Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 5, 1992

УДК 62–50

© 1992 г. В.Е. Бербюк

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В продолжение исследований [1–4], посвященных вопросам использования первых интегралов в задачах оптимального управления динамическими системами, рассматривается задача оптимального управления движением многомерной нелинейной системой на заданном отрезке времени при закрепленных концах фазовой траектории. Качество управления оценивается функционалом в виде определенного интеграла от взвешенной суммы квадратов компонент управляющих сил. В ряде случаев [5–7] такой функционал дает оценку энергетических затрат на управление, а соответствующая вариационная задача называется оптимальной по минимуму энергетических затрат. На основе использования первых интегралов уравнений свободного движения разрабатывается методика оценки сверху минимально необходимых энергозатрат для перемещения управляемой нелинейной динамической системы из заданного начального фазового состояния в заданное конечное состояние за заданное время. Эффективность методики иллюстрируется примерами, в том числе решением задачи оценки предельных возможностей энергетически оптимальной системы управления движением искусственного спутника в поле тяготения ньютоновского притягивающего центра.

Известно [5–12], что точное решение задач оптимального управления возможно крайне редко и только для специального типа динамических систем. Поиск приближенных решений оптимальных задач также, как правило, сопряжен со значительными затруднениями [9–12]. Поэтому представляется актуальным разработка методов оценивания тех или иных характеристик оптимальных процессов управления динамическими системами без определения точного решения самой вариационной задачи.

1. Рассмотрим многомерную нестационарную нелинейную динамическую систему, управляемые движения которой описываются уравнениями

$$\begin{aligned} &x^{\cdot} = f(x,t) + B(x)\,u(x,t) \\ &x = (x_1,\ldots,x_n), \quad u = (u_1,\ldots,u_m) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь x – n-мерный вектор фазовых координат, u – m-мерный вектор управляющих сил, $f(x,t)$, $B(x)$ – заданные вектор-функция и матрица размерами $(n \times 1)$ и $(n \times m)$ соответственно.

Пусть состояние системы в начальный момент времени $t = 0$ и в конце процесса управления при $t = T$ определяется формулами

$$x(0) = x_0 \tag{1.2}$$

$$x(T) = x_T \tag{1.3}$$

где x_0, x_T – заданные n-мерные векторы, T – заданное положительное число.

Пару вектор-функций $\{x(t),\ u(x,t)\}$ будем называть допустимым управляемым процессом динамической системы (1.1), если эти функции удовлетворяют уравнениям (1.1) при $t \in [0,T]$ и граничным условиям (1.2), (1.3).

Будем полагать, что множество допустимых управляемых процессов системы (1.1) не пусто и обозначим его Ω.

Для оценки качества управляемого процесса примем функционал вида

$$J[x(\cdot),u(\cdot)] = \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^m \left[\frac{u_j(x,t)}{k_j}\right]^2 dt \tag{1.4}$$

где k_j – заданные постоянные (весовые коэффициенты).

Пусть существует допустимый управляемый процесс $\{x_*(t), u_*(x, t)\}$, такой, что

$$\min_{\{x,u\}\in\Omega} J[x(\cdot),u(\cdot)] = J[x_*(\cdot),u_*(\cdot)]$$

Будем называть пару функций $\{x_*(t), u_*(x, t)\}$, удовлетворяющих этому соотношению, энергетически оптимальным управляемым процессом, а величину $J[x_*(\cdot), u_*(\cdot)] = J_*$ – минимально необходимыми энергозатратами для перемещения динамической системы (1.1) из заданного начального фазового состояния (1.2) в заданное конечное состояние (1.3) за время T.

Цель работы – оценка сверху минимально необходимых энергозатрат J_*.

Существуют разные подходы к поиску этой оценки. Во-первых, можно при помощи известных методов теории оптимального управления непосредственно решать вариационную задачу поиска минимума функционала (1.4) при дифференциальных связях (1.1) и граничных условиях (1.2), (1.3). После определения экстремали $\{x_*(t), u_*(x, t)\}$ величина J_* вычисляется по формуле (1.4). Во-вторых, оценку величины J_*, по-видимому, можно получить при помощи построения или оценивания множества достижимости динамической системы и решения соответствующей задачи нелинейного программирования [13]. Преимущество того или иного подхода для получения оценки величины J_*, очевидно, определяется конкретным видом динамической системы (1.1) и граничных условий (1.2), (1.3).

