Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 5, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. В.Н. Кутрунов

КВАТЕРНИОННЫЙ МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С использованием кватернионов [1] предлагается новый метод регуляризации интегральных уравнений теории упругости, идентичный для плоских и пространственных задач. Записываются регуляризаторы и регуляризованные уравнения. Метод не использует теорию символа, как это делалось ранее [2–4], или переход к комплексной форме [5]. Для интегральных уравнений теории упругости техника кватернионов не применялась, но использовалась при получении общих решений уравнений Ляме[1].

Определение 1. Кватернионами называются числа вида $a_0 + a_i e_i = a_0 + a$, где e_i – мнимые единицы, a_0, a_i – действительные числа $(i = 1, 2, 3)$, a – мнимый кватернион.

Действия над кватернионами определяются через действия над мнимыми единицами. Если мнимые единицы интерпретировать как орты декартова базиса, то операция умножения может быть выражена через скалярные и векторные произведения $e_i^2 = e_i e_i = -e_i \cdot e_i = -1$, $e_{ijk} e_k = e_i e_j$ $(i \neq j)$, e_{ijk} – символ Леви–Чивита. Таблица умножения позволяет интерпретировать произведение произвольных кватернионов $z_1 = a_0 + a$, $z_2 = b_0 + b$ через операции скалярного и векторного умножений $z_1 z_2 = a_0 b_0 + a_0 b + b_0 a + a \times b - a \cdot b$. Произведение кватернионов некоммутативно, верен сочетательный закон.

Пусть $z(x_1, x_2, x_3)$ – произвольная кватернионная функция и $\nabla = e_i \partial/\partial x_i$ – кватернионный оператор Гамильтона.

Определение 2. Функцию z назовем кватернионной аналитической (K-аналитической) функцией, если она удовлетворяет соотношению $\nabla z = 0$.

В плоском случае будет рассматриваться функция двух переменных $z(x_1, x_2) = z_0(x_1, x_2) + e_i z_i(x_1, x_2)$, но с тремя мнимыми единицами.

Пусть l – замкнутая кусочно-гладкая кривая на плоскости S, S^+ – внутреняя область, ограниченная кривой l, S^- – внешняя область, τ – касательный, а n – нормальный векторы к кривой l, k – вектор, перпендикулярный плоскости S, $k = n \times \tau$.

Векторы τ, n, k могут быть разложены по базису e_1, e_2, e_3, где орты e_1, e_2 лежат в плоскости S, $e_3 \parallel k$. Разложения можно интерпретировать, как мнимые кватернионные функции и сформулировать ряд теорем.

Теорема 1. Пусть z, q – произвольные, дифференцируемые в S^+ кватернионные функции двух переменных x_1, x_2 и n – мнимый кватернион, тогда имеет место равенство:

$$\int_l znq\,dl = \int_{S^+} z\nabla q\,dS + \int_{S^+} \overline{\bar{q}\,\bar{\nabla}\bar{z}}\,dS \tag{1}$$

(черта означает операцию сопряжения (перед мнимыми единицами кватерниона знак меняется на противоположный)). Теорема доказывается применением формулы Стокса, связывающей поверхностные и криволинейные интегралы.

Обозначим $h = \nabla_x \ln|r|$, где $|r| = |x - y|$, $x, y \in S$.

Теорема 2. Пусть $q(x)$ $(x \in S^+)$ – произвольный кватернион, непрерывный вплоть до границы и имеющий ограниченные в S^+ производные. Тогда

$$\int_l hn_x q_x\,dl_x - \int_{S^+} h\nabla_x q(x)\,dS_x = \begin{cases} 0, & y \in S^- \\ 2\pi q(y), & y \in S^+ \end{cases} \tag{2}$$

---

[1] *Григорьев Ю.М.* Решение пространственных статических задач теории упругости методами теории кватернионных функций: (01.02.04): Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск. 1985. 13 с.

Это доказывается подстановкой в равенство (1) кватерниона $z = h$. Если точка $y \in S^+$, то необходимо выбросить из области S^+ круг радиуса ϵ с центром в этой точке, записать равенство (1) и устранить ϵ к нулю. Следует учесть, что $\nabla_x h = 0$ всюду, за исключением точки $x = y$.

Теорема 3. Пусть $q(x)$ – произвольный кватернион, непрерывный вплоть до границы и имеющий ограниченные в S^- производные. Пусть $\lim q(x) = 0$ при $|x| \to \infty$. Тогда справедливо равенство, отличающееся от (2) сменой знаков перед первым интегралом и в обозначениях областей S^+ и S^-.

