Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 5, 1992

УДК 531.36:62–50

© 1992 г. А.Г. Иванов

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

Приводятся необходимые условия экстремума (в форме принципа максимума Понтрягина) для почти периодической (п.п.) задачи оптимального управления, причем эти условия приводятся сразу для овыпукленной задачи. Важность изучения задачи об оптимальном управлении п.п. движениями динамической системы отмечается в [1–3]. Такие задачи возникают во многих приложениях (см., например [4–7], а также работу [8], посвященную задаче п.п. оптимизации).

1. Пусть R^n – евклидово n-мерное пространство, $|x|$ – норма элемента $x \in R^n$, $\operatorname{Hom}(R^n)$ – пространство линейных операторов $A: R^n \to R^n$ с нормой $|A| \doteq \sup_{x \neq 0}|Ax|/|x|$; $\operatorname{comp}(R^n)$ – совокупность компактных подмножеств в R^n. Обозначим через $S(R, Y)$ (в дальнейшем Y – либо множество $U \in \operatorname{comp}(R^n)$, либо пространство R^n или $\operatorname{Hom}(R^n)$) совокупность п.п. в смысле Степанова функций (далее, если не оговорено специально, говорим просто "п.п. функция").Напомним ([9], с. 200), что функция $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(R, Y)$ принадлежит $S(R, Y)$, если для любого $\epsilon > 0$ множество

$$E_S(f, \epsilon) \doteq \{\tau \in R : \sup_{t \in R} \int_t^{t+1} |f(s+\tau) - f(s)|\, ds < \epsilon\}$$

ее ϵ-почти периодов (ϵ-п.п.) относительно плотно. Каждой функции $f \in S(R, Y)$ соответствует ее ряд Фурье, который удобно представлять в комплексной форме:

$$f(t) \sim \sum_\lambda f_\lambda e^{i\lambda t}, \quad f_\lambda \doteq M\{f(t)e^{-i\lambda t}\} \doteq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

причем множество $\Lambda(f) \doteq \{\lambda \in R : |f_\lambda| > 0\}$ показателей Фурье функции f не более чем счетно.

В дальнейшем $\operatorname{Mod}(\Delta)$ – модуль множества $\Delta \subseteq R$ т.е. наименьшая группа по сложению, содержащая Δ и, если $f \in S(R, Y)$, то $\operatorname{Mod}(f) \doteq \operatorname{Mod}(\Lambda(f))$ – модуль функции f.

Множество $Q \subset S(R, Y)$ называется равностепенно п.п., если для любого $\epsilon > 0$ множество $\bigcap_{f \in Q} E_S(f, \epsilon)$ – относительно плотно.

Пусть далее $B(R, Y)$ – совокупность п.п. в смысле Бора функций, т.е. ([9], с. 20) таких функций $f \in C(R, Y)$, что для любого $\epsilon > 0$ множество

$$E_B(f, \epsilon) \doteq \{\tau \in R : \sup_{t \in R} |f(t+\tau) - f(t)| < \epsilon\}$$

относительно плотно; $B(R \times K \times U, Y)$, $K \times U \in \operatorname{comp}(R^n \times R^n)$ – совокупность функций $f \in C(R \times K \times U, Y)$, которые п.п. по t в смысле Бора равномерно по $(x, u) \in K \times U$. Это означает ([10], с. 17), что для любого $\epsilon > 0$ множество

$$\bigcap_{(x,u) \in K \times U} E_B(f(\cdot, x, u), \epsilon)$$

относительно плотно.

Пусть далее V – открытое множество в R^n; дифференцируемая по x функция $f: R \times V \times U \to R^n$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $f \in C(R \times V \times U, R^n)$, $f'_x \in C(R \times V \times U, \mathrm{Hom}(R^n))$, 2) $f \in B(R \times K \times U, R^n)$, $f'_x \in B(R \times K \times U, \mathrm{Hom}(R^n))$ для любого компакта $K \subset V$. Будем также предполагать, что функция $f_0: R \times V \times U \to R$ удовлетворяет условиям 1), 2) (с соответствующим изменением размерности).

Пусть $\Delta \subseteq R$, $D_1(\Delta)$ – множество таких функций $u(\cdot) \in S(R, U)$, что $\mathrm{Mod}(u) \subseteq \mathrm{Mod}(\Delta)$ и если $\psi \in C(R, R^n) \doteq C(R^n)$, то $\overline{\mathrm{orb}(\psi)}$ – замыкание (в R^n) множества $\mathrm{orb}(\psi) \doteq \{\psi(t), t \in R\}$.

Определение 1.1. Задача

$$J_0(x(\cdot), u(\cdot)) \doteq M\{f_0(t, x(t), u(t))\} \to \inf \tag{1.1}$$

где $x(\cdot)$ – п.п. в смысле Бора решение системы

$$x^{\cdot} = f(t, x, u(t)), \quad u(\cdot) \in D_1(\Delta) \tag{1.2}$$

и $\overline{\mathrm{orb}(x)} \subset V$ называется п.п. задачей оптимального управления, а $D_1(\Delta)$ – множество допустимых (обычных) управлений (о корректности задачи см. в разделе 2 следствие 2.1).

Приведем необходимые условия экстремальности оптимального управления сразу для овыпукленной (к исходной) п.п. задачи оптимального управления. О важности процедур расширения (овыпукливания) применительно к задачам оптимального управления см., например [11–13], а в теории игр – [14, 15]. С этой целью в следующем разделе введем пространство APM мерозначных п.п. отображений, а в заключение напомним понятие экспоненциальной дихотомии.

