Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 5, 1992

УДК 62–50

© 1992 г. Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова

СПОСОБ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Для линейной задачи оптимального позиционного управления динамической системой в условиях неопределенности [1–3] предлагается метод непрерывной коррекции управлений, рассчитанный на использование в реальном движении микропроцессорных устройств. Считая возмущения достаточно регулярными, предлагается при выработке текущих значений управления использовать в дополнение к [4] результаты анализа реализовавшегося отрезка траектории. Приводятся результаты численного моделирования на ЭВМ.

Проблема построения оптимальных обратных связей, поставленная в начале 50-х годов, оказалась чрезвычайно сложной [5] и не решена до сих пор, если не считать отдельных примеров [1, 2, 6] и одного специфического случая [7, 8]. Авторы данной работы предложили другой подход к проблеме [4]. Ниже этот подход развивается на случай, когда в обратную связь в дополнение к оптимальному регулятору включается прогнозирующее устройство, которое, обрабатывая отрезки реализовавшейся траектории динамической системы, прогнозирует возможное действие возмущения на некотором отрезке времени в будущем. На базе этой информации регулятор вырабатывает текущее значение управляющего воздействия.

Предлагаемый способ управления динамической системой может оказаться эффективным для определенных типов возмущений. Он переходит в классический способ управления с помощью оптимальной обратной связи, если отказаться от процедуры прогнозирования. Следует отметить, что при использовании стохастических моделей достаточно регулярных (в вероятностном смысле) возмущений прогнозирование представляет типичную операцию, выполняемую обратной связью [9].

1. **Постановка задачи.** В классе кусочно-непрерывных функций $u(t), t\in T=[0,t^*]$, рассмотрим линейную задачу оптимального управления динамической системой

$$J(u)=h_0'x(t^*)\to\max \tag{1.1}$$

$$x^\cdot=Ax+bu,\quad x(0)=x_0 \tag{1.2}$$

$$Hx(t^*)=g \tag{1.3}$$

$$|u(t)|\leqslant 1,\quad t\in T\quad (x\in R^n,\ g\in R^m,\ u\in R) \tag{1.4}$$

Как известно [1, 3], оптимальным программным управлением задачи (1.1)–(1.4) называют каждую кусочно-непрерывную функцию $u^0(\cdot)=(u^0(t),\ t\in T)$, которая удовлетворяет ограничению $|u^0(t)|\leqslant 1$, $t\in T$, переводит (оптимальную) траекторию $x^0(t)$, $t\in T$, системы (1.2) в момент t^* на определяемое ограничениями (1.3) терминальное множество $X^*=\{x\in R^n\colon Hx=g\}$ и доставляет максимальное значение критерию качества (1.1).

Оптимальные программные управления используются, как правило, для оценки потенциальных возможностей динамической системы, но редко применяются для практического управления из-за того, что они не способны учесть действия возмущений, неизбежных при реальном функционировании системы (1.1)–(1.4).

В связи с этим в приложениях отдают предпочтение позиционным оптимальным управлениям (оптимальным управлениям типа обратной связи). Под последними понимают любые кусочно-непрерывные функции $u^0(x,t)$, $x\in R^n$, $t\in T$, которые удовлетворяют неравенству $|u^0(x, t)| \leqslant 1$, $x \in R^n$, $t \in T$, и для любой допустимой позиции $\{\tau, x^*(\tau)\}$ порождают решение системы

$$x^{\cdot} = Ax + bu^0(x, t), \quad x(\tau) = x^*(\tau)$$

совпадающее с оптимальной траекторией для этой позиции. Позиционное управление $u^0(x, t) \in T$, $x \in R^n$, $t \in T$ в отличие от программного $u^0(t) \in T$, $t \in T$ способно реагировать на многие неучтенные возмущения $w(t)$, $t \in T$, т.е. траектории $x^*(t)$, $t \in T$, системы

$$x^{\cdot} = Ax + bu^0(x, t) + w(t), \quad t \in T, \quad x(0) = x_0 \tag{1.5}$$

вполне удовлетворительны с практической точки зрения.

Были изложены [4] алгоритмы работы регуляторов, которые в режиме реального времени строят управления $u^*(t)$, $t \in T$, совпадающие с реализациями $u^0(x^*(t), t)$, $t \in T$, оптимального управления типа обратной связи вдоль реального процесса $x^*(t)$, $t \in T$, удовлетворяющего уравнению (1.5) при действии неучтенного в (1.1) – (1.4) возмущения $w(t)$, $t \in T^0 = [0, t^0]$, $0 < t^0 < t^*$; $w(t) \equiv 0$, $t \in]t^0, t^*]$. Достижение этого свойства является основным принципом, на базе которого строились регуляторы [4]. Регуляторы можно строить, исходя и из других принципов. В данной статье излагается алгоритм работы регулятора, который при выработке управляющего воздействия использует результаты анализа отрезка реализовавшейся траектории.