Теорема 4. (Аналог интеграла Гаусса в поле кватернионов.) Для кусочно-гладкой кривой l имеет место равенство

$$J(y) = \int_l h n_x \, dl_x = \begin{cases} 0, & y \in S^- \\ -\omega, & y \in l \\ -2\pi, & y \in S^+ \end{cases}$$

где ω – угол, образованный касательными к кривой в точке $y \in l$.

Определение 3. Аналогом потенциала двойного слоя (или аналогом интеграла типа Коши) называется интеграл

$$Q(y) = \int_l h n_x q(x) \, dl_x, \quad y \in S^{\pm}$$

Здесь $q(x)$ – произвольный кватернион. Для $y \in l$ интеграл $Q(y)$ сингулярен. Введем оператор A

$$Aq = \pi^{-1} Q(y), \quad y \in l \tag{3}$$

Теорема 5. (Аналог интегральной формулы Коши.) Пусть $q(x)$ – K-аналитическая функция в области S^+, тогда имеет место ее представление через граничное значение

$$Q(y) = \begin{cases} 0, & y \in S^- \\ -\omega q(y), & y \in l \\ -2\pi q(y), & y \in S^+ \end{cases}$$

Доказывается при помощи теорем 2, 4.

При помощи теорем 2, 5 похожий результат получается для функций K-аналитических в области S^-.

Отсюда для граничных значений таких функций, заданных в областях S^+ или S^-, получится соответственно

$$Aq = -\pi^{-1} \omega q, \quad Aq = \pi^{-1}(2\pi - \omega) q \tag{4}$$

Для ляпуновской кривой $\omega = \pi$, и последние равенства объединяются в одно:

$$Aq = \pm q \tag{5}$$

Теорема 6. Функция $Q(y)$ является K-аналитической как в области S^+, так и в области S^-.

Для доказательства необходимо применить оператор ∇_y к функции $Q(y)$, занести его под знак интеграла, учесть, что $\nabla_y h = -\nabla_x h$ и $\nabla_x h = 0$, если $x \neq y$.

Теорема 7. Пусть на кусочно-гладкой кривой l задан кватернион $q(x)$, который можно продлить в области S^+ или S^- с сохранением условия Гельдера[2]:

$$|q(x') - q(x'')| < c\,|x' - x''|^{\alpha}$$

$$c > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x', x'' \in S^+ \cap S^-$$

Тогда для граничных значений функции $Q(y)$ имеем

$$Q^+ = (-2\pi + \omega) q + \pi A q, \quad Q^- = \omega q + \pi A q \tag{6}$$

$Q^{\pm}$ – предельные граничные значения из областей $S^{\pm}$ соответственно.

Приведенные теоремы по записи напоминают ряд известных теорем из теории аналитических функций, теория потенциала. Отличие в том, что в этих теоремах фигурируют кватернионные функции, кватернионные произведения.

---

[2] Условия теоремы 7 можно выполнить не единственным образом. Если функция $q(x)$ удовлетворяет на границе l условию Гельдера, то она продолжима в области S^+ или S^- даже гармонически.

Теорема 8. Пусть $q(x)$ – произвольный кватернион на l, удовлетворяющий условиям теоремы 7. Тогда

$$A^2 q = \pi^{-2}(2\omega\pi - \omega^2)\, q + \pi^{-1}(2\pi - 2\omega) Aq \tag{7}$$

Для ляпуновской кривой получим

$$A^2 q = q \tag{8}$$

Доказательство тождества (7) получается из первого или второго равенства (4), если вместо q подставить соответственно Q^+ или Q^- из (6). Подстановка возможна, так как $Q^{\pm}$ – предельные значения K-аналитической функции Q.

Теорема 9. Справедливо равенство $A = A^{-1}$.

Доказательство следует из (8) и верно для ляпуновских кривых l.

Если обозначить $Aq = p$, то из (8) получается пара преобразований

$$Aq = p, \quad Ap = q \tag{9}$$

Пусть p_0, p, q_0, q – действительные и мнимые части кватернионов p и q. Пользуясь векторно-скалярной интерпретацией умножения кватернионов и разделением мнимой и действительной частей, можно перейти к векторной форме записи соотношений (9).

Введем операторы

$$Bq_0 = \pi^{-1} \int_l q_0 h \cdot n_x \, dl_x, \qquad Cq_0 = \pi^{-1} \int_l q_0 h \times n_x \, dl_x$$

$$Dq' = \pi^{-1} \int_l [-q' h \cdot n_x + (h \times n_x) \times q'] \, dl_x$$

$$Fq' = \pi^{-1} \int_l q \cdot (h \times n) \, dl_x \tag{10}$$

Тогда равенства (9) примут вид

$$-Bq_0 - Fq' = p_0, \qquad Cq_0 + Dq' = p' \tag{11}$$

$$-Bp_0 - Fp' = q_0, \qquad Cp_0 + Dp' = q' \tag{12}$$

Далее у векторов p', q' опускается штрих.