Пусть $F \in L_1^{\mathrm{loc}}(R, \mathrm{Hom}(R^n))$ и интегрально ограничена, т.е.

$$\sup_{t \in R} \int_t^{t+1} |F(s)|\, ds < \infty$$

Система

$$x^{\cdot} = F(t)x, \quad x \in R^n \tag{1.3}$$

экспоненциально дихотомична [16, 17], если существуют взаимно дополнительные проекторы $P_1, P_2 \in \mathrm{Hom}(R^n)$ и константы $\gamma_1, \gamma_2, \sigma_1, \sigma_2 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} |\Phi(t) P_1 \Phi^{-1}(s)| &\leqslant \gamma_1 \exp(-\sigma_1(t-s)), \quad -\infty < s \leqslant t < \infty \\ |\Phi(t) P_2 \Phi^{-1}(s)| &\leqslant \gamma_2 \exp(-\sigma_2(s-t)), \quad -\infty < t \leqslant s < \infty \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\Phi(\cdot)$ – фундаментальная матрица системы (1.3). В этом случае функция $(t, s) \mapsto G(t, s) \in \mathrm{Hom}(R^n)$, $t, s \in R$, определенная равенством

$$G(t, s) \doteq \chi_{(-\infty, t)}(s) \Phi(t) P_1 \Phi^{-1}(s) - \chi_{(t, \infty)}(s) \Phi(t) P_2 \Phi^{-1}(s)$$

где $\chi_Q(\cdot)$ – характеристическая функция множества $Q \subset R$, называется (главной) функцией Грина системы (1.3).

Если $F \in S(R, \mathrm{Hom}(R^n))$ и система (1.3) экспоненциально дихотомична, то [17, 18] для любой функции $b \in S(R, R^n)$ система $x^{\cdot} = F(t)x + b(t)$ имеет единственное ограниченное на всей числовой оси решение $x(\cdot)$, вычисляемое по формуле

$$x(t) = \int_R G(t, s)\, b(s)\, ds, \quad t \in R$$

и при этом $x(\cdot) \in B(R, R^n)$.

2. Пусть $\mathrm{frm}(U)$ – линейное пространство мер Радона на R^n, носитель которых содержится в U, а $\mathrm{rpm}(U)$ – подмножество в $\mathrm{frm}(U)$, состоящее из вероятностных мер Радона. Через $N = N(R, \mathrm{frm}(U))$ обозначим совокупность измеримых (по Лебегу)

отображений $\mu : R \to \mathrm{frm}(U)$ таких, что $\|\mu\| \doteq \operatorname{ess\,sup}_{t \in R} |\mu(t)|(U) < \infty$ ($|\mu(t)|(U)$ – вариация меры $\mu(t) \in \mathrm{frm}(U)$) и $N_1 \doteq N(R, \mathrm{rpm}(U))$. Пусть далее $\mathbb{B} \doteq \mathbb{B}(R \times U, R^n)$ ($\mathbb{B}_1 \doteq \mathbb{B}(R \times U, R)$) – совокупность таких функций $\varphi : R \times U \to R^n$, что отображение $t \mapsto \varphi(t, u)$, $u \in U$ измеримо, $\varphi(t, \cdot) \in C(U, R^n)$ при почти всех $t \in R$ и существует такая функция $\psi_\varphi(\cdot) \in L_1(R, R)$, что при почти всех $t \in R$ выполнено неравенство $\max_{u \in U} |\varphi(t, u)| \leqslant \psi_\varphi(t)$. Несложно показать, что $\mathbb{B}$ – линейное пространство и

$$\|\varphi\|_{\mathbb{B}} \doteq \int_R \max_{u \in U} |\varphi(t,u)|\, dt$$

есть норма $\varphi \in \mathbb{B}$. Кроме того, незначительно изменив схему доказательства теоремы Данфорда–Петтиса ([11], с. 299) можно показать, что $N \cong \mathbb{B}_1^*$ и отображение $\|\cdot\|_w : N \to R$, определенное для $\mu \in N$ равенством

$$\|\mu\|_w \doteq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{1 + \|\varphi_j\|_{\mathbb{B}_1}} \left| \int_R \langle \mu(t), \varphi_j(t,u) \rangle\, dt \right|,$$

$$\langle \mu(t), \varphi_j(t,u) \rangle \doteq \int_U \varphi_j(t,u)\, \mu(t)(du)$$

где $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ – счетное всюду плотное множество функций в $\mathbb{B}_1$, является (слабой) нормой в N. Пространство $(N, \|\cdot\|_w)$ сепарабельно, множество $N_1 \subset (N, \|\cdot\|_w)$ есть выпуклый компакт и если $\mu_j, \mu \in N_1$, $j = 1, 2, \ldots$, то $\lim_{j \to \infty} \|\mu_j - \mu\|_w = 0$ в том и только в том случае, если

$$\lim_{j \to \infty} \int_R \langle \mu(t) - \mu_j(t), \varphi(t,u) \rangle\, dt = 0$$

для всякой функции $\varphi \in \mathbb{B}$.

Определение 2.1 ([19], с. 5). Отображение $\mu \in N$ называется п.п., если для всякой функции $g \in C(U, R^n)$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t), g(u) \rangle$ принадлежит $S(R, R^n)$.

Совокупность всех п.п. отображений $\mu \in N$ ($\mu \in N_1$) обозначим АРМ (APM_1). Через $\mathrm{APM}_1^{(1)}$ обозначим совокупность таких $\mu \in \mathrm{APM}_1$, что $\mu(t) = \delta_{u(t)}$ при почти всех $t \in R$ и некоторой измеримой функции $u(\cdot) : U \to R$, где $\delta_{u(t)}$ – мера Дирака, сосредоточенная в точке $u(t) \in U$. Можно показать, $\mathrm{APM}_1^{(1)} \cong S(R, U)$ и, следовательно, каждое $u(\cdot) \in S(R, U)$ можно рассматривать как элемент пространства APM_1, отождествляя его с $\delta_{u(\cdot)}$.

