

УДК 531.011

© 1992 г. В.Ф. Журавлев

ОБ УПРАВЛЕНИИ ФОРМОЙ КОЛЕБАНИЙ В РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается ряд новых постановок задач теории возмущений. Устанавливается соответствие между различными типами формы колебаний в пространстве конфигураций и определенными многообразиями в фазовом пространстве. Дается построение базисов на этих многообразиях, так что каждый орт базиса определяет один из видов эволюции формы колебаний под действием возмущений. Устанавливаются алгебраические свойства локального эволюционного базиса. Приводится классификация возмущений по типу вызываемой ими эволюции формы колебаний. Решается задача об управлении формой колебаний и о стабилизации формы.

К задачам подобного типа сводятся, в частности, задачи управления волнами в одноосных и трехосных гироскопах, основанных на эффекте инертности упругих волн [1, 2].

1. Задача возмущения формы колебаний в системах с кратными корнями. Рассматриваются квазилинейные колебательные системы вида

$$Aq'' + Bq = \epsilon Q(t, q, q') \quad (1.1)$$

где A и B — симметрические положительно определенные матрицы $n \times n$; q — вектор размерности n , правая часть представляет собой возмущение, что формализуется присутствием малого множителя ϵ .

Без ограничения общности матрица A может считаться единичной, а матрица B — диагональной.

Если возмущение отсутствует ($\epsilon = 0$), то любая траектория системы (1.1) в конфигурационном пространстве является всюду плотной в многомерном параллелепипеде, если собственные частоты несоизмеримы (нерезонансный случай). Если же резонанс имеет место, то существует подпространство, в котором любая траектория представляет собой замкнутую кривую. Такие кривые называются фигурами Лиссажу. Они неустойчивы по отношению к исчезающе малым возмущениям: либо исчезают совсем, либо переходят в фигуры иной формы.

По отношению к этим неустойчивым траекториям ставятся следующие три задачи: 1) дать описание тех эволюций, которые претерпевает фигура при появлении возмущений; 2) выполнить классификацию внешних сил возмущений по признаку вызываемой ими эволюции; 3) построить управление, обеспечивающее устойчивость заданной фигуры.

Будут рассматриваться только главные резонансы, т.е. резонансы, имеющие при заданной кратности наименьший порядок. Это соответствует наличию кратных частот собственных колебаний в системе (1.1) при $\epsilon = 0$, причем у нее имеется собственное подпространство, соответствующее кратному корню, в котором любые траектории представляют собой эллипсы, лежащие в некотором линейном двумерном многообразии. В случае кратности, равной двум, это многообразие совпадает с самим собственным подпространством.

Существует только четыре основных типа инфинитезимальных эволюций этого эллипса при возмущениях: изменение главных полуосей, изменение ориентации осей эллипса по отношению к базису пространства (будем называть это прецессией фор-

мы), изменение скорости движения точки по эллипсу, наконец, превращение эллипса в фигуру, которую нельзя рассматривать как эволюцию одного из первых трех типов (будем называть этот тип эволюции разрушением формы).

Геометрические и алгебраические свойства приведенных типов эволюций зависят принципиальным образом от размерности собственного подпространства, в котором эти эволюции происходят, поэтому они должны изучаться для каждого значения кратности собственной частоты отдельно. Ниже рассматриваются случаи $k = 2$ и $k = 3$.

2. Случай двукратной собственной частоты. В этом случае из системы (1.1) можно выделить следующую подсистему:

$$q_i'' + q_i = \epsilon Q_i(t, q, q'), \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

в которой выполним замену фазовых переменных $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ по формулам

$$q = (E \cos t, E \sin t)x, \quad q' = (-E \sin t, E \cos t)x \quad (2.2)$$

Система (2.1) перепишется в стандартной форме, к которой применим метод осреднения [3]. В первом приближении этого метода в медленных переменных получаем систему

$$x' = \epsilon X(x) \quad (2.3)$$

правая часть которой связана с правой частью системы (2.1) так (E — единичная матрица 2×2):

$$X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} -E \sin t & Q_1 \\ E \cos t & Q_2 \end{vmatrix} dt \quad (2.4)$$

Система (2.1) связана со всеми остальными уравнениями системы (1.1). Эта связь в уравнениях (2.3) пропадает, если предположить, что зависимость Q_1 и Q_2 от t периодическая с периодом 2π или ее нет совсем, а зависимость от q и q' не содержит степеней выше двух. (Общий случай может быть рассмотрен посредством введения малого масштаба изменения переменных q с последующим построением высших приближений метода осреднения.)