Ниже предлагается методика оценки минимально необходимых энергозатрат для перемещения динамической системы (1.1) из состояния (1.2) в состояние (1.3), основанная на использовании первых интегралов уравнений свободного движения

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{1.5}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция $w(x, t)$ является первым интегралом уравнений (1.5) и такая, что выполняются следующие условия:

1°. Функционал вида

$$G[x(\cdot)] = \int_0^T \sum_{j=1}^m k_j^2 \langle \nabla_x w(x,t), b_j(x)\rangle^2 dt \tag{1.6}$$

определен на всем множестве допустимых управляемых процессов Ω;

2°. Решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x,t)+B(x)u^0(x,t), \qquad x(0) = x_0 \tag{1.7}$$

$$u_j^0(x,t) = -k_j^2 \langle \nabla_x w(x,t), b_j(x)\rangle, \qquad j = 1,\dots,m \tag{1.8}$$

существует и удовлетворяет граничному условию (1.3), т.е. $\{x^0(t), u^0(x, t)\} \in \Omega$.

Тогда для минимально необходимых энергозатрат J_* справедливо неравенство

$$J_* \leqslant w(x_0,0) - w(x_T,T) \tag{1.9}$$

Здесь ∇_x – оператор градиента по переменным $x_1,\dots,x_n$, $b_j(x)$ – вектор-столбец с номером j матрицы $B(x)$, $\langle\,,\rangle$ – скалярное произведение векторов.

Для доказательства неравенства (1.9) рассмотрим функцию $w(x, t)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1. Вычислим полную производную по времени функции $w(x,t)$. В силу уравнений (1.1) получим

$$d\dot{w}(x,t)/dt = \partial w(x,t)/\partial t + \langle\nabla_x w(x,t), f(x,t)+B(x)u\rangle \tag{1.10}$$

Так как функция $w(x,t)$ является первым интегралом уравнений (1.5), то $\partial w(x,t)/\partial t + \langle \nabla_x w(x,t),\ f(x,t)\rangle = 0$

Учитывая это соотношение и интегрируя по времени обе части равенства (1.10), получим

$$w(x_T, T) = w(x_0, 0) + \int_0^T \langle \nabla_x w(x,t), B(x) u\rangle dt \tag{1.11}$$

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$J_b[x(\cdot), u(\cdot)] = w(x_T, T) + \tfrac{1}{2} G[x(\cdot)] + J[x(\cdot), u(\cdot)] \tag{1.12}$$

В силу условий теоремы 1 функционал (1.12) определен на всем множестве допустимых управляемых процессов Ω.

При помощи формулы (1.11) и элементарных преобразований этот функционал может быть записан в виде

$$J_b[x(\cdot), u(\cdot)] = w(x_0, 0) + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^m \left[\frac{u_j(x,t)}{k_j} + k_j\langle \nabla_x w, b_j\rangle\right]^2 dt$$

откуда непосредственно следует соотношение

$$\min_{\{x, u\}\in\Omega} J_b[x(\cdot), u(\cdot)] = J_b[x^0(\cdot), u^0(\cdot)] = w(x_0, 0) \tag{1.13}$$

где управляемый процесс $\{x^0(t), u^0(x,t)\}$ определяется решением задачи Коши (1.7), (1.8).

Так как функционал (1.6) на множестве Ω неотрицателен, то справедливо неравенство

$$J_* \leqslant \min_{\{x, u\}\in\Omega} \{J[x(\cdot), u(\cdot)] + \tfrac{1}{2} G[x(\cdot)]\} \tag{1.14}$$

Учитывая, что величина $w(x_T, T)$ не зависит от выбора управляемого процесса, из соотношений (1.12)–(1.14) непосредственно получаем неравенство (1.9).

Укажем один из возможных путей практического использования теоремы 1.

Известно, что уравнения (1.5) имеют n независимых первых интегралов. Пусть тем или иным путем определены независимые первые интегралы $v_1(x,t), \ldots, v_k(x,t)$, $k \leqslant n$.