Предположим, что регулятор построен и проработал на промежутке времени $T_0(\tau) = [0, \tau]$, $0 < \tau < t^0$. Обозначим через $u^*(t)$, $t \in T_0(\tau)$, выработанное регулятором управление, через $x^*(t)$, $t \in T_0(\tau)$, – реализовавшуюся траекторию системы

$$x^{\cdot *} = Ax^* + bu^* + w(t), \quad x^*(0) = x_0, \quad t \in T_0(\tau) \tag{1.6}$$

Функция

$$z^w(t) = x^*(t) - z^u(t), \quad z^u(t) = F(t, 0)x_0 + \int_0^t F(t, s)bu^*(s)\,ds$$

$$t \in T, \quad (F^{\cdot}(t) = AF(t), \quad F(0) = E, \quad F(t, \tau) = F(t)F^{-1}(\tau))$$

характеризует дрейф траектории системы (1.6), вызванный действием возмущения $w(t)$, $t \in T$. Предположим, что возмущения $w(t)$, $t \in T$, непрерывны, достаточно регулярны и подчиняются некоторым (неизвестным) закономерностям, в силу чего функции $z^w(t)$, $t \in T^0$, допускают хорошую аппроксимацию в заданном конечно-параметрическом классе функций

$$z(\cdot, v) = (z(t, v), \ t \in T^0)$$

$$v \in V = \{v \in R^r\colon d_* \leqslant v \leqslant d^*\}, \quad r \geqslant 2n$$

Основываясь на этом, в текущий момент $\tau > 0$ рассмотрим отрезок

$$z_\tau^w(\cdot) = (z^w(t), \ \mu(\tau) \leqslant t \leqslant \tau), \quad 0 \leqslant \mu(\tau) < \tau$$

реализовавшегося дрейфа траектории и аппроксимируем его функцией $z(t, v(\tau))$, $\mu(\tau) \leqslant t \leqslant \tau$, из упомянутого конечно-параметрического семейства:

$$\begin{aligned} \nu(\tau) &= \max_{i=1,2,\dots,n} \ \max_{t \in [\mu(\tau), \tau]} |z_i^w(t) - z_i(t, v(\tau))| = \\ &= \min_{v} \ \max_{i=1,2,\dots,n} \ \max_{t \in [\mu(\tau), \tau]} |z_i^w(t) - z_i(t, v)| \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$v \in V, \quad z^w(\tau) = z(\tau, v), \quad z^w(\mu(\tau)) = z(\mu(\tau), v)$$

Выберем отрезок $[\tau, \lambda(\tau)]$, $\tau \leqslant \lambda(\tau) \leqslant t^0$, и будем считать, что на этом отрезке дрейф траектории $z^w(t)$, $t \in [\tau, \lambda(\tau)]$, совпадает с функцией $z(t, v(\tau))$, $t \in [\tau, \lambda(\tau)]$. Предполагаем, что $\mu(\tau)$, $\lambda(\tau)$ – некоторые непрерывные заданные функции τ: $0 \leqslant \mu(\tau) \leqslant \tau \leqslant \lambda(\tau) \leqslant t^0$.

Кусочно-непрерывную функцию $u_\tau(t) = u(t \mid \tau, x^*(\tau), v(\tau))$, $t \in T_\tau = [\tau, t^*]$, удовлетворяющую ограничению (1.4), назовем τ – допустимым управлением, если ей соответствует траектория $x_\tau(t) = x(t \mid \tau, x^*(\tau), v(\tau))$, $t \in T_\tau$, системы (1.2), которая выходит в момент τ из состояния $x^*(\tau)$, испытывает на отрезке $[\tau, \lambda(\tau)]$ дрейф $z^w(t) = z(t, v(\tau))$ и достигает в момент t^* множества X^*; τ – допустимое управление $u^0_\tau(t) = u^0(t \mid \tau, x^*(\tau), v(\tau))$, $t \in T_\tau$, назовем τ-оптимальным, если оно доставляет максимум функционалу $J(u) = h'_0 x(t^*)$: $J(u^0_\tau) = \max J(u_\tau)$.

Кусочно-непрерывную функцию $u^0(t, x, v)$, $t \in T$, $x \in R^n$, $v \in V$, будем называть оптимальным управлением типа обратной связи (позиционным оптимальным управлением), если функция

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x(t) + z(t, v) - F(t, \tau) z(\tau, v), & t \in [\tau, \lambda(\tau)] \\ x(t) + F(t, \lambda(\tau)) z(\lambda(\tau), v) - F(t, \tau) z(\tau, v), & t \in]\lambda(\tau), t^*] \end{cases}$$

(представляющая результат наложения на траекторию $x(t)$, $t \in T_\tau$, системы

$$\dot{x} = Ax + bu^0(t, x, v), \quad x(\tau) = x^*$$

дрейфа $z^w(t) = z(t, v)$ на отрезке $t \in [\tau, \lambda(\tau)]$) совпадает с τ – оптимальной траекторией $x^0(t \mid \tau, x^*, v)$, $t \in T$, при любых τ, x^*, v из области управляемости.

Если оптимизируемую систему с математической моделью (1.2), испытывающую в реальных условиях действие неизвестных возмущений $w(t)$, $t \in T$, замкнуть обратной связью $u^0(t, x, v)$, то ее поведение будет описываться уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu^0(t, x(t), v(t)) + w, \quad x(0) = x_0 \tag{1.8}$$

где $v(t)$ – решение задачи (1.7) при $\tau = t \in T^0$.