Если $\epsilon = 0$, то в уравнениях (2.3) $x \equiv \text{const}$ и в конфигурационном пространстве исходной системы траектория является эллипсом, т.е. каждая точка фазового пространства x определяет конкретную эллиптическую траекторию в пространстве q . Среди эллиптических траекторий есть вырожденные траектории двух типов — это либо отрезки прямой, либо окружности.

В первом случае x в (2.2) должны удовлетворять условию

$$K = \det \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

Во втором случае соотношения (2.2) должны определять группу вращений, для чего необходимо и достаточно, чтобы $x_1 = x_4$ и $x_2 = -x_3$ или $x_1 = -x_4$ и $x_2 = x_3$.

Оба последних условия можно объединить:

$$L = (x_1 \pm x_4)^2 + (x_2 \mp x_3)^2 = 0 \quad (2.6)$$

3. Многообразия вырожденных форм. Локальный эволюционный базис. В пространстве x уравнение (2.5) определяет трехмерную коническую поверхность, каждой точке которой в пространстве конфигураций соответствуют прямолинейные колебания. Уравнение (2.6) определяет двумерное многообразие, являющееся "осью" этого конуса, каждой точке которого соответствуют движения по окружности. Все остальные точки определяют эллиптические траектории.

В системе (2.1) выберем начальные условия так, чтобы при $\epsilon = 0$ реализовалась прямолинейная форма колебаний, т.е. начальная точка в системе (2.3) лежит на конусе (2.5). Тогда при $\epsilon \neq 0$ эта прямолинейная форма колебаний будет претерпевать одну из следующих эволюций: разрушение формы, прецессия формы, изменение частоты колебаний и изменение амплитуды. Всем этим типам эволюции прямолинейной формы соответствуют определенные направления в фазовом пространстве.

Направление наискорейшего разрушения прямолинейной формы определяется нормалью к конусу (2.5)

$$e_1 = dK/dx = \{x_4, -x_3, -x_2, x_1\} \quad (3.1)$$

Для построения направления, определяющего прецессию, подвергнем (2.2) преобразованию поворота (A – матрица поворота)

$$\{A \cos t, A \sin t\}x = \{E \cos t, E \sin t\}y \Rightarrow y = y(x, \alpha)$$

Находим связь новых переменных y со старыми переменными x и с углом поворота α :

$$y_m = x_m \cos \alpha + x_{m+1} \sin \alpha, \quad y_{m+1} = -x_m \sin \alpha + x_{m+1} \cos \alpha, \quad m = 1, 3$$

Вектор, определяющий искомое направление, имеет вид

$$e_2 = dy/d\alpha|_{\alpha=0} = \{x_2, -x_1, x_4, -x_3\} \quad (3.2)$$

Для построения направления, определяющего изменение частоты, подвергнем (2.2) преобразованию трансляции по времени (τ – параметр преобразования)

$$\{E \cos(t + \tau), E \sin(t + \tau)\}x = \{E \cos t, E \sin t\}y \Rightarrow y = y(x, \tau)$$

Отсюда и находим связь новых переменных со старыми и с параметром трансляции:

$$y_m = x_m \cos \tau + x_{m+2} \sin \tau, \quad y_{m+2} = -x_m \sin \tau + x_{m+2} \cos \tau, \quad m = 1, 2$$

Вектор, определяющий искомое направление, получим так:

$$e_3 = dy/d\tau|_{\tau=0} = \{x_3, x_4, -x_1, -x_2\} \quad (3.3)$$

Для построения направления, определяющего изменение амплитуды, подвергнем (2.2) преобразованию растяжения

$$(1 + \mu)\{E \cos t, E \sin t\}x = \{E \cos t, E \sin t\}y \Rightarrow y = y(x, \mu)$$

Искомое направление имеет вид

$$e_4 = dy/d\mu = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad (3.4)$$

Четыре векторных поля (3.1)–(3.4) определяют в каждой точке векторного пространства локальный базис инфинитезимальных эволюций.