Очевидно, функция

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(v_1, \ldots, v_k) \tag{1.15}$$

где a_i – произвольные параметры, φ_i – произвольные непрерывно-дифференцируемые функции от k аргументов, также является первым интегралом уравнений (1.5). При определенных условиях можно выбрать параметры a_i и функции $\varphi_i(y_1, \ldots, y_k)$ таким образом, чтобы для $w(x,t)$ вида (1.15) выполнялись условия теоремы 1. Тем самым будет определен надлежащий первый интеграл и по формуле (1.9) получена оценка значения J_*.

Пример 1. Рассмотрим задачу оценки минимально необходимых энергетических затрат для остановки вращения асимметричного твердого тела.

Уравнения управляемых вращений твердого тела относительно неподвижной точки (центра масс) имеют вид [12]

$$I_1\omega_1^{\cdot} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = \beta_1 u_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.16}$$

Цифры в круглых скобках означают циклическую перестановку индексов, I_i – главные (центральные) моменты инерции, ω_i – компоненты угловой скорости вращения тела, $\beta_i u_i$ – управляющие моменты относительно каждой из связанных осей, $\beta_i = \text{const}$, u_i – управления.

Ставится задача оценки минимального значения функционала (1.4) на множестве управляемых процессов $\{\omega(t), u(t)\}$, перемещающих динамическую систему (1.16) из заданного начального состояния $\omega_i(0) = \omega_{0i}$ в начало координат $\omega_i(T) = 0$, $i = 1, 2, 3$ за заданное время T.

В переменных $x_i = I_i \omega_i \beta_i^{-1}$ уравнения (1.16) приводятся к виду

$$x_1^{\cdot} = (I_2 - I_3) I_2^{-1} I_3^{-1} \beta_2 \beta_3 \beta_1^{-1} x_2 x_3 + u_1 \tag{1.17}$$

$$x_{01} = I_1 \omega_{01} \beta_1^{-1} \qquad (1\ 2\ 3)$$

Известно [12], что при выполнении соотношений

$$I_1 (I_3 - I_2) \beta_2^2 \beta_3^2 + I_2 (I_1 - I_3) \beta_3^2 \beta_1^2 + (I_2 - I_1) I_3 \beta_1^2 \beta_2^2 = 0 \tag{1.18}$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

уравнения (1.17) имеют первый интеграл – евклидову норму фазового вектора x, т.е. функцию $v(x) = (x_1^2 + \ldots + x_3^2)^{1/2}$. Ниже условия (1.18) предполагаются выполненными.

Следуя (1.15), будем искать функцию, удовлетворяющую условиям теоремы 1, в виде

$$w(x) = Cv(x) \tag{1.19}$$

где C – постоянная, подлежащая определению. Примем в функционале (1.4) $m = 3$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Тогда, выбирая управление u_i по формулам (1.8), (1.19), при учете уравнений (1.17) получим

$$dv(x)/dt = -Ck^2$$

откуда выводим, что при $C = v(x_0)/(k^2 T)$ функция вида (1.19) удовлетворяет всем условиям теоремы 1, на основании которой получаем искомую оценку

$$J_* \leqslant v^2(x_0)/(k^2 T) \tag{1.20}$$

2. Из доказанной теоремы 1 непосредственно вытекает справедливость утверждения, имеющего самостоятельное значение. Сформулируем его в следующем виде.

Теорема 2. Пусть $w(x, t)$ – первый интеграл уравнений свободного движения (1.5), удовлетворяющий условию 1° теоремы 1, а $x_w(T)$ – значение решения задачи Коши (1.7), (1.8) в момент времени $t = T$. Тогда минимально необходимые энергетические затраты J_* для перемещения динамической системы (1.1) за время T из произвольно заданного начального состояния (1.2) в конечное фазовое состояние $x_T = x_w(T)$ удовлетворяют неравенству (1.9) при $x_T = x_w(T)$.

Эта теорема дает возможность получать оценки вида (1.9) для всех конечных состояний (1.3), лежащих на фазовых траекториях задачи Коши (1.7), (1.8), определяемых первым интегралом $w(x, t)$. Так как в выборе функции $w(x, t)$ есть значительный произвол, то оценку предельных возможностей энергетически оптимальных систем управления можно получить для широкой области фазового пространства, определяемого совокупностью точек $x_w(T)$.

Пример 2. Рассмотрим задачу оценки предельных возможностей энергетически оптимальной системы управления движением искусственного спутника (ИС) в поле тяготения ньютоновского притягивающего центра O.