Обозначим через $w^*(t)$, $t \in T^0$; $w^*(t) \equiv 0$, $t^0 < t \leqslant t^*$, возмущение, реализовавшееся в рассматриваемом процессе. Ему будет соответствовать траектория $x^*(t)$, $t \in T$, уравнения (1.8), функция $v^*(t)$, $t \in T$, из задачи (1.7) и управление $u^*(t) = u^0(t, x^*(t), v^*(t))$, $t \in T$, которое циркулирует в замкнутой системе (1.7), (1.8).

Устройство, вырабатывающее в режиме реального времени в каждом конкретном процессе функционирования системы управление $u^*(t)$, $t \in T$, назовем оптимальным регулятором.

В приведенном определении регулятора не предполагается, что оптимальное управление $u^0(t, x, v)$, $t \in T$, $x \in R^n$, $v \in V$, типа обратной связи известно.

Целью данного исследования является описание алгоритма работы регулятора (разд. 4). Предварительно в разд. 2, 3 описываются алгоритмы построения в режиме реального времени τ – оптимального управления $u^0_\tau(\cdot)$ и функции $v(\tau)$, $\tau \in T^0$.

Замечания. 1°. Другой тип регулятора получается, если считать, что дрейф $z^w(t)$ траектории на отрезке $t \in [\tau, \lambda(\tau)]$ представляет некоторую функцию из $v(\tau)$ – окрестности функции $z(t, v(\tau))$, $t \in [\tau, \lambda(\tau)]$. В этом случае при определении τ-допустимого и τ-оптимального управлений естественно использовать принцип получения гарантированного результата.

2°. При построении аппроксимации $z(t, v(\tau))$, $t \in [\mu(\tau), \tau]$, функции $z^w(t)$, $t \in [\mu(\tau), \tau]$, к ограничениям $z^w(\tau) = z(\tau, v)$, $z^w(\mu(\tau)) = z(\mu(\tau), v)$ можно добавить требование совпадения этих двух функций в нескольких точках из отрезка $[\mu(\tau), \tau]$.

2. Определяющие уравнения регулятора. Из определения τ-оптимального управления $u^0_\tau(\cdot) = (u^0_\tau(t)$, $t \in T_\tau)$ следует, что оно является решением задачи

$$h'_0 x(t^*) \to \max, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(\tau) = 0 \tag{2.1}$$

$$Hx(t^*) = g(\tau); \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T_\tau$$

где

$$g(\tau) = g - H[F(t^*, \tau)(x^*(\tau) - z(\tau, v(\tau))) + F(t^*, \lambda(\tau)) z(\lambda(\tau), v(\tau))] \tag{2.2}$$

Опишем алгоритм построения в режиме реального времени решения $u_\tau^0(\cdot)$ задачи (2.1) при $\tau \in T^0 = [0, t^0]$ в предположении, что $g(\tau)$ – некоторая известная m – вектор-функция, которая вместе с заданным моментом t^0 обладает следующим свойством

$$\operatorname{rank}(HF(t^*, t)b,\ t \in T_*(\tau)) = m, \quad \forall \tau \in T^0$$

где $T_*(\tau)$ – точки разрыва функции $u_\tau^0(t) = u^0(t \mid \tau, g(\tau))$, $t \in]\tau, t^*]$. Решение $u_\tau^0(\cdot)$ задачи (2.1) имеет вид [10]

$$u_\tau^0(t) = \operatorname{sign} \psi_\tau'(t) b, \quad t \in T_\tau \tag{2.3}$$

где $\psi_\tau(t)$, $t \in T_\tau$, – решение сопряженной системы $\dot\psi = -A'\psi$, $\psi(t^*) = h_0 - H'y(\tau)$, $y(\tau) = (y_i(\tau),\ i = 1, 2, \ldots, m)$ – оптимальный вектор потенциалов.

Из (2.3) следует, что решение задачи (2.1) определяется совокупностью

$$t_i(\tau),\ i = 1, 2, \ldots, p(\tau);\quad y(\tau)$$

состоящей из точек $t_i(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, p(\tau)$, в которых функция $\Delta_\tau(t) = \psi_\tau'(t)b$, $t \in T_\tau$, обращается в нуль, и оптимального вектора потенциалов. (Считаем, что $t_i(\tau) < t_{i+1}(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, p(\tau) - 1$.)

Построим функции $k_i(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, p(\tau)$:

$$k_i(\tau) = -1, \text{ если } \Delta_\tau(t) < 0, \quad t \in]t_i(\tau), t_{i+1}(\tau)[$$

$$k_i(\tau) = 1, \text{ если } \Delta_\tau(t) > 0, \quad t \in]t_i(\tau), t_{i+1}(\tau)[$$

$$i = 0, 1, \ldots, p(\tau),\ (t_0(\tau) = \tau,\ t_{p(\tau)+1}(\tau) = t^*)$$

Пусть при $\tau = \tau_0$ на решении задачи (2.1) выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \tau < t_1(\tau), \quad t_{p(\tau)} < t^*; \quad \partial\Delta_\tau(t)/\partial t|_{t = t_i(\tau)} \neq 0 \\ i = 1, 2, \ldots, p(\tau) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Очевидно, что функции $p(\tau)$, $k_i(\tau)$, $i = 0, 1, \ldots, p(\tau)$, $\tau \in T^0$, являются кусочно-постоянными (дискретными). При учете этого факта и того, что при $\tau = \tau_0$ имеют место соотношения (2.4), получаем, что

$$\begin{gathered} p(\tau) = p(\tau_0) = p, \quad k_i(\tau) = k_i(\tau_0) = k_i \\ i = 0, 1, \ldots, p; \quad \tau \in T^+(\tau_0) \end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь $T^+(\tau_0)$ – достаточно малая правосторонняя окрестность точки τ_0.