Теорема 10. Операторы C, D, F сингулярны, оператор B вполне непрерывен.

Интеграл Bp_0 известен как потенциал двойного слоя.

До сих пор предполагалось, что $q = q(x_1, x_2)$ $(x_1, x_2 \in S)$, и вектор q имел произвольное направление. Предположим теперь, что он лежит в плоскости S.

Теорема 11. Пусть $q \perp k$. Тогда

$$Fq = 0, \qquad Cq_0 \parallel k, \qquad Dq \perp k \tag{13}$$

$$FDq = 0, \qquad q_0 + B^2 q_0 = -FCq_0, \qquad DCq_0 = CBq_0 \tag{14}$$

$$D^2 q = q \tag{15}$$

Доказательство. Если $x, y \in S$, то вектор h лежит в плоскости S и равенства (13) получаются непосредственно из определения (10) операторов F, C, D.

Из равенств (11) и (13) найдем $p_0 = -Bq_0$, $p = Cq_0 + Dq$. Подстановка p_0, p в (12) и учет произвольности q_0 и q приводит к равенствам (14), (15).

Интегральные уравнения плоского деформированного состояния, полученные на основе тождества Сомилианы (прямая постановка), имеют вид

$$0{,}5u + Gu = ½u - \alpha Du - \beta Tu = Kf \tag{16}$$

где $\alpha = (1 - 2\nu)/(4(1 - \nu))$, $\beta = 1/(2(1 - \nu))$, $u(x)$, $f(x)$ – векторы перемещения и напряжения в точках x границы l.

Оператор D задан формулой (10), а

$$Kf = \int_l f(x) \cdot U(x, y)\, dl$$

$$U(x, y) = -\frac{1 + \nu}{4\pi E(1 - \nu)} [(3 - 4\nu) I \ln |r| - rh]$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, I – единичная матрица, rh – диадное произведение векторов r и h [6].

Оператор T в (16) – вполне непрерывный интегральный оператор, вид которого для дальнейшего не важен.

Вся сингулярность интегрального уравнения (16) содержится в операторе D.

Теорема 12. Эквивалентным регуляризатором уравнения (16) является оператор $R = 0{,}5I + \alpha D$. Регуляризованное уравнение имеет вид

$$(0{,}25 - \alpha^2)u - \beta RTu = RKf \tag{17}$$

Доказательство. Уравнение (17) получается умножением (16) на оператор R и учетом тождества (15). Полная непрерывность оператора RT следует из полной непрерывности одного из сомножителей, оператора T.

Из-за равенства (15), верного для любого q, однородное уравнение $R\varphi = 0$ имеет только тривиальное решение, если $\alpha \neq \pm 0{,}5$. По этой причине [3] регуляризация будет эквивалентной.

Теорема 13. Эквивалентным регуляризатором уравнения (16) является оператор $R' = 0{,}5I - G$. Регуляризованное уравнение имеет вид

$$0{,}25u - G^2u = R'Kf \tag{18}$$

Доказательство. Так как к регуляризатору всегда можно добавить произвольный вполне непрерывный оператор [2], то оператор $R' = R + \beta T$ является регуляризатором. Регуляризованное уравнение (18) можно записать явно, если возвести в квадрат оператор G и учесть тождество (15), т.е.

$$G^2 = (\alpha D + \beta T)^2 = \alpha^2 I + \beta^2 T^2 + \alpha\beta(DT + TD) \tag{19}$$

Регуляризованное уравнение (18) может оказаться предпочтительным для расчетов по двум причинам.

1°. Из-за уменьшения нормы оператора G^2 по сравнению с нормой оператора G.

2°. Из-за уменьшения числа арифметических операций при использовании равенства (19) (устранено вычисление D^2).

В непрямой постановке первая и вторая задачи теории упругости сводятся к определению векторов плотностей φ и ψ некоторых потенциалов:

$$\pm 0{,}5\varphi + G\varphi = u, \qquad \pm 0{,}5\psi + G^*\psi = f \tag{20}$$

Оператор G^* сопряжен с оператором G. Можно показать, что $G^* = -\alpha D + T_1$, где T_1 – известный вполне непрерывный оператор. По этой причине схема регуляризации уравнений (20) совпадает с регуляризацией уравнения (16). В частности, регуляризатором уравнений (20) будет любой из операторов $\pm 0{,}5I + \alpha D$, $\pm 0{,}5I - G$, $\pm 0{,}5I - G^*$. Все эти операторы совпадают друг с другом с точностью до вполне непрерывных слагаемых.