Свяжем с центром O начало декартовой системы координат $x_1 x_2 x_3$ и допустим, что на ИС дополнительно действует реактивное ускорение. Тогда в безразмерных переменных дифференциальные уравнения движения ИС имеют вид [14]

$$x_1^{\cdot} = x_4, \quad x_2^{\cdot} = x_5, \quad x_3^{\cdot} = x_6$$

$$x_4^{\cdot} = u_1 - \frac{x_1}{r^3}, \quad x_5^{\cdot} = u_2 - \frac{x_2}{r^3}, \quad x_6^{\cdot} = u_3 - \frac{x_3}{r^3} \tag{2.1}$$

$$r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$$

Здесь приняты следующие соотношения между безразмерными координатами x_i, временем t, компонентами реактивного ускорения u_i и соответствующими размерными величинами x_{iR}, t_R, u_{iR}: $x_i = x_{iR}/r_0$, $t = t_R/(r_0/g_0)^{1/2}$, $u_i = u_{iR}/g_0$, где r_0 – фиксированное (например, начальное) расстояние от центра притяжения, g_0 – ускорение силы тяготения на расстоянии r_0 от притягивающего центра.

Система уравнений (2.1) была предметом многочисленных исследований. Например представлены [14] результаты исследований поведения решений уравнений (2.1) в случае, когда реактивное ускорение u постоянно по величине и направлению.

Известно, что дифференциальные уравнения кеплеровского движения (уравнения (2.1) при $u_i = 0, i = 1, 2, 3$) имеют первые интегралы. Примем в качестве первого интеграла $w(x, t)$, используемого в теоремах 1, 2 для оценки предельных возможностей энергетически оптимальных систем управления, функцию вида

$$w(x,t) = \alpha[(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)/2 - 1/r] \tag{2.2}$$

т.е. функцию, равную произведению произвольной постоянной α и интеграла энергии кеплеровского движения.

Рассмотрим движение ИС при управлении, определяемом формулами (1.8), (2.2). Для описания этого движения из (2.1), (1.8), (2.2) получим соотношения

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = x_4, \quad \dot{x}_2 = x_5, \quad \dot{x}_3 = x_6 \\
\dot{x}_4 = -\frac{x_1}{r^3} - \alpha k_1^2 x_4, \quad \dot{x}_5 = -\frac{x_2}{r^3} - \alpha k_2^2 x_5 \\
\dot{x}_6 = -\frac{x_3}{r^3} - \alpha k_3^2 x_6
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) при $\alpha > 0$ описывают движение ИС в поле тяготения ньютоновского притягивающего центра, возмущенное силами сопротивления, пропорциональными проекциям скорости ИС на оси декартовой системы координат.

Примем в (1.4), (2.3) $m = 3$, $k_i = k$, $i = 1, 2, 3$. Тогда, опуская промежуточные преобразования, можно выписать следующие первые интегралы нелинейной системы уравнений (2.3):

$$\begin{gathered}
x_2 x_6 - x_3 x_5 = C_1 \exp(-\alpha k^2 t) \\
C_1 = x_{02} x_{06} - x_{03} x_{05} \qquad (1\ 2\ 3\ ,\ 4\ 5\ 6)
\end{gathered} \tag{2.4}$$

где C_i – постоянные, определяемые начальным состоянием (1.2).

Умножая каждый из интегралов (2.4) соответственно на x_1, x_2, x_3 и почленно складывая, получим

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = 0 \tag{2.5}$$

Таким образом, движение ИС в поле тяготения ньютоновского притягивающего центра при управлении, определяемом формулами (1.8), (2.2), происходит, как и в кеплеровском случае, в неизменяемой плоскости Лапласа (2.5). При этом имеют место первые интегралы (2.4), обобщающие три известные скалярные интеграла площадей при кеплеровском движении [14].

Обозначим через X_T область фазового пространства, состоящую из совокупности точек с координатами, равными значению решения задачи Коши (2.3), (1.2) при $t = T$ и удовлетворяющих соотношениям (2.4). Произвольная точка множества X_T при заданных x_0, k однозначно определяется двумя параметрами α, T.