Далее, анализируя (2.3), (2.4), заключаем, что непрерывные функции

$$t_i(\tau), \quad i = 1, 2, \ldots, p; \quad y(\tau) \tag{2.6}$$

определяющие решение задачи (2.1), однозначно задаются системой уравнений

$$\begin{gathered} f(\tau; t_i(\tau),\ i = 1, 2, \ldots, p;\ g(\tau)) = 0 \\ q_j(t_i(\tau),\ i = 1, 2, \ldots, p;\ y(\tau)) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p \end{gathered} \tag{2.7}$$

где

$$f(\tau; t_i,\ i = 1, 2, \ldots, p;\ g) = \sum_{i=0}^{p} k_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} HF(t^*, t) b\,dt - g$$

$$q_j(t_i,\ i = 1, 2, \ldots, p;\ y) = (h_0' - y'H) F(t^*, t_j) b, \qquad j = 1, 2, \ldots, p$$

$$t_0 = \tau, \quad t_{p+1} = t^*$$

Назовем систему (2.7) определяющими уравнениями регулятора.

Численный метод построения решения (2.6) уравнений (2.7) на участках постоянства функций (2.5), правила нахождения точек $\bar\tau \in T^0$ разрыва функций (2.5), а также правила стыковки решений (2.6) уравнений (2.7) в момент $\bar\tau$ были описаны ранее [4].

Из (2.7) видно, что поведение совокупности (2.6) зависит от функции $g(\tau)$, которая в свою очередь строится согласно (2.2) и зависит от решения задачи (1.7).

Прежде чем переходить к описанию алгоритма работы регулятора, опишем алгоритм работы устройства, которое в режиме реального времени вырабатывает решение $v(\tau)$ задачи (1.7). Назовем это устройство предиктором.

3. Алгоритм работы предиктора. Предположим, что

$$z(t, v) = \sum_{j=1}^{r} v_j \omega_j(t), \quad t \in T$$

где $\omega_j(t) = (\omega_{ij}(t),\ i = 1, 2, \ldots, n),\ j = 1, 2, \ldots, r,\ t \in T$ – известные функции. С учетом этого запишем задачу (1.7) в виде

$$\begin{gathered} \nu \to \min \\ -\nu \leqslant z_i^w(t) - \sum_{j=1}^{r} v_j \omega_{ij}(t) \leqslant \nu \\ i = 1, 2, \ldots, n; \quad t \in T(\tau) = [\mu(\tau), \tau] \\ z^w(\tau) = \sum_{j=1}^{r} v_j \omega_j(\tau); \quad z^w(\mu(\tau)) = \sum_{j=1}^{r} v_j \omega_j(\mu(\tau)), \quad v \in V \end{gathered} \tag{3.1}$$

Пусть $(\nu(\tau), v(\tau))$, $v(\tau) = (v_j(\tau),\ j = 1, 2, \ldots, r)$ – оптимальный план задачи (3.1). Обозначим:

$$\begin{gathered} J = \{1, 2, \ldots, r\}, \quad I = \{1, 2, \ldots, n\} \\ Q(\tau) = \{(i, t) \in I \times T(\tau)\colon |z_i^w(t) - \sum_{j \in J} v_j(\tau)\omega_{ij}(t)| = \nu(\tau)\} = \\ = \{(i_k(\tau), t_k(\tau)),\ k \in K(\tau)\} \\ q_k(\tau) = \operatorname{sign}(z_{i_k}^w(t_k) - \sum_{j \in J} v_j(\tau)\omega_{i_k j}(t_k)), \quad k \in K(\tau) \\ J_\tau^+ = \{j \in J\colon v_j(\tau) = d_j^*\}, \quad J_\tau^- = \{j \in J\colon v_j(\tau) = d_{*j}\} \end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь $K(\tau)$ – конечное подмножество множества натуральных чисел.

По аналогии с известным результатом [11] можно показать, что существуют такие n-векторы $\eta^*(\tau)$, $\eta_*(\tau)$ и числа $y_k(\tau)$, $k \in K(\tau)$:

$$q_k(\tau) y_k(\tau) \leqslant 0, \quad k \in K(\tau); \quad \sum_{i \in K(\tau)} |y_k(\tau)| = 1$$

что для $v(\tau)$ и оценок

$$\Delta_j(\tau) = \sum_{k \in K(\tau)} \omega_{i_k j}(t_k(\tau)) y_k(\tau) + \eta^{*\prime}(\tau)\omega_j(\tau) + \eta_*'(\tau)\omega_j(\mu(\tau)), \quad j \in J$$

выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \Delta_j(\tau) \geqslant 0 \ \text{ при } \ j \in J_\tau^-; \quad \Delta_j(\tau) \leqslant 0 \ \text{ при } \ j \in J_\tau^+ \\ \Delta_j(\tau) = 0, \quad j \in J \setminus (J_\tau^+ \cup J_\tau^-) \end{gathered}$$

Вектор $\xi(\tau) = (\eta^*(\tau), \eta_*(\tau);\ y_k(\tau),\ k \in K(\tau))$ назовем оптимальным двойственным планом. Совокупность $\{\nu(\tau), v(\tau), \xi(\tau)\}$ из оптимальных прямого и двойственного планов будем называть решением задачи (3.1).