4. Свойства эволюционного базиса. Вычислим матрицу Грама [4] системы векторов (3.1)–(3.4)

$$G = \begin{vmatrix} (e_1 \cdot e_1) & \dots & (e_1 \cdot e_4) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_4 \cdot e_1) & \dots & (e_4 \cdot e_4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 0 & 0 & 2K \\ 0 & x^2 & -2K & 0 \\ 0 & -2K & x^2 & 0 \\ 2K & 0 & 0 & x^2 \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

Отсюда следует, что эволюционный базис является ортогональным на конусе $K = 0$.
Определитель Грама

$$\det G = (x^4 - 4K)^2$$

равен нулю на многообразии $2K = \pm x^2$, совпадающем с многообразием (2.6), т.е. с осью конуса $K = 0$. Четыре векторных поля (3.1)–(3.4) порождают четыре однопараметрические группы Ли [3, 4] отображений фазового пространства x в себя с операторами

$$\begin{aligned} U_1 &= x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}, & U_2 &= x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} \\ U_3 &= x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}, & U_4 &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Вычисляя коммутаторы, находим $[U_k, U_l] = 0$ для любых k, l . Это означает, что эволюционный базис порождает четырехпараметрическую коммутативную (абелеву) группу Ли, представление которой в группу автоморфизмов R^4 совпадает с максимальной коммутативной подгруппой группы $GL(4, R)$. Отсюда следует, что общее решение системы (2.3) для правой части следующего вида:

$$\dot{x} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 \quad (4.3)$$

где a_k – произвольные постоянные, представляет собой композицию общих решений следующих систем:

$$\dot{x} = a_k e_k \quad k = 1, \dots, 4$$

Это означает, что глобальные эволюции формы колебаний в системе (2.1), порождаемые полями (3.1)–(3.4), не зависят друг от друга.

Проследим для примера эволюцию конуса прямолинейных колебаний вдоль векторного поля e_1 (конус K является инвариантом остальных полей).

Поскольку $U_1 K = \|x\|^2$, а $U_1 \|x\|^2 = 4K$, то полная эволюция конуса вдоль группы U_1 есть $\exp(\pm U_1 \tau) K = K \operatorname{ch} 2\tau \pm \frac{1}{2} \|x\|^2 \operatorname{sh} 2\tau$

При $\tau \rightarrow \infty$ предельным является многообразие

$$K \pm \frac{1}{2} \|x\|^2 = 0$$

совпадающее с осью конуса K – (2.6).

