.2}$$

а крутящий момент на торце $z = 0$ – формулой

$$M = 2\pi\int_{r_1}^{r_2} r^2\tau_1 dr = 2\pi[\psi(r_2, 0) - \psi(r_1, 0)] \tag{1.3}$$

При произвольных модулях сдвига, зависящих от радиуса, было построено [3] общее решение системы (1.1) в виде комплексных бесконечных интегральных и дифференциальных рядов.

Выделим классы функций для модулей сдвига, которые позволят для системы (1.1) построить общее решение в виде конечного оператора.

В дальнейшем рассмотрим случай, когда $r \neq 0$ (полый цилиндр).

2. Построение общего решения. Ищем решение системы (1.2) в виде интегрального оператора

$$\psi = \mathrm{Re}\,[\alpha(r)f(\zeta) + A\int f(\zeta)\,d\zeta] \tag{2.1}$$

$$\varphi = \mathrm{Im}\,[\beta(r)f(\zeta) + B\int f(\zeta)\,d\zeta]$$