Решение задачи (3.1) невырожденное, если

$$\operatorname{rank} \left\| \begin{matrix} B_\tau(K(\tau), J_\tau^0) \\ C_\tau(K(\tau), J_\tau^0) \end{matrix} \right\| = |J_\tau^0| + 1, \quad d_{*j} < v_j(\tau) < d_j^*, \quad j \in J_\tau^0 \tag{3.3}$$

$$\operatorname{rank} B_\tau(K(\tau), J_\tau^0) = |K(\tau)| + 2n, \quad y_k(\tau) \neq 0, \quad k \in K(\tau) \tag{3.4}$$

Здесь

$$J_\tau^0 = \{ j \in J\colon \ \Delta_j(\tau) = 0 \}; \quad C_\tau(K_*, J_*) = \left\| \begin{matrix} \omega^{\cdot}_{i_k j}(t_k(\tau)), \ j \in J_*; 0 \\ k \in K_* \end{matrix} \right\|$$

$$B_\tau(K_*, J_*) = \left\| \begin{matrix} \omega_{i_k j}(t_k(\tau)), \ j \in J_*; q_k(\tau) \\ k \in K_* \\ \hline \omega_j(\tau), \quad j \in J_*; \ 0 \\ \omega_j(\mu(\tau)), \ j \in J_*; \ 0 \end{matrix} \right\|$$

Пусть $\{ \nu(\tau_0), \ v(\tau_0); \ \xi(\tau_0) \}$ – невырожденное решение задачи (3.1) при $\tau = \tau_0$. Опишем алгоритм работы предиктора, который в режиме реального времени строит решение $\{ \nu(\tau), v(\tau); \ \xi(\tau) \}$ задачи (3.1) для $\tau \in \,]\tau_0, t^0]$ в предположении, что функция $v(\tau)$ непрерывна на отрезке $[\tau_0, t^0]$.

Обозначим через $T^+(\tau_0)$ достаточно малую правостороннюю окрестность точки τ_0. Рассмотрим совокупность функций

$$\begin{gathered} \nu(\tau), v(\tau); \quad y_k(\tau), \ k \in K(\tau); \quad \eta^*(\tau), \eta_*(\tau) \\ i_k(\tau), \ t_k(\tau), q_k(\tau), \ k \in K(\tau); \quad J_\tau^+, J_\tau^- \end{gathered} \tag{3.5}$$

определяющихся решением задачи (3.1) при $\tau \geqslant \tau_0$. Выделим из них кусочно-постоянные (дискретные) функции

$$J_\tau^+, J_\tau^-, K(\tau); \quad i_k(\tau), \ q_k(\tau), \ k \in K(\tau) \tag{3.6}$$

и непрерывные функции

$$\nu(\tau), v(\tau); \quad y_k(\tau), \ t_k(\tau), \ k \in K(\tau); \quad \eta^*(\tau), \ \eta_*(\tau) \tag{3.7}$$

В силу невырожденности решения задачи (3.1) при $\tau = \tau_0$ для дискретных функций (3.6) имеем

$$\begin{gathered} J_\tau^+ = J_{\tau_0}^+ = J^+, \quad J_\tau^- = J_{\tau_0}^- = J^-, \quad K(\tau) = K(\tau_0) = K \\ i_k(\tau) = i_k(\tau_0) = i_k, \quad q_k(\tau) = q_k(\tau_0) = q_k, \quad k \in K, \quad \tau \in T^+(\tau_0) \end{gathered} \tag{3.8}$$

Из (3.2), (3.8) следует, что совокупность непрерывных функций (3.7), состоящая из решения задачи (3.1) и активных моментов, при $\tau \in T^+(\tau_0)$ однозначно находится из уравнений

$$\begin{gathered} v_j(\tau) = d_j^*, \quad j \in J^+; \quad v_j(\tau) = d_{*j}, \quad j \in J^- \\ f_{1k}(v(\tau), \nu(\tau), t_k(\tau)) = 0, \quad f_{2k}(v(\tau), t_k(\tau)) = 0, \quad k \in K \\ q^*(v(\tau), \tau) = 0, \quad q_*(v(\tau), \tau) = 0, \quad \Delta_*(y_k(\tau), k \in K) = 0 \\ \Delta_j(t_k(\tau), y_k(\tau), k \in K; \ \eta^*(\tau), \ \eta_*(\tau), \tau) = 0, \quad j \in J^0 \end{gathered} \tag{3.9}$$

Здесь:

$$f_{1k}(v, \nu, t) = \sum_{j=1}^{r} v_j \omega_{i_k j}(t) - z_{i_k}^w(t) + q_k \nu$$

$$f_{2k}(v, t) = \sum_{j=1}^{r} v_j \omega^{\cdot}_{i_k j}(t) - z^{\cdot w}_{i_k}(t), \quad k \in K$$

$$\Delta_*(y_k, k \in K) = \sum_{k \in K} q_k y_k + 1; \quad q^*(v, \tau) = \sum_{j=1}^{r} v_j \omega_j(\tau) - z^w(\tau)$$

$$q_*(v,\tau)=\sum_{j=1}^{r} v_j\omega_j(\mu(\tau))-z^w(\mu(\tau))$$

$$\Delta_j(t_k, y_k, k\in K;\ \eta^*, \eta_*, \tau)=\sum_{k\in K}\omega_{i_kj}(t_k)y_k+$$

$$+\eta^{*\prime}\omega_j(\tau)+\eta_*'\omega_j(\mu(\tau)),\quad j\in J^0=J\setminus(J^+\cup J^-)$$

Следовательно, функции (3.7) (решение задачи (3.1)) при $\tau\geqslant\tau_0$ могут быть построены следующим образом.