Пусть для динамической системы (2.1) конечное состояние (1.3) выбрано из области X_T. Тогда для функции $w(x, t)$ вида (2.2) выполнены все условия теоремы 2. Следовательно, минимально необходимые энергетические затраты J_* для перемещения ИС в поле тяготения ньютоновского притягивающего центра из состояния (1.2) в состояние $x_T \in X_T$ удовлетворяют неравенству (1.9), где первый интеграл $w(x, t)$ определяется формулой (2.2).

Как следует из соотношений (2.4), при движении ИС под действием управления вида (1.8), (2.2) модуль кинетического момента $L(t)$ ИС изменяется по закону $L(t) = L(0)\exp(-\alpha k^2 t)$. Из этой формулы видно, что при помощи соотношений (1.9), (2.2) можно оценить минимально необходимые энергозатраты для перемещения ИС в конечные состояния $x_T \in X_T$, отвечающие как увеличению кинетического момента $L(T)$ (случай $\alpha < 0$), так и его уменьшению ($\alpha > 0$) по сравнению с начальным значением $L(0)$. В случае $\alpha = 1$ минимально необходимые энергозатраты J_* не превосходят разности значений полной механической энергии ИС в начальном x_0 и конечном $x_T \in X_T$ фазовых состояниях.

3. Представляется важным найти все первые интегралы $w(x, t)$ уравнений свободного движения (1.5), удовлетворяющие условиям теоремы 1. Обозначая множество всех таких первых интегралов через $W = \{ w(x, t) \}$, оценку (1.9) можно улучшить и предста-

вить в виде

$$J_* \leqslant \min_{w \in W} \{ w(x_0, 0) - w(x_T, T) \} \qquad (3.1)$$

Более того, в ряде случаев при помощи первых интегралов уравнений свободного движения можно точно вычислить минимальное значение функционала (1.4) на множестве допустимых управляемых процессов Ω.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $w(x,t)$ – первый интеграл уравнений свободного движения (1.5), удовлетворяющий условиям теоремы 1, и такой, что выполнены тождества

$$\nabla_x \Big(\sum_{j=1}^{m} k_j^2 \langle \nabla_x w(x,t), \; b_j(x) \rangle^2 \Big) = 0, \qquad t \in [0, T] \qquad (3.2)$$

Тогда справедливо соотношение

$$J_* = ½ [w(x_0, 0) - w(x_T, T)] \qquad (3.3)$$

Для доказательства теоремы 3 рассмотрим вспомогательный функционал (1.12), где $w(x, t)$ – заданная функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1 и тождествам (3.2). Тогда можно записать соотношение

$$\min_{\{x,u\} \in \Omega} J_b[x(\cdot), u(\cdot)] = \min_{\{x,u\} \in \Omega} J[x(\cdot), u(\cdot)] + \qquad (3.4)$$

$$+ w(x_T, T) + ½ G[x(\cdot)]$$

Отсюда следует, что для любого первого интеграла $w(x,t)$, удовлетворяющего условиям теоремы 3, экстремали функционалов $J_b[x(\cdot), u(\cdot)]$ и $J[x(\cdot), u(\cdot)]$ на множестве допустимых управляемых процессов Ω совпадают. При этом для оптимального управляемого процесса имеем $u_*(x, t) = u^0(x, t)$, $x_*(t) = x^0(t)$, где $u^0(x,t)$, $x^0(t)$ определяются формулами (1.7), (1.8).

Учитывая формулу (1.8), соотношение (3.4) можно представить в виде

$$\min_{\{x,u\} \in \Omega} J_b[x(\cdot), u(\cdot)] = w(x_T, T) + 2J[x_*(\cdot), u_*(\cdot)] \qquad (3.5)$$

Из формул (1.13), (3.5) непосредственно следует равенство (3.3). Теорема 3 доказана.

Пример 3. Пусть управляемые движения динамической системы описываются линейным нестационарным уравнением

$$x^{\cdot} = A(t)x + B(t)u^{\cdot} \qquad (3.6)$$

где $A(t)$, $B(t)$ – матрицы размерами $(n \times n)$ и $(n \times m)$ соответственно. Требуется вычислить минимально возможное значение функционала (1.4) при перемещении системы (3.6) за заданное время T из произвольно заданного начального фазового состояния (1.2) в конечное состояние (1.3).