Если $\mu \in$ АРМ, то согласно определению, отображение $t \mapsto \langle \mu(t), g(u) \rangle$ принадлежит $S(R, R^n)$ для каждой функции $g \in C(U, R^n)$. Следовательно, при каждом $\lambda \in R$ существуют средние $A_\mu[g, \lambda] \doteq M\{\langle \mu(t), g(u) \rangle \cos \lambda t\}$, $B_\mu[g, \lambda] \doteq M\{\langle \mu(t), g(u) \rangle \sin \lambda t\}$ и при этом

$$\langle \mu(t), g(u) \rangle \sim A_\mu[g, 0] + 2 \sum_{\lambda \neq 0} A_\mu[g, \lambda] \cos \lambda t + B_\mu[g, \lambda] \sin \lambda t \tag{2.1}$$

Как уже отмечалось, множество $\Lambda(\mu, g) \doteq \{\lambda \in R : |A_\mu[g, \lambda]| + |B_\mu[g, \lambda]| > 0\}$ показателей Фурье п.п. отображения $t \mapsto \langle \mu(t), g(u) \rangle$ не более чем счетно, и в (2.1) подразумевается, что $A_\mu[g, \lambda] = B_\mu[g, \lambda] = 0$, если $\lambda \notin \Lambda(\mu, g)$. В [19] показано, что для каждого $\lambda \in R$ найдутся такие меры $\alpha_\lambda, \beta_\lambda \in \mathrm{frm}(U)$, что $A_\mu[g, \lambda] = \langle \alpha_\lambda, g(u) \rangle$, $B_\mu[g, \lambda] = \langle \beta_\lambda, g(u) \rangle$ при всех $g \in C(U, R^n)$. Пусть теперь $\{g_1, g_2, \ldots\}$ – счетное всюду плотное в $C(U, R^n)$ множество непрерывных функций и $\Lambda(\mu) \doteq \{\lambda \in R : |\alpha_\lambda|(U) + |\beta_\lambda|(U) > 0\}$. Оказывается ([19], с. 7), что $\Lambda(\mu) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Lambda(\mu, g_j)$ (следовательно, $\Lambda(\mu)$ – не более чем счетное множество). Множество $\Lambda(\mu)$ называется множеством показателей Фурье отображения $\mu \in$ АРМ, а мерозначный ряд

$$\alpha_0 + 2 \sum_{\lambda \neq 0} \alpha_\lambda \cos \lambda t + \beta_\lambda \sin \lambda t -$$

его рядом Фурье. При этом $\mathrm{Mod}(\mu) \doteq \mathrm{Mod}(\Lambda(\mu))$ – модуль отображения $\mu \in \mathrm{APM}$.

Теорема 2.1[1]. Если $\varphi \in B(R \times U, R)$, то при любом $\mu \in \mathrm{APM}$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t), \varphi(t, u) \rangle$ принадлежит $S(R, R)$ и его модуль содержится в $\mathrm{Mod}[\Lambda(\mu) \cup \Lambda(\varphi)]$.

Следствие 2.1. Если функция $g : R \times V \times U \to R^n$ удовлетворяет условиям 1), 2) и $\mu \in \mathrm{APM}$, то при каждом $x \in V$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t), g(t, x, u) \rangle$ принадлежит $S(R, R^n)$ и, если функция $x(\cdot) \in B(R, V)$ такая, что $\overline{\mathrm{orb}(x)} \subset V$, то отображения $t \mapsto \langle \mu(t), g(t, x(t), u) \rangle$, $t \mapsto \langle \mu(t), g'_x(t, x(t), u) \rangle$ принадлежат пространствам $S(R, R^n)$ и $S(R, \mathrm{Hom}(R^n))$ соответственно.

Пусть далее

$$D_2(\Delta) \doteq \{\mu \in \mathrm{APM}_1 : \mathrm{Mod}(\mu) \subsetneq \mathrm{Mod}(\Delta)\} \tag{2.2}$$

Определение 2.2. Задача

$$J(x(\cdot), \mu(\cdot)) \doteq M\{\langle \mu(t), f_0(t, x(t), u) \rangle\} \to \inf . \tag{2.3}$$

где $x(\cdot)$ – п.п. в смысле Бора решение п.п. системы

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f(t,x,u) \rangle \doteq \int_U f(t,x,u)\, \mu(t)(du), \quad \mu(\cdot) \in D_2(\Delta) \tag{2.4}$$

и $\overline{\mathrm{orb}(x)} \subset V$ называется овыпукленной задачей оптимального управления п.п. движениями, в которой всякая такая пара $(x(\cdot), \mu(\cdot))$ называется допустимым управляемым процессом, а $D_2(\Delta)$ – множеством допустимых управлений; $H(t, x, \nu, p) \doteq -p\langle \nu, f(t, x, u) \rangle + \langle \nu, f_0(t, x, u) \rangle$, $p \in R^{n*}$, $\nu \in \mathrm{rpm}(U)$ – функция Понтрягина задачи (2.3), (2.4).

Теорема 2.2. Пусть $(x^\circ(\cdot), \mu^\circ(\cdot))$ – решение задачи (2.3), (2.4), п.п. система уравнений

$$\dot{y} = \langle \mu^\circ(t), f'_x(t, x^\circ(t), u) \rangle y, \quad y \in R^n \tag{2.5}$$

экспоненциально дихотомична. Тогда для $p(\cdot) \in B(R, R^{n*})$, являющегося решением системы уравнений

$$\dot{p} = -p\langle \mu^\circ(t), f'_x(t, x^\circ(t), u) \rangle + \langle \mu^\circ(t), f'_{0x}(t, x^\circ(t), u) \rangle, \quad p \in R^{n*} \tag{2.6}$$

выполнен принцип максимума Понтрягина

$$\sup_{\nu \in D_2(\Delta)} M\{H(t, x^\circ(t), \nu(t), p(t))\} = M\{H(t, x^\circ(t), \mu^\circ(t), p(t))\} \tag{2.7}$$

Можно доказать (см. теорему 4.2 и замечание 1.1 в [20]) следующую теорему.