Отрезок $[\tau_0, t^0]$ разбивается на участки постоянства дискретных функций (3.6). На каждом таком участке непрерывные функции (3.7) находятся из уравнений (3.9), численный метод решения которых приведен в разд. 5. Момент $\bar\tau$ разрыва функций (3.6) характеризуется одним из следующих свойств:

1) при некоторых $(i_0, t_0)\in I\times T(\bar\tau)\setminus\{(i_k, t_k(\bar\tau)),\ k\in K\}$ имеет место равенство

$$\sum_{j\in J}\omega_{i_0j}(t_0)v_j(\bar\tau)=z^w_{i_0}(t_0)-q_0\nu(\bar\tau)$$

при $q_0=1$ или $q_0=-1$;

2) при некотором $j_0\in J^0$ имеет место равенство $v_{j_0}(\bar\tau)=d_{*j_0}$ либо $v_{j_0}(\bar\tau)=$ $=d^*_{j_0}$;

3) при некотором $s_0\in K$ имеет место равенство $y_{s_0}(\bar\tau)=0$;

4) при некотором $j_0\in J\setminus J^0$ имеет место равенство $\Delta_{j_0}(\bar\tau)=0$.

Далее исследуется только общий случай, и поэтому как исключительные не рассматриваются ситуации, когда а) одновременно реализуются два и более из указанных выше свойств 1)–4), б) какое-либо из свойств 1)–4) реализуется на нескольких индексах $j\in J$ или нескольких индексах и моментах $(i,t)\in I\times T(\bar\tau)$, в) при некотором $(i,t)\in I\times T(\tau)$ имеют место равенства

$$\left|\sum_{j\in J}v_j(\bar\tau)\omega_{ij}(t)-z_i^w(t)\right|=\nu(\bar\tau)$$

$$\sum_{j\in J}v_j(\bar\tau)\omega_{ij}^{(p)}(t)=z_i^{w(p)}(t),\quad p=1,2$$

Можно получить [4, 11] правила нахождения новых значений

$$\bar J^+,\ \bar J^-,\ \bar K;\ \ \bar i_k,\ \bar q_k,\ k\in\bar K$$

функций (3.6) на новом участке $[\bar\tau, \tau_*]$ их постоянства и правила стыковки решений уравнений типа (3.9) в моменты $\bar\tau$, τ_* и т.д.

Для старта предиктора в момент $\tau=0$ можно предложить несколько процедур. Например, можно поступить следующим образом.

До начала процесса работы предиктора зададим на малом начальном отрезке $[0,h_*]$, $h_*>0$, конечный набор возможных дрейфов $z^{wk}(t)$, $t\in[0,h_*]$, $k=1,2,\dots,N$. Для каждого дрейфа $z^{wk}(t)$, $t\in[0,h_*]$, найдем решение (ν^k, v^k) задачи (1.7) при $\tau=h_*$, $\mu(h_*)=0$. Далее после включения предиктора замеряем истинное значение реализовавшегося дрейфа на промежутке $[0,h_*]$. Находим ближайший к нему дрейф $z^{wk_0}(t)$, $t\in[0,h_*]$. Соответствующий вектор (ν^{k_0}, v^{k_0}) доводим до решения $(\nu(h_*), v(h_*))$ задачи (1.7) при $\tau=h_*$ при помощи процедуры доводки типа описанной ранее [11].

4. Алгоритм работы регулятора. Выберем параметр $\epsilon>0$, который характеризует предельную частоту переключений вырабатываемого регулятором управления. Зададим функции $\mu(\tau)$, $\lambda(\tau)$ (считаем, что функции $\omega_j(t)$, $t\in T^0$, $j=1,2,\dots,r$, известны). В начальный момент $\tau = 0$ регулятор выбирает значение

$$u^*(0) = u^0_{\tau=0}(0)$$

т.е. начинает работу с оптимального программного управления. Для произвольного текущего момента τ регулятор выбирает значение управления по правилу

$$u^*(\tau) = \begin{cases} u^0_\tau(\tau), & \tau - \mathrm{t}(\tau) \geqslant \epsilon \\ u^*(\tau - 0), & \tau - \mathrm{t}(\tau) < \epsilon \end{cases}$$

где $\mathrm{t}(\tau)$ – ближайшая слева к τ точка разрыва управления $u^*(t)$, $t \in [0, \tau[$, $\mathrm{t}(0) = -\infty$; $u^0_\tau(t)$, $t \in T_\tau$ – решение задачи (2.1), полученное в процессе решения определяющих уравнений (2.7) с использованием функции $g(\tau)$ (2.2), в которой вектор $v(\tau)$ находится из определяющих уравнений предиктора (3.9).