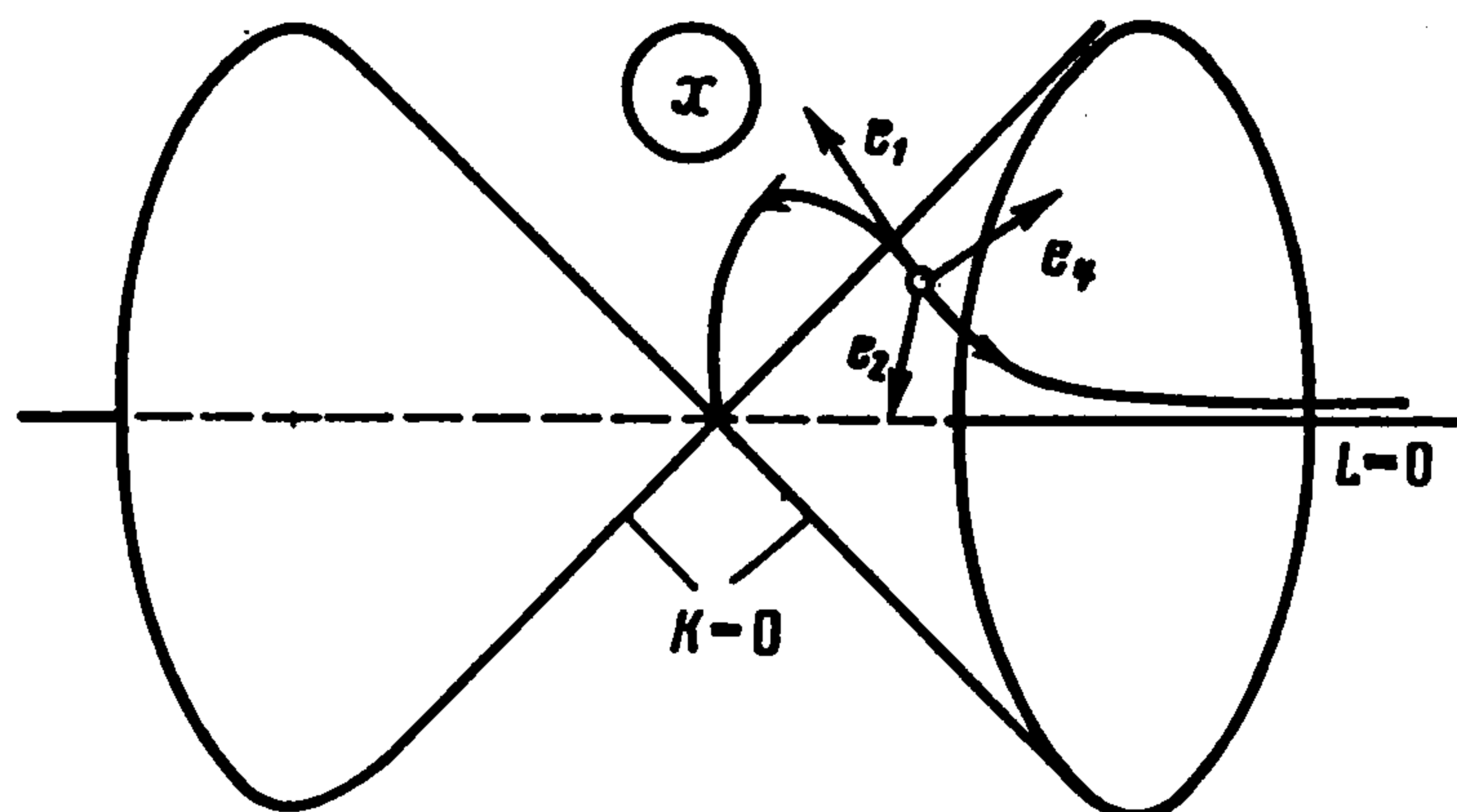
На фиг. 1 изображена траектория точки, определяемая полем e_1 .

5. Классификация сил по типу порождаемой ими эволюции. Рассмотрим в системе (2.1) линейные по координатам и скоростям не зависящие от времени силы