Теорема 2.3. Равенство (2.7) выполнено в том и только в том случае, если при почти всех $t \in R$

$$\max_{\nu \in \mathrm{rpm}(U)} H(t, x^\circ(t), \nu, p(t)) = H(t, x^\circ(t), \mu^\circ(t), p(t))$$

Для доказательства теоремы 2.2 нам понадобится понятие игольчатой вариации для $\mu^\circ(\cdot) \in D_2(\Delta)$, а также формулируемая ниже теорема. Но прежде напомним ([19]), что множество $Q \subset \mathrm{APM}$ называется равностепенно п.п., если для любой функции $g \in C(U, R^n)$ множество $\{\langle \mu(\cdot), g(u) \rangle, \mu(\cdot) \in Q\} \subset S(R, R^n)$ равностепенно п.п.

Теорема 2.4[2]. Пусть β – предельная точка открытого множества A линейного нормированного пространства $(L, \|\cdot\|_L)$ и задано отображение $\alpha \mapsto \mu(\cdot, \alpha)$ из A в APM_1.

---

[1] *Иванов А.Г.* Мерозначные почти периодические функции. Ижевск, 1991. 62 с. – Деп. в ВИНИТИ 24.04.91, № 1721–В91.

[2] *Иванов А.Г.* Непрерывная зависимость почти периодического решения системы дифференциальных уравнений от функционального параметра I. 1991. 58 с. – Деп. в ВИНИТИ 30.08.91, № 3610–В91.

Пусть далее функция $f: R \times V \times U \to R^n$ удовлетворяет условиям 1), 2), пара $(x(\cdot,\beta),\ \mu(\cdot,\beta))$ $(\mu(\cdot,\beta) \in \text{APM}_1)$ такова, что $x(\cdot,\beta)$ – п.п. в смысле Бора решение системы (2.4) при $\mu(t) = \mu(t,\beta)$ и $\overline{\text{orb}(x(\cdot,\beta))} \subset V$ и кроме того, п.п. система

$$y^{\cdot} = \langle \mu(t,\beta),\ f'_x(t, x(t,\beta), u)\rangle y, \quad y \in R^n$$

экспоненциально дихотомична. Тогда, если множество $\{\mu(\cdot,\alpha),\ \alpha \in A\}$ равностепенно п.п. и $\|\mu(\cdot,\alpha) - \mu(\cdot,\beta)\|_w \to 0$ при $\|\alpha - \beta\|_L \to 0$, то найдется такое $\gamma > 0$, что при всех $\alpha \in A$ для которых $\|\alpha - \beta\|_L < \gamma$ система $x^{\cdot} = \langle \mu(t,\alpha), f(t,x,u)\rangle$ имеет такое п.п. по Бору решение $x(\cdot,\alpha)$, что $\overline{\text{orb}(x(\cdot,\alpha))} \subset V$ и, кроме того, $\|x(\cdot,\alpha) - x(\cdot,\beta)\|_{C(R^n)} \to 0$ при $\|\alpha - \beta\|_L \to 0$.

3. Фиксируем такое $a > 0$, что $2\pi/a \in \text{Mod}(\Delta)$ и пусть $\vartheta \in [0, a)$, $\alpha \in A \doteq (0, a - \vartheta)$, $\nu \in D_2(\Delta)$ (см. (2.2)). Всюду далее $(x^\circ(\cdot), \mu^\circ(\cdot))$ – решение задачи (2.3), (2.4).

Определение 3.1. Отображение $t \mapsto \mu(t,\alpha)$, $\alpha \in A$, определенное равенством

$$\mu(t,\alpha) = \begin{cases} \mu^\circ(t), & t \in \bigcup\limits_{m \in Z} [ma, (m+1)a] \backslash T_{m,\alpha,\vartheta} \\ \nu(t), & t \in \bigcup\limits_{m \in Z} T_{m,\alpha,\vartheta} \doteq \bigcup\limits_{m \in Z} [ma + \vartheta, ma + \vartheta + \alpha) \end{cases} \tag{3.1}$$

называется игольчатой вариацией для $\mu^\circ(\cdot) \in D_2(\Delta)$.

Непосредственно из определений вытекает следующая

Теорема 3.1. Семейство отображений $\{\mu(\cdot,\alpha),\ \alpha \in A\}$, определенных формулой (3.1) принадлежит $D_2(\Delta)$, равностепенно п.п. и $\|\mu(\cdot,\alpha) - \mu^\circ(\cdot)\|_w \to 0$ при $\alpha \downarrow 0$.

Следствие 3.1. Если система (2.5) экспоненциально дихотомична, то при всех достаточно малых $\alpha \in A$ система (2.4) имеет при $\mu(t) = \mu(t,\alpha)$ такое п.п. по Бору решение $x(\cdot,\alpha)$, что $\overline{\text{orb}(x(\cdot,\alpha))} \subset V$ и

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \|x^\circ(\cdot) - x(\cdot,\alpha)\|_{C(R^n)} = 0 \tag{3.2}$$

Всюду далее, считая $F(t) = \langle \mu^\circ(t), f'_x(t, x^\circ(t), u)\rangle$ для системы (2.5) сохраняем обозначения, входящие в определение экспоненциальной дихотомичности системы (1.3). Кроме того, множество $K \in \text{comp}(R^n)$ такое, что $\overline{\text{orb}(x^\circ)} \subset K \subset V$. По следствию 3.1 получаем: найдется такой интервал $A_1 \subset A$, что для всех $\alpha \in A_1$ $\overline{\text{orb}(\Delta x(\cdot,\alpha))} \subset K$, где $\Delta x(\cdot,\alpha) \doteq x^\circ(\cdot) - x(\cdot,\alpha)$.