В результате работы по описанному алгоритму регулятор построит релейное управление $u^*(t)$, $t \in T$; $|u^*(t)| \equiv 1$, $t \in T$, точки переключения которого на множестве T^0 отстоят друг от друга не меньше, чем на ϵ.

5. Численный метод построения решения уравнений (3.9). Построим матрицы

$$G(v; t_k, y_k, k \in K; \tau) = \left\| \begin{matrix} B & D_1 & 0 \\ C & D_2 & 0 \\ 0 & \bar{C}' & B' \end{matrix} \right\|, \quad D_1 = \left\| \begin{matrix} D_0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

$$B = \left\| \begin{matrix} \omega_{i_k j}(t_k), j \in J^0, \quad q_k \\ k \in K \\ \hline \omega_j(\tau), \quad j \in J^0; \quad 0 \\ \omega_j(\mu(\tau)), \quad j \in J^0; \quad 0 \end{matrix} \right\|, \quad C = \left\| \begin{matrix} \dot{\omega}_{i_k j}(t_k), \quad j \in J^0; \quad 0 \\ k \in K \end{matrix} \right\|$$

$$\bar{C} = C \operatorname{diag}(y_k, k \in K)$$

$$D_0 = \operatorname{diag}(\alpha_k, k \in K), \quad D_2 = \operatorname{diag}(\beta_k, k \in K)$$

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^{r} v_j \dot{\omega}_{i_k j}(t_k) - \dot{z}^{w}_{i_k}(t_k)$$

$$\beta_k = \sum_{j=1}^{r} v_j \ddot{\omega}_{i_k j}(t_k) - \ddot{z}^{\omega}_{i_k}(t_k), k \in K$$

Можно показать, что при выполнении условия (3.3), (3.4)

$$\det G(v(\tau_0); \quad t_k(\tau_0), \ y_k(\tau_0), \ k \in K; \ \tau_0) \neq 0$$

Следовательно, для $\tau \in T^+(\tau_0)$ существует единственное решение (3.7) системы (3.9).

Опишем численный метод построения этого решения. Пусть известно решение (3.7) в узлах сетки $\tau = \tau_0 + sh$, $s = 0, 1, \ldots, p-1$, где $h > 0$ – шаг сетки (параметр метода). Для вычисления элементов (3.7) в узле $\tau_{(*)} = \tau_0 + ph$ положим

$$v^l_j = d_{*j}, \ j \in J^-; \quad v^l_j = d^*_j, \ j \in J^+, \quad l = 1, 2, \ldots, l_0$$

и построим векторы

$$z^l = (v^l_j, \ j \in J^0; \ \nu^l; \ t^l_k, \ k \in K; \ y^l_k, \ k \in K; \ \eta^{*l}, \ \eta^l_*)$$

$$l = 1, 2, \ldots, l_0:$$

$$z^1 = (v^1_j = v_j(\tau_{(*)} - h), \ j \in J^0; \ \nu^1 = \nu(\tau_{(*)} - h); \ t^1_k = t_k(\tau_{(*)} - h), \ k \in K$$

$$y^1_k = y_k(\tau_{(*)} - h), \ k \in K; \ \eta^{*1} = \eta^*(\tau_{(*)} - h), \ \eta^1_* = \eta_*(\tau_{(*)} - h))$$

$$z^{l+1} = z^l - G^{-1}(v^l; t^l_k, \ y^l_k, \ k \in K, \ \tau_{(*)})(f_{1k}(v^l, \ \nu^l, \ t^l_k), \ k \in K; \ q^{*\prime}(v^l, \ \tau_{(*)}), q'_*(v^l, \tau_{(*)})$$

$$f_{2k}(v^l, t^l_k), \ k \in K; \ \Delta_j(t^l_k, y^l_k, \ k \in K; \ \eta^{*l}, \eta^l_*), \quad j \in J^0$$

$$\Delta_*(y^l_k, \ k \in K))'$$

Здесь $l_0 = l_0(h)$ – натуральное число (параметр метода).

Положим

$$\nu(\tau_{(*)}) = \nu^{l_0}, \quad v(\tau_{(*)}) = v^{l_0}; \quad t_k(\tau_{(*)}) = t_k^{l_0}$$

$$y_k(\tau_{(*)}) = y_k^{l_0}, \ k \in K; \quad \eta^*(\tau_{(*)}) = \eta^{*l_0}, \quad \eta_*(\tau_{(*)}) = \eta_*^{l_0}$$

Описанный метод допускает модификации в разных направлениях, но этот вопрос выходит за пределы данной статьи.

6. Пример. Приведенные выше результаты проиллюстрируем на задаче оптимального управления колебательным движением

$$\int_0^{4\pi} u(t)\,dt \to \min, \quad x'' + x = u, \quad x(0) = 0{,}703$$

$$x'(0) = -0{,}955; \quad x(4\pi) = x'(4\pi) = 0; \quad 0 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0; 4\pi]$$

Программное оптимальное управление в этой задаче релейно. Оно принимает только два значения: 0 и 1, моменты переключения $t_1 = 0{,}334$; $t_2 = 0{,}936$; $t_3 = 6{,}62$; $t_4 = 7{,}22$, причем $u^0(t) = 0$ на отрезке $[0; t_1[$. Критерий качества на оптимальном программном управлении равен $J(u^0) = 1{,}2038$.