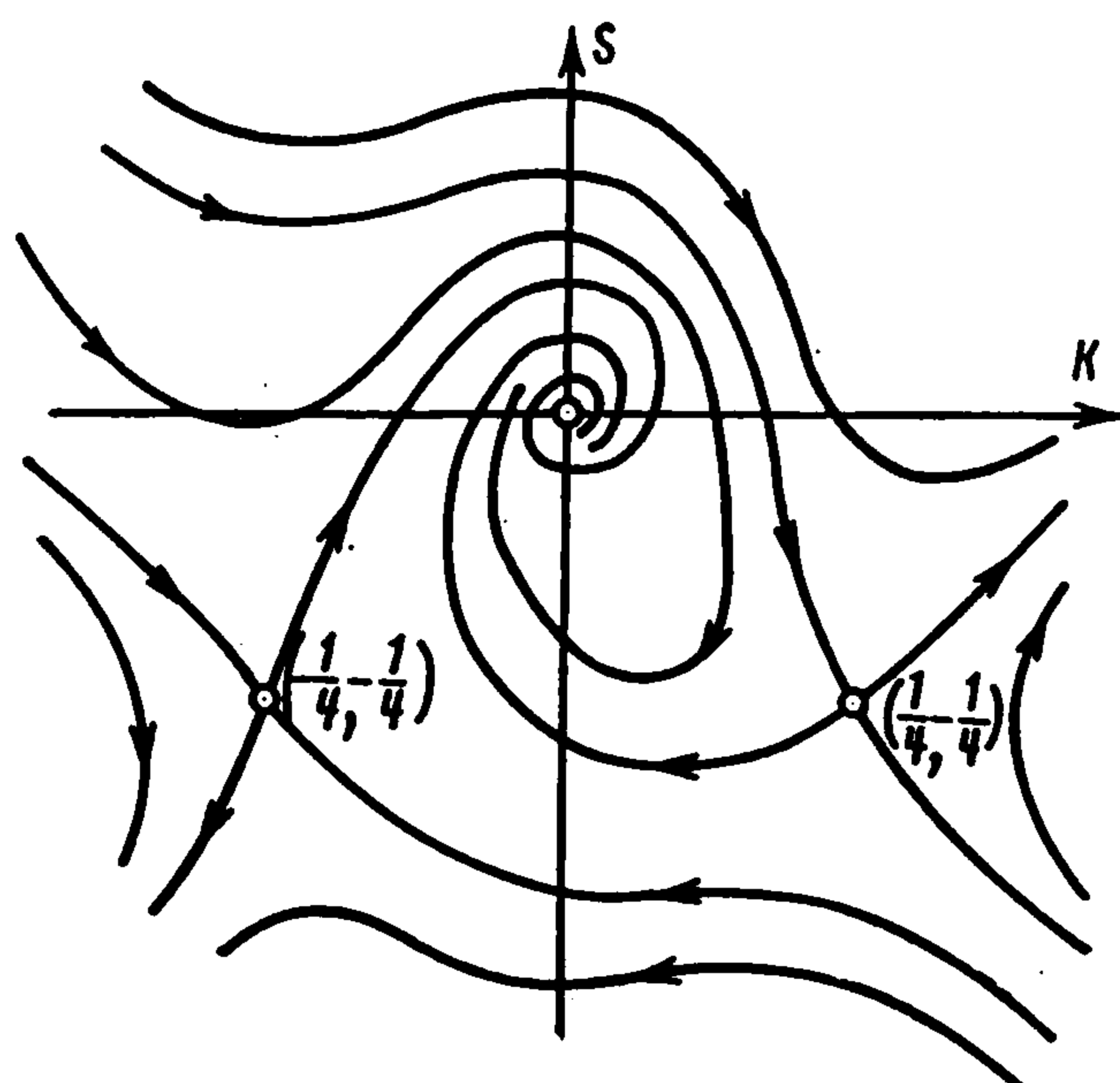
$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = (S + H + N) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (D + R + \Gamma) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, & H &= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2 & -h_1 \end{pmatrix}, & N &= \begin{pmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{pmatrix}, & D &= \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, & R &= \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2 & -r_1 \end{pmatrix}, \\ \Gamma &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Здесь S – симметрическая матрица потенциальных позиционных сил сферического типа, H – аналогичная матрица гиперболического типа, N – кососимметрическая матрица циркулярных (собственно неконсервативных) позиционных сил, D – симметрическая матрица диссипативных сил сферического типа, R – аналогичная матрица гиперболического типа, Γ – кососимметрическая матрица гироскопических сил. Матрицы S и D – диагональные (сферические тензоры), матрицы H и R имеют след, равный нулю (девиаторы).