Лемма 3.1. Существует такой интервал $A_0 \subset A$, что множество $\{\alpha^{-1}\Delta x(\cdot,\alpha),\ \alpha \in A_0\} \subset B(R, R^n)$ равномерно ограничено.

Доказательство. В работе, цитированной в сноске на с. 840, показано, что найдется такой интервал $A_2 \subsetneq A_1$, что при всех $\alpha \in A_2$ функция $\Delta x(\cdot,\alpha) \in B(R, K)$ удовлетворяет уравнению

$$z = \int_R G(t,s)[h_\alpha(s,z) + g(s,z)]\, ds \tag{3.3}$$

$$h_\alpha(t,z) \doteq \langle \mu^\circ(t) - \mu(t,\alpha), f(t, x^\circ(t) - z, u)\rangle$$

$$g(t,z) \doteq \langle \mu^\circ(t), f(t, x^\circ(t), u) - f(t, x^\circ(t) - z, u)\rangle - \langle \mu^\circ(t), f'_x(t, x^\circ(t), u)\rangle z$$

Поскольку $f'_x \in B(R \times K \times U, \text{Hom}(R^n))$, то (см. [10]) найдется такое $\alpha_0 > 0$, что

$$|f'_x(t, x_1, u) - f'_x(t, x_2, u)| < \frac{3}{4}\left(\frac{\gamma_1}{\sigma_1} + \frac{\gamma_2}{\sigma_2}\right)^{-1} \tag{3.4}$$

для всех $(t, x_j, u) \in R \times K \times U$, $j = 1, 2$, если $|x_1 - x_2| < \alpha_0$. Так как при $\alpha \in A_2$ (см. (3.3))

$$\frac{\Delta x(t,\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_R G(t,s)\, h_\alpha(s, \Delta x(s,\alpha))\, ds +$$

$$+\int_R G(t,s)\langle\mu^\circ(s), \int_0^1 (f'_x(s, x^\circ(s)-\theta\Delta x(s,\alpha), u) - f'_x(s, x^\circ(s), u))\,d\theta\rangle \frac{\Delta x(s,\alpha)}{\alpha}\,ds \tag{3.5}$$

то из (3.1), определения функции $h_\alpha(t, z)$ и (3.4) при всех $\alpha\in A_0 \doteq (0, \alpha_0)\cap A_2$ получаем доказываемое

$$\sup_{\alpha\in A_0}\left\|\frac{\Delta x(\cdot,\alpha)}{\alpha}\right\|_{C(R^n)} < \Gamma_0\left(\frac{\gamma_1}{1-\exp(-\sigma_1 a)} + \frac{\gamma_2}{1-\exp(-\sigma_2 a)}\right) \tag{3.6}$$

$$\Gamma_0 \doteq \sup\{|f(t,x,u)|, (t,x,u)\in R\times K\times U\} \tag{3.7}$$

Лемма 3.2. Справедливо следующее предельное равенство при: $\alpha\in A_0$

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\left\|\frac{\Delta x(\cdot,\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int_R G(\cdot,s)\langle\mu^\circ(s)-\mu(s,\alpha), f(s,x^\circ(s),u)\rangle\,ds\right\|_{C(R^n)} = 0 \tag{3.8}$$

Доказательство леммы 3.2 непосредственно следует из включений $f\in B(R\times K\times U, R^n)$, $f'_x\in B(R\times K\times U, \mathrm{Hom}(R^n))$ равенства (3.5), неравенства (3.6) и мы его опускаем.

Всюду далее (см. (1.4))

$$\begin{aligned}
&Z_+ \doteq \{0, 1, \dots\}\\
&X_\tau(t,s) \doteq \Phi(t+\tau)\Phi^{-1}(s+\tau), \quad P_j(t,s)\doteq \Phi(t)P_j\Phi^{-1}(s), \quad j=1,2\\
&\Delta f(t,\nu) \doteq \langle\nu(t)-\mu^\circ(t), f(t,x^\circ(t),u)\rangle, \quad \eta(t)\doteq\langle\mu(t), f'_{0x}(t,x^\circ(t),u)\rangle\\
&\Gamma_1 \doteq \sup\{|f'_{0x}(t,x,u)|, (t,x,u)\in R\times K\times U\}, \quad \Gamma\doteq\max(\Gamma_0,\Gamma_1)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Отметим, что $\eta(\cdot)\in S(R, R)$ и так как $\|\mu^\circ\| = 1$, то $\Gamma \geqslant \Gamma_1 \geqslant \operatorname{ess\,sup}_{t\in R}|\eta(t)|$. Кроме того, пусть при $s\in[0, a]$

$$\xi^{(1)}_{m,k}(s) \doteq \int_{ma}^{(m+1)a} \eta(t)P_1(t, t+s-ka-a)\Delta f(t+s-ka-a, \nu)\,dt \tag{3.10}$$

$$\xi^{(2)}_{m,k}(s) \doteq \int_{ma}^{(m+1)a} \eta(t)P_2(t, t+s+ka)\Delta f(t+s+ka, \nu)\,dt \tag{3.11}$$

Лемма 3.3. При каждом $k\in Z_+$ множества $\{\xi^{(j)}_{m,k}, m\in Z_+\}$, $j=1, 2$ содержатся в $C([0,a], R^n)$ и равностепенно непрерывны.