Пусть на рассматриваемую систему в процессе ее функционирования действует возмущение $w^*(t) = 0{,}1 \sin 5t$, $t \in [0; 5]$; $w^*(t) = 0$, $t \in]5; 4\pi]$, которое не учтено в модели и не известно регулятору.

Релейный оптимальный регулятор [4] вырабатывает управление $u^*(t)$, $t \in T$, с точками переключения $t_1 = 0{,}34$; $t_2 = 0{,}99$; $t_3 = 6{,}57$; $t_4 = 7{,}14$, причем $u^*(t) = 0$, $t \in [0; t_1[$. На управлении $u^*(t)$, $t \in T$, критерий качества принимает значение $J(u^*) = 1{,}1813$.

Если бы регулятор знал возмущение заранее, то соответствующее программное оптимальное управление имело бы точки переключения $t_1 = 0{,}333$; $t_2 = 0{,}923$; $t_3 = 6{,}62$; $t_4 = 7{,}21$ и $J = 1{,}1794$.

Пусть в каждый текущий момент τ регулятору известно значение возмущения $w^*(t)$ на отрезке $[\tau, \lambda(\tau)]$ ($\lambda(t) = t + 0{,}3$, $t \in [0; 4{,}7]$, $\lambda(t) = 5$, $t \in]4{,}7; 5]$). Тогда регулятор построит управление $u^*(t)$, $t \in T$, с точками переключения $t_1 = 0{,}36$; $t_2 = 0{,}975$; $t_3 = 6{,}586$; $t_4 = 7{,}151$. При этом $J(u^*) = 1{,}1806$.

Включим в обратную связь предиктор. Чтобы продемонстрировать роль предиктора в повышении эффективности управления, ограничимся специальным неоптимальным вариантом. Будем считать, что предиктор аппроксимирует каждую компоненту дрейфа полиномом второй степени:

$$z_i(t, v) = v_2^{(i)} t^2 + v_1^{(i)} t + v_0^{(i)}, \quad i = 1, 2$$

и выбирает среди них такие два, которые совпадают с реализовавшимися компонентами дрейфа в точках τ, $\mu(\tau)$ и имеют с ними одинаковые производные в точке τ. Выберем функцию $\mu(t)$, $t \in [0; 5]$, в виде $\mu(t) = 0$, $t \in [0; 0{,}3]$; $\mu(t) = t - 0{,}3$, $t \in]0{,}3; 5]$. Искомые функции $v_j^{(i)}(\tau)$, $\tau \in [0, t^0]$, $j = 0, 1, 2$; $i = 1, 2$, имеют вид:

$$v_2^{(i)}(\tau) = [z_i^{\cdot w}(\tau) - (z_i^w(\tau) - z_i^w(\mu(\tau)))/(\tau - \mu(\tau))]/(\tau - \mu(\tau))$$

$$v_1^{(i)}(\tau) = (z_i^w(\tau) - z_i^w(\mu(\tau)))/(\tau - \mu(\tau)) - v_2^{(i)}(\tau)(\tau - \mu(\tau))$$

$$v_0^{(i)}(\tau) = z_i^w(\mu(\tau)) - v_2^{(i)}(\tau)\mu^2(\tau) - v_1^{(i)}(\tau)\mu(\tau)$$

$$z^w(t) = (z_i^w, \ i = 1, 2) = x^*(t) - F(t, 0)x_0 - \int_0^t F(t, s)\,b u^*(s)\,ds, \quad t \in T$$

Управление $u^*(t)$, $t \in T$, выработанное регулятором, использующим результаты работы предиктора, имеет точки переключения $t_1 = 0{,}4$; $t_2 = 0{,}955$; $t_3 = 6{,}554$; $t_4 = 7{,}180$, причем $u^*(t) = 0$, $t \in [0; t_1[$. Критерий качества на нем принимает значение $J(u^*) = 1{,}1808$.

Приведенные вычисления показывают, что полное знание будущего возмущения улучшает результат, полученный оптимальным регулятором [4], на $19 \cdot 10^{-4}$. Точное знание будущего возмущения на предстоящем отрезке длиной 0,3 дает выигрыш в $8 \cdot 10^{-4}$ единиц (42% от максимально возможного). Использование (неоптимального) предиктора для прогноза возмущения на промежутке длины 0,3 дало выигрыш $6 \cdot 10^{-4}$, т.е. 75% от предыдущего результата.

Авторы благодарят Н.В. Балашевич за проведенные вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. *Беллман Р.* Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964. 359.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.* Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320, № 6. С. 1294–1299.
5. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1963. 552 с.
6. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М. Наука, 1985. 518 с.
7. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. Ч. I–III // Автоматика и Телемеханика. 1960. Т. 21. № 4. С. 436–441; № 5. С. 561–568; № 6. С. 661–665.
8. *Калман Р.* Об общей теории систем управления // Тр. I Конгр. ИФАК, М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 1. С. 521–547.
9. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. Под ред. К.Т. Леондеса. М.: Мир, 1980. 407 с.
10. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Конструктивные методы оптимизации. Часть 2. Минск.: Изд-во Университетское, 1984. 207 с.
11. *Костюкова О.И.* Исследование линейных экстремальных задач с континуумом ограничений: Препринт / АНБ. № 26 (336) Ин-та математики. Минск, 1988. 3 с.

Поступила в редакцию
30.III.1992

Минск