Фиг. 1



Фиг. 2

Подставляя (5.1) в (2.4), находим выражения для правых частей в системе (2.3), соответствующие этим силам:

$$\begin{aligned}
 S: X(x) &= \frac{1}{2} s \{-x_3, -x_4, x_1, x_2\}, & H: X(x) &= \frac{1}{2} h_1 \{-x_3, x_4, x_1, -x_2\} + \\
 &+ \frac{1}{2} h_2 \{-x_4, -x_3, x_2, x_1\}, & N: X(x) &= \frac{1}{2} n \{-x_4, x_3, x_2, -x_1\}, \\
 D: X(x) &= \frac{1}{2} d \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, & R: X(x) &= \frac{1}{2} r_1 \{x_1, -x_2, x_3, -x_4\} + \\
 &+ \frac{1}{2} r_2 \{x_2, x_1, x_4, x_3\}, & \Gamma: X(x) &= \frac{1}{2} \gamma \{x_2, -x_1, x_4, -x_3\}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Чтобы выяснить, какую эволюцию вызывают все эти силы, достаточно спроектировать их на векторы эволюционного базиса (3.1)–(3.4). Результаты сведены в табл. 1, она дает полную картину влияния линейных возмущений на эволюцию формы колебаний.

Таблица 1

	S	H	N	D	R	Г
e_1	0	$-h_1 K' + \frac{1}{2} h_2 K''$	$-\frac{1}{2} \ x\ ^2 n$	dK	0	0
e_2	sK	0	0	0	$r_1 K' - \frac{1}{2} r_2 K''$	$\frac{1}{2} \gamma \ x\ ^2$
e_3	$-\frac{1}{2} s \ x\ ^2$	$-\frac{1}{2} (h_1 K'' + h_2 K)$	0	0	0	$-\gamma K$
e_4	0	0	$-nK$	$\frac{1}{2} d \ x\ ^2$	$\frac{1}{2} r_1 K'' + r_2 K'$	0
		$K' = x_1 x_2 + x_3 x_4,$	$K'' = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$			

Например, потенциальные сферические силы (S) приводят только к изменению частоты колебаний, если форма колебаний прямолинейная ($K = 0$). Если же $K \neq 0$ (траектория – эллипс), то возникает еще и прецессия эллипса. Циркулярные силы приводят лишь к разрушению прямолинейной формы ($K = 0$) и к изменению амплитуды если $K \neq 0$.

6. Задача стабилизации формы колебаний. В линейных системах вида (2.1) прямолинейная форма колебаний неустойчива при постоянно действующих возмущениях. Как следует из табл. 1, при наличии сил H и N сколь угодно малой амплитуды эта форма невозможна. Поставим задачу: найти вид обратных связей, при которых прямолинейная форма оказывается асимптотически устойчивой. При этом обратные связи должны быть такими, чтобы они не приводили ни к каким другим эволюциям формы.

Такая постановка задачи имеет технические приложения [1]. Если прямолинейная форма устойчива, то, наблюдая ее прецессию, можно делать вывод о наличии в системе гироскопических сил.

Приложим в системе (2.1) силы $Q(x)$, так, чтобы конус (2.5) был устойчивым интегральным многообразием [6] при постоянно действующих возмущениях. Чтобы не было влияния этих сил на частоту и на прецессию формы, они должны удовлетворять условию: $(Q \cdot e_2) \equiv 0$ и $(Q \cdot e_3) \equiv 0$.

Выберем в системе (2.3) обратную связь (управление) в виде

$$X(x) = -Ke_1 - Se_4, \quad S = \frac{1}{2} (\|x\|^2 - 1) \quad (6.1)$$

Если $S = 0$, то амплитуда колебаний равна единице.