Доказательство. Пусть $\omega(h)$ $(h>0)$ равно

$$\sup\{|X_r(0,s_1)-X_r(0,s_2)|, (r,s_j)\in R\times[ka,(k+1)a], \quad j=1,2, \ |s_1-s_2|\leqslant h\}$$

Так как $\Delta f(\cdot,\nu)\in S(R,R^n)$, то ([9], с. 201)

$$\lim_{h\downarrow 0}\left(\sup_{r\in R}\frac{1}{a}\int_r^{r+a}|\Delta f(t+h,\nu)-\Delta f(t,\nu)|\,dt = 0\right. \tag{3.12}$$

Теперь, учитывая, что $\omega(h)\to 0$ при $h\downarrow 0$ и несложно получаемое неравенство (здесь см. (3.7) (3.9))

$$|\xi^{(2)}_{m,k}(s+h)-\xi^{(2)}_{m,k}(s)| \leqslant a\gamma_2\Gamma\sup_{r\in R}\frac{1}{a}\int_r^{r+a}|\Delta f(t+h,\nu)-\Delta f(t,\nu)|\,dt + 2\gamma_2 a\Gamma^2\omega(h)$$

получаем, что множество $\{\xi^{(2)}_{m,k}, m\in Z_+\}\subset C([0,a], R^n)$ и равностепенно непрерывно. Аналогично доказывается соответствующее утверждение для множества $\{\xi^{(1)}_{m,k}, m\in Z_+\}$.

Пусть далее $\Xi^{(1)}_{k,m,\alpha}(\vartheta)$, $\Xi^{(2)}_{k,m,\alpha}(\vartheta)$ равны соответственно

$$\int\limits_{ma}^{(m+1)a} \eta(t)\left[\frac{1}{\alpha}\int\limits_{T_k^-} P_1(t,t+s)\Delta f(t+s,\nu)\,ds -\right.$$
$$\left. - P_1(t,t-ka-a+\vartheta)\Delta f(t-ka-a+\vartheta,\nu)\right]dt$$

$$\int\limits_{ma}^{(m+1)a} \eta(t)\left[\frac{1}{\alpha}\int\limits_{T_k^+} P_2(t,t+s)\Delta f(t+s,\nu)\,ds - P_2(t,t+ka+\vartheta)\Delta f(t+ka+\vartheta,\nu)\right]dt$$

где (см. (3.1))

$$T_k^- \doteq T_{-(k+1),\alpha,\vartheta},\quad T_k^+ \doteq T_{k,\alpha,\vartheta} \tag{3.13}$$

Лемма 3.4. При каждом $k\in Z_+$ и $\vartheta\in[0,a]$

$$\lim_{\substack{\alpha\downarrow 0\\ \alpha\in A_0}}\left(\sup_{m\in Z_+}|\Xi^{(j)}_{k,m,\alpha}(\vartheta)|\right)=0,\quad j=1,2 \tag{3.14}$$

Доказательство. Изменяя в каждом $\Xi^{(j)}_{k,m,\alpha}(\vartheta)$ порядок интегрирования, учитывая (3.10), (3.11) получаем неравенства

$$|\Xi^{(j)}_{k,m,\alpha}(\vartheta)| \leqslant \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\vartheta}^{\vartheta+\alpha} |\xi^{(j)}_{m,k}(s)-\xi^{(j)}_{m,k}(\vartheta)|\,ds,\quad j=1,2$$

Теперь (3.14) следует из леммы 3.3.

Всюду далее

$$L(t,\vartheta)\doteq\sum_{k=0}^{\infty}(P_1(t,t-ka-a+\vartheta)\Delta f(t-ka-a+\vartheta,\nu)-$$
$$-P_2(t,t+ka+\vartheta)\Delta f(t+ka+\vartheta,\nu))$$

Используя свойство "п.п. по диагонали" (см. работу сноски 2)) отображений $(t,s)\mapsto P_j(t,s)$, $j=1,2$ и включение $\Delta f(\cdot,\nu)\in S(R,R^n)$ можно показать, что семейство отображений $\{L(\cdot,\vartheta),\ \vartheta\in[0,a]\}$ принадлежит $S(R,R^n)$, равномерно ограниченно и равностепенно п.п. Кроме того, справедлива следующая

Теорема 3.2. Для почти всех $\vartheta\in[0,a]$, $\alpha\in A_0$

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\left(\sup_{m\in Z_+}\left|\int\limits_{ma}^{(m+1)a}\eta(t)\left(\frac{\Delta x(t,\alpha)}{\alpha}-L(t,\vartheta)\right)dt\right|\right)=0 \tag{3.15}$$

Доказательство. Пусть $\gamma\doteq\max(\gamma_1,\gamma_2)$, $\sigma\doteq\max(\sigma_1,\sigma_2)$. Так как

$$\Xi_\alpha(\vartheta)\doteq\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sup_{m\in Z_+}|\Xi^{(1)}_{k,m,\alpha}(\vartheta)|+\sup_{m\in Z_+}|\Xi^{(2)}_{k,m,\alpha}(\vartheta)|\right)\leqslant 8\gamma a\Gamma^2\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\sigma ka}$$

то для заданного $\epsilon>0$ найдется такое $k_0\geqslant 1$, что для всех $(\alpha,\vartheta)\in A_0\times[0,a)$

$$\Xi_\alpha(\vartheta)<\frac{\epsilon}{2}+\sum_{k=0}^{k_0}\left(\sup_{m\in Z_+}|\Xi^{(1)}_{k,m,\alpha}(\vartheta)|+\sup_{m\in Z_+}|\Xi^{(2)}_{k,m,\alpha}(\vartheta)|\right) \tag{3.16}$$

Далее, так как при $\alpha \in A_0$

$$\sup_{m\in Z_+} \Big|\int_{ma}^{(m+1)a} \eta(t)\left(\frac{\Delta x(t,\alpha)}{\alpha} - L(t,\vartheta)\right)dt\Big| \leqslant \Xi_\alpha(\vartheta) +$$

$$+ a\Gamma \left\| \frac{\Delta x(\cdot,\alpha)}{\alpha} - \int_R G(\cdot,s)\langle \mu^\circ(s) - \mu(s,\alpha), f(s,x^\circ(s),u)\rangle ds \right\|_{C(R^n)}$$

то (3.15) следует из (3.16) и (3.14), (3.8).