Кватернионная техника регуляризации может быть распространена и на интегральные уравнения пространственных задач теории упругости. Известны утверждения, что в теории регуляризации следует различать случаи одной и нескольких переменных ([2] с. 7, [3] с. 197).

Теоремы 1–10 верны и для пространственного случая, если в них выполнить ряд замен.

Вместо плоских областей S^+ и S^-, ограниченных контуром l, будем рассматривать трехмерные области V^+ и V^-, ограниченные замкнутой поверхностью S. Функция $\ln|r|$ заменяется на величину $-1/|r|$ и π – на 2π. Эти замены выполняются и в операторах B, C, D, F.

Для пространственного случая теоремы 1–10 частично могут быть получены переводом в кватернионную форму результатов работ [7], [8].

Интегральные уравнения пространственных задач теории упругости в операторной форме имеют вид (16), (20). Операторы G, G^*, K можно взять из работы [6].

Существенно, что имеют место разбиения $G = -\alpha D + T_1$, $G^* = -\alpha D + T_2$, где T_1, T_2 – известные вполне непрерывные операторы, т.е. с точностью до вполне непрерывных слагаемых справедливы равенства $D = -G/\alpha = -G^*/\alpha$, последнее из них известно [9].

Вместо теоремы 11 доказывается

Теорема 14. Для операторов B, C, D, F справедливы тождества

$$B^2q_0 - FCq_0 = q_0, \quad -BFq + FDq = 0$$

$$-CBq_0 + DCq_0 = 0, \quad -CFq + D^2q = q \tag{21}$$

Доказательство. Исключая из равенств (11), (12) величины p_0, p', а затем полагая последовательно нулю q_0 и q', получим тождества (21).

Теорема 15. Оператор $D^3 - D$ вполне непрерывен.

Доказательство. Из равенств (21) можно получить следующее следствие:

$$D^3q - Dq = CBFq \tag{22}$$

Оператор $D^3 - D$ вполне непрерывен, так как его можно заменить на композицию CBF, в которой вполне непрерывен сомножитель B.

Теорема 16. Регуляризатором уравнения (16) является оператор

$$\tfrac{1}{4}\alpha^{-2}(1-4\alpha^2)I + \tfrac{1}{2}\alpha^{-1}D + D^2 = R \tag{23}$$

Регуляризованное уравнение имеет вид

$$0{,}125\alpha^{-2}(1-4\alpha^2)u - \alpha CBFu + RT_1u = RKf \tag{24}$$

Доказательство. Пусть R – полином второй степени от D с неопределенными коэффициентами. Умножая уравнение (16) на оператор R и используя (22), подберем коэффициенты так, чтобы исчезали степени оператора D. Получим утверждения теоремы.

Замена в (23) D на $-G/\alpha$ или $-G^*/\alpha$ приводит к регуляризаторам, записанным через исходные операторы G или G^*, например

$$R' = \tfrac{1}{2}(1-4\alpha^2)I - \tfrac{1}{2}G + G^2 \tag{25}$$

Из-за действительности спектра G уравнение $R'\varphi = 0$ имеет только тривиальное решение, поэтому R' – эквивалентный регуляризатор.

Регуляризаторы для уравнений (20) могут быть получены из (25). Для этого умножим равенства (20) на $\delta = \pm 1$, получим

$$\varphi + \delta G\varphi = \delta u, \qquad \psi + \delta G^*\psi = \delta u$$

Замена в (25) G на δG или δG^* приводит к эквивалентным регуляризаторам, пригодным для любого из уравнений (20).

Некоторые из регуляризаторов типа (25) были получены ранее [4] с применением теории символа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.
2. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
3. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
4. *Мазья В.Г., Сапожникова В.Д.* Замечание о регуляризации сингулярной системы изотропной теории упругости // Вестн. ЛГУ. Сер. Математика. Механика. Астрономия. 1964. № 7. С. 165–167.
5. *Кутрунов В.Н.* Регуляризация сингулярных интегральных уравнений плоской задачи теории упругости на основе спектра // Исследования по механике строительных конструкций и материалов. Л.: ЛИСИ, 1990. С. 9–14.
6. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
7. *Бицадзе А.В.* Обращение одной системы сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93. № 4. С. 595–597.
8. *Бицадзе А.В.* Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его применения // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93. № 3. С. 389–392.
9. *Перлин П.И.* Применение регулярного представления сингулярных интегралов к решению второй основной задачи теории упругости // ПММ, 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 366–371.

Москва

Поступила в редакцию
12.VIII.1991