Введение в управление члена, пропорционального S , преследует цель не только стабилизировать саму форму, но также и ее амплитуду. Уравнения (2.1) приобретают вид

$$dx/dt = -\epsilon(Ke_1 + Se_4) \quad (6.2)$$

Построим уравнения, определяющие изменение K и S в силу (6.2). Учитывая, что: $dK/dt = dK/dx \cdot x' = e_1 x'$ и $dS/dt = dS/dx \cdot x' = e_4 x'$, а также имея в виду матрицу Грама (4.1) и равенство $\|x\|^2 = 2S + 1$, получим

$$dK/dt = -K(1 + 2S) - 2SK, \quad dS/dt = -2K^2 - S(1 + 2S).$$

Фазовый портрет этой двумерной системы изображен на фиг. 2. Имеются две особые точки $(-1/4, -1/4)$ и $(1/4, -1/4)$ типа седла и одна особая точка $(0, 0)$ типа устойчивого фокуса. Поскольку $K \cap S$ — компакт из экспоненциальной устойчивости нуля следует устойчивость $K \cap S$ при постоянно действующих возмущениях.

Для того чтобы обеспечить управление вида (6.1) в системе (2.3), следует приложить в системе (2.1), как это вытекает из табл. 1 неконсервативные силы с матрицами N и D :

$$q'' + q = -\epsilon(Nq + Dq') \quad (6.3)$$

причем выбрать числа n и d пропорциональными K и S .

Тогда малые возмущения в системе (6.3) не приведут в ней к разрушению прямолинейной формы колебаний, или изменению ее амплитуды. Если же начальная форма колебаний не прямолинейная, то в силу уравнения (6.3) она будет асимптотически стремиться к прямолинейной.

7. **Случай трехкратной собственной частоты (резонанс 1:1:1).** В этом случае из системы (1.1) можно выделить следующую подсистему:

$$q_i'' + q_i = \epsilon Q_i(t, q, q'), \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.1)$$

Как и в предыдущем случае и при тех же условиях в первом приближении нормальной формы, связь этой подсистемы с другими отсутствует. Запишем общее решение этой системы при $\epsilon = 0$ так:

$$q = (E \cos t, E \sin t)x, \quad q = \{q_1, q_2, q_3\} \quad (7.2)$$

где множитель при x — матрица 3×6 (E — единичная матрица 3×3), а x — шестимерный вектор произвольных постоянных.

8. **Формы колебаний и их образ в фазовом пространстве.** Формула (7.2) определяет в пространстве конфигураций плоскую траекторию — эллипс. Она устанавливает один-один соответствие между всеми эллиптическими траекториями в системе (7.1) при $\epsilon = 0$ и всеми точками фазового пространства $x \in R^6$. Плоскость, в которой лежит эллипс, находится из условия

$$\det \begin{vmatrix} q_1 & x_1 & x_4 \\ q_2 & x_2 & x_5 \\ q_3 & x_3 & x_6 \end{vmatrix} = 0$$

Введем обозначения для коэффициентов нормали к плоскости

$$K_1 = x_3x_4 - x_1x_6, \quad K_2 = x_1x_5 - x_2x_4, \quad K_3 = x_2x_6 - x_3x_5 \quad (8.1)$$

При вырождении эллиптической траектории в отрезок прямой имеем

$$K = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = 0 \quad (8.2)$$

Уравнение (8.2) определяет в пространстве x трехмерный конус, находящийся в один-один соответствии со всеми прямолинейными колебаниями в системе (7.1) при $\epsilon = 0$.

9. Первое приближение нормальной формы. Выполнив в системе (7.1) замену $(q, \dot{q}) \rightarrow (x)$ по формулам

$$q = (E \cos t, E \sin t)x, \quad \dot{q} = (-E \sin t, E \cos t)x$$

(E – единичная матрица 3×3) и осуществив осреднение, получим систему, аналогичную (2.3), (2.4).

10. Базис инфинитезимальных эволюций. Построение этого базиса осуществляется аналогично случаю резонанса 1:1, однако имеет в рассматриваемом случае свои особенности.