Положим $\Delta f_0(t,\nu) \doteq \langle \nu(t) - \mu^\circ(t), f_0(t,x^\circ(t),u)\rangle$. В силу следствия 2.1 $\Delta f(\cdot,\nu) \in S(R,R)$. Поэтому (см. работу сноски 1)), для почти всех $\vartheta \in [0,a]$ существует

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{qa} \Sigma\, \Delta f_0(\vartheta + ma, \nu) \doteq \xi(\vartheta)$$

и при этом отображение $\vartheta \to \xi(\vartheta)$ измеримо и ограничено. Выше и далее суммирование ведется от $m = 0$ до $m = q - 1$.

Лемма 3.5. Справедливо равенство

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \int_0^a \left| \lim_{q\to\infty} \frac{1}{qa} \Sigma\Big(\frac{1}{\alpha}\int_\vartheta^{\vartheta+\alpha} \Delta f_0(t+ma,\nu)\,dt - \Delta f_0(\vartheta+ma,\nu)\Big)\right| d\vartheta = 0$$

Доказательство. Так как функция $\Delta f_0(\cdot,\nu) \in S(R,R)$, то для нее справедливо предельное равенство, аналогичное (3.12). Поэтому

$$\int_0^a \Big|\lim_{q\to\infty} \frac{1}{qa}\Sigma\Big(\frac{1}{\alpha}\int_\vartheta^{\vartheta+\alpha} \Delta f_0(t+ma,\nu)\,dt - \Delta f_0(\vartheta+ma,\nu)\Big)\Big|\, d\vartheta \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{q\to\infty} \frac{1}{qa} \Sigma \int_0^a \Big(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha |\Delta f_0(t+\vartheta+ma,\nu) - \Delta f_0(\vartheta+ma,\nu)|\,dt\Big)d\vartheta \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant\alpha}\Big(\sup_{r\in R} \frac{1}{a}\int_r^{r+a} |\Delta f_0(s+t,\nu) - \Delta f_0(s,\nu)|\,ds \to 0$$

при $\alpha\downarrow 0$, что и требовалось доказать.

Следствие 3.1. Найдется такая последовательность $\{\alpha_j\}_{j=1}^\infty$, что $\alpha_j \downarrow 0$ при $j\to\infty$ и для почти всех $\vartheta \in [0,a]$, например для $\vartheta \in \Xi$ справедливо равенство

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\lim_{q\to\infty}\frac{1}{qa}\Sigma\left(\frac{1}{\alpha_j}\int_\vartheta^{\vartheta+\alpha_j}\Delta f_0(t+ma,\nu)\,dt - \Delta f_0(\vartheta+ma,\nu)\right)\Big) = 0 \qquad (3.17)$$

4. Приведем доказательство теоремы 2.2. Берем любое $\vartheta \in \Xi \cap [0,a)$, см. следствие 3.1. Согласно определению A_0 для всех $\alpha \in A_0$ пара $(x(\cdot,\alpha), \mu(\cdot,\alpha))$ является допустимым управляемым процессом задачи (2.3), (2.4). Так как $(x^\circ(\cdot), \mu^\circ(\cdot))$ – решение этой задачи, то, полагая $\omega \doteq \alpha + \vartheta$, с учетом (3.1), (3.13) имеем

$$0 \leqslant \alpha^{-1}(J(x(\cdot,\alpha),\mu(\cdot,\alpha)) - J(x^\circ(\cdot),\mu^\circ(\cdot)) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\lim_{q\to\infty}\frac{1}{qa}\Sigma\int_{ma}^{(m+1)a}(\langle\mu(t,\alpha), f_0(t,x(t,\alpha),u)\rangle - \langle\mu^\circ(t), f_0(t,x^\circ(t),u)\rangle)\,dt =$$

$$= \lim_{q\to\infty}\frac{1}{qa}\Sigma\Big\{\frac{1}{\alpha}\int_{ma}^{ma+\vartheta}\langle\mu^\circ(t), f_0(t,x(t,\alpha),u) - f_0(t,x^\circ(t),u)\rangle\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\alpha}\int_{T_m^+}(\langle\nu(t), f_0(t,x(t,\alpha),u)\rangle - \langle\mu^\circ(t), f_0(t,x^\circ(t),u)\rangle)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{ma+\omega}^{(m+1)a}\langle\mu^\circ(t), f_0(t, x(t,\alpha), u) - f_0(t, x^\circ(t), u)\rangle\, dt\} =$$

$$= \lim_{q\to\infty}\frac{1}{qa}\Sigma\{\int\limits_{ma}^{(m+1)a}\langle\mu^\circ(t), \int\limits_0^1 f'_{0x}(t, x^\circ(t) + \theta\Delta x(t,\alpha), u)\, d\theta\rangle\frac{\Delta x(t,\alpha)}{\alpha}\, dt +$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{T_m^+}\langle\nu(t), f_0(t, x(t,\alpha), u) - f_0(t, x^\circ(t), u)\rangle\, dt + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{T_m^+}\Delta f_0(t,\nu)\, dt +$$

$$+\int\limits_{ma+\omega}^{(m+1)a}\langle\mu^\circ(t), \int\limits_0^1 f'_{0x}(t, x^\circ(t) + \theta\Delta x(t,\alpha), u)\, d\theta\rangle\frac{\Delta x(t,\alpha)}{\alpha}\, dt\}$$