Обозначим через $v_1(x, t), \ldots, v_n(x, t)$ линейные по фазовым координатам независимые первые интегралы уравнений свободного движения $x^{\cdot} = A(t)x$. Рассмотрим функцию

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{n} C_i v_i(x, t) \qquad (3.7)$$

где C_i – постоянные числа, которые выберем таким образом, чтобы решение задачи Коши вида

$$x^{\cdot} = A(t)x + B(t)u^0(t), \qquad x(0) = x_0$$
$$u_j^0(t) = -k_j^2 \langle \nabla_x \sum_{i=1}^{n} C_i v_i(x, t), \; b_j(t) \rangle, \qquad j = 1, \ldots, m \qquad (3.8)$$

удовлетворяло граничному условию (1.3).

Известно [6, 15], что при определенных условиях на матрицы $A(t)$, $B(t)$ для любого конечного состояния x_T всегда можно определить постоянные $C_1^*, \ldots, C_n^*$, обеспечивающие существование решения краевой задачи (3.8), (1.3).

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция (3.7) при $C_i = C_i^*$ $(i = 1, \ldots, n)$ является первым интегралом уравнений свободного движения и удовлетворяет всем условиям теоремы 3. Следовательно, справедливо соотношение

$$J_* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} C_i^* [v_i(x_0, 0) - v_i(x_T, T)]$$

Пример 4. Рассмотрим динамическую систему вида

$$\dot{x} = f(x, t) + u, \quad \dim x = \dim u = n \times 1 \tag{3.9}$$

Предположим, что уравнения свободного движения (уравнения (3.9) при $u \equiv 0$) имеют первый интеграл – евклидову норму фазового вектора $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Такие динамические системы называются системами с инвариантной нормой [5, 12].

Покажем, что при помощи теоремы 3 могут быть рассчитаны минимально необходимые энергетические затраты для перемещения динамической системы с инвариантной нормой из произвольного начального фазового состояния (1.2) в начало координат $x(T) = 0$.

Можно убедиться, что при $k_j = k$ $(j = 1, \ldots, n)$ функция

$$w(x, t) = \alpha |x| \tag{3.10}$$

где α – произвольная постоянная, удовлетворяет условию 1° теоремы 1 и тождествам (3.2).

Определим постоянную α таким образом, чтобы решение задачи Коши (3.9), (1.2), (1.8), (3.10) при $t = T$ равнялось нулю. Выбирая управление в соответствии с формулами (1.8), (3.10) и учитывая, что $|x|$ – первый интеграл уравнений (1.5), можно записать соотношение $|x|^{\cdot} = -\alpha k^2$. Интегрируя его по времени в пределах от $t = 0$ до $t = T$ и полагая $|x(T)| = 0$, получаем

$$\alpha = |x_0|/(k^2 T) \tag{3.11}$$

Функция, определяемая формулами (3.10), (3.11), удовлетворяет всем условиям теоремы 3. На основании (3.3) минимально необходимые энергетические затраты для перемещения динамической системы (3.9) из начального состояния (1.2) в начало координат имеют вид

$$J_* = |x_0|^2/(2k^2 T) \tag{3.12}$$

В заключение отметим следующее. Так как при выполнении условий (1.18) динамическая система (1.17) имеет инвариантную норму, то в силу результатов примера 4 оценку вида (1.20) можно заменить точным значением J_*, определяемым формулой (3.12). Сравнение результатов примеров 1, 4 свидетельствует также о том, что в общем случае целесообразен поиск множества всех первых интегралов $w(x, t)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1, и получение оценки J_* в виде соотношения (3.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бербюк В.Е.* Использование первых интегралов в задачах синтеза оптимальных систем управления // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 17–23.
2. *Бербюк В.Е.* Оптимизация управляемых вращений твердого тела с упругим стержнем с помощью первых интегралов свободной системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 8–16.
3. *Бербюк В.Е.* Использование первых интегралов в задаче оптимального управления линейной системой с квадратичным функционалом // Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1988. Вып. 28. С. 66–70.
4. *Бербюк В.Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев: Наук. думка, 1989.
5. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
6. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968, 476 с.
7. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
8. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
9. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 528 с.
10. *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973.
11. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
12. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
13. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.
14. *Белецкий В.В.* Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972. 360 с.
15. *Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф.* Основы теории управления. Киев: Вищ. шк., 1975. 327 с.

Львов

Поступила в редакцию
2.IV.1991