Положим теперь $\alpha = \alpha_j$, где $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность из следствия 3.1, в силу которого, начиная с некоторого j_0 все $\alpha_j \in A_0$. Переходя в полученном выше соотношении к пределу при $j\to\infty$, учитывая при этом равенства (3.17), (3.15), (3.2), ограничения на f_0, включения μ°, $\nu \in D_2(\Delta)$ и неравенство (3.6), получим, что

$$0 \leqslant \lim_{q\to\infty}\frac{1}{qa}\sum_{m=0}^{q-1}(\Delta f_0(\vartheta + ma, \nu) + \int\limits_{ma}^{(m+1)a}\eta(t) L(t,\vartheta)\, dt)$$

Проинтегрировав последнее неравенство по ϑ от 0 до a (здесь см. определение $\eta(t)$ и $L(t,\vartheta)$) получим

$$M\{\langle\nu(t) - \mu^\circ(t), f_0(t, x^\circ(t), u)\rangle\} + M\{\langle\mu^\circ(t), f'_{0x}(t, x^\circ(t), u)\rangle y(t)\} \geqslant 0 \qquad (4.1)$$

где $y(t) = \int\limits_R G(t,\vartheta)\,\Delta f(\vartheta,\nu)\, d\vartheta$

Поскольку $p(\cdot)$, $y(\cdot)$ – п.п. по Бору решения систем (2.6) и $y^\cdot = \langle\mu^\circ(t), f'_x(t, x^\circ(t), u)\rangle y + \Delta f(t,\nu)$ $(y\in R^n)$, соответственно, то

$$\frac{d}{dt}(p(t)\, y(t)) = p(t)\,\Delta f(t,\nu) + \langle\mu^\circ(t), f'_{0x}(t, x^\circ(t), u)\rangle\, y(t) \qquad (4.2)$$

Так как $\|p\|_{C(R^{n*})}\ \|y\|_{C(R^n)} < \infty$, то $M\{d/dt\,(p(t)\,y(t))\} = 0$. Следовательно (см. (4.2)), $M\{\langle\mu^\circ(t), f'_{0x}(t, x^\circ(t), u)\rangle y(t)\} = -M\{p(t)\,\Delta f(t,\nu)\}$. Поэтому (см. (4.1) и определение функции Понтрягина) для всех $\nu\in D_2(\Delta)$, $M\{H(t, x^\circ(t), \mu^\circ(t), p(t))\} \geqslant M\{H(t, x^\circ(t), \nu(t), p(t))\}$, что равносильно (2.7). Теорема 2.2 доказана.

Замечание 4.1. Можно показать, что условие экспоненциальной дихотомичности системы (2.5) в теореме 2.2 существенно.

В заключение докажем следующую теорему.

Теорема 4.1. Расширение задачи (1.1), (1.2) корректно.

Доказательство. Пусть $(x^\circ(\cdot), \mu^\circ(\cdot))$ – решение задачи (2.3), (2.4) и $\mu^\circ(\cdot) \in D_2(\Delta)\setminus D_1(\Delta)$ (напомним, что $S(R, U) \cong \mathrm{APM}_1^{(1)}$). Тогда, найдется [19] такая последовательность $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset D_1(\Delta)$, что $\|\mu^\circ(\cdot) - \delta_{u_j(\cdot)}\|_w \to 0$ при $j\to\infty$ и для любой функции $\varphi\in B(R\times U, R^n)$

$$\lim_{j\to\infty} M\{\varphi(t, u_j(t))\} = M\{\langle\mu^\circ(t), \varphi(t,u)\rangle\} \qquad (4.3)$$

Более того, оказывается (см. работу сноски 2)), что при всех достаточно больших j система

$$x^\cdot = f(t, x, u_j(t)) \doteq \langle\delta_{u_j(t)}, f(t,x,u)\rangle$$

будет иметь такое п.п. по Бору решение $x_j(\cdot)$, что $\overline{\mathrm{orb}(x_j(\cdot))} \subset V$ и

$$\lim_{j\to\infty}\|x^\circ(\cdot) - x_j(\cdot)\|_{C(R^n)} = 0 \qquad (4.4)$$

Теперь из (4.3) и (4.4) и ограничений на функцию f_0 получаем: $\lim\limits_{j\to\infty} J_0(x_j(\cdot), u_j(\cdot)) = J(x^\circ(\cdot), \mu^\circ(\cdot))$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тонков Е.Л.* Оптимальные периодические движения управляемой системы//Математическая физика. Киев: Наук. думка, 1977. Вып. 21. С. 45–59.
2. *Markus L.* Optimal control of limit cycles or what control theory can do to cure a heart attack of cause one//Lect. Notes Math. 1973. V. 312. P. 108–134.
3. *Halanay A.* Optimal control of periodic solutions//Rev. Roum. de mat. pures et appl. 1974. V. 19. № 1. P. 3–16.
4. *Зубов В.И.* Теория колебаний. М.: Высш. шк., 1979. 400 с.
5. *Зубов В.И.* Колебания и волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. 415 с.
6. *Цикон Х., Фрёзе Р., Кирш В., Саймон Б.* Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990. 406 с.
7. *Панасюк А.И., Панасюк В.И.* Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986. 296 с.
8. *Blot J.* Calculus of variations in mean and convex Lagranguans//Bull. Austral. Math. Soc. 1989. V. 40. № 3. P. 457–463.
9. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
10. *Fink A.M.* Almost periodic differential equations//Lect. Notes Math. 1974. V. 377. 336 p.
11. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
12. *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. 230 с.
13. *Ченцов А.Г.* Приложения теории меры к задачам управления. Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1985. 126 с.
14. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
15. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
16. *Далецкий Ю.Л., Крейн С.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
17. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970. 456 с.
18. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 351 с.
19. *Иванов А.Г.* Мерозначные почти-периодические функции: Препринт Физ.-техн. ин-та УрО АН СССР. Свердловск, 1990. 53 с.
20. *Иванов А.Г.* О почти периодической ляпуновской задаче//ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 718–724.

Поступила в редакцию
23.IX.1991

Ижевск