Имеем три направления разрушения прямолинейной формы

$$\begin{aligned} e_1 = dK_1/dx &= \{0, x_6, -x_5, 0, -x_3, x_2\}, & e_2 = dK_2/dx &= \{-x_6, 0, x_4, x_3, 0, -x_1\}, \\ e_3 = dK_3/dx &= \{x_5, -x_4, 0, -x_2, x_1, 0\} \end{aligned} \quad (10.1)$$

Также имеется и три направления пространственной прецессии. Пусть A – ортогональная матрица $A^T = A^{-1}$:

$$\{A \cos t, A \sin t\}x = \{E \cos t, E \sin t\}y \Rightarrow y = y(x, \alpha, \beta, \gamma)$$

где α, β, γ – локальные координаты поворота A (углы Крылова). Тогда

$$\begin{aligned} e_4 = dy/d\alpha &= \{-x_2, x_1, 0, -x_5, x_4, 0\}, & e_5 = dy/d\beta &= \{x_3, 0, -x_1, x_6, 0, -x_4\}, \\ e_6 = dy/d\gamma &= \{0, -x_3, x_2, 0, -x_6, x_5\} \quad \text{при} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned} \quad (10.2)$$

Направления изменения частоты и амплитуды, как и в предыдущем случае, одномерны

$$\{E \cos(t + \tau), E \sin(t + \tau)\}x = \{E \cos t, E \sin t\}y \Rightarrow y = y(x, \tau)$$

$$e_7 = dy/d\tau |_{\tau=0} = \{x_4, x_5, x_6, -x_1 - x_2, -x_3\} \quad (10.3)$$

$$(1 + \mu)\{E \cos t, E \sin t\}x = \{E \cos t, E \sin t\}y \Rightarrow y = y(x, \mu)$$

$$e_8 = dy/d\mu |_{\mu=0} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \quad (10.4)$$

11. Свойства базиса. Матрица Грама восьми векторов (10.1) – (10.4) в блочной форме имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} G_0 & G_2 & G_3 & G_4 \\ G_2 & G_0 & G_5 & G_3 \\ G_3 & G_5 & G_1 & G_6 \\ G_4 & G_3 & G_6 & G_1 \end{array} \right\| \quad (11.1)$$

где G_0 – матрица Грама пучка разрушения (3×3), совпадающая с матрицей Грама пучка прецессии. Определитель ее равен

$$\det G_0 = K \|x\|^2 \quad (11.2)$$

Остальные блоки имеют вид

$$G_2 = \begin{vmatrix} K_3 & 0 & -K_2 \\ 0 & -K_3 & K_1 \\ -K_1 & K_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad G_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad G_4 = 2 \begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{vmatrix}, \quad G_5 = 2 \begin{vmatrix} K_2 \\ K_1 \\ K_3 \end{vmatrix},$$

$$G_1 = \|x\|^2, \quad G_6 = 0$$

Отметим следующие свойства базиса.

1°. На конусе $K = 0$ и $\det G_0 = 0$, т.е. векторы e_1, e_2, e_3 на конусе линейно зависимы. Аналогично и векторы e_4, e_5, e_6 .

2°. На конусе $K = 0$ ортогональны подпространства:

$$e_1, e_2, e_3 \perp e_4, e_5, e_6 \perp e_7 \perp e_8$$

3°. Алгебра операторов эволюций, порождаемых векторными полями (10.1)–(10.4), восьмимерна и некоммутативна. В предыдущем случае (1:1) размерность этой алгебры соответствовала размерности фазового пространства и она была абелевой.

4°. Конус $K = 0$ является инвариантным многообразием подгрупп прецессии, изменения частоты и амплитуды, т.е. e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 касаются конуса.

5°. Эволюционный базис (10.1)–(10.4) не голономен. Помимо векторных полей разрушения (10.1), являющихся потенциальными, потенциалом обладает только поле e_8 :

$$e_8 = dS/dx, \quad S = \frac{1}{2}(\|x\|^2 - 1) \quad (11.3)$$

12. Классификация возмущений. Правые части в системе (7.1) представим в такой же форме, как и в (5.1) при учете изменившейся размерности. Поскольку эффекты каждой из составляющих (5.1) сил могут анализироваться независимо, а левая часть системы (7.1) инвариантна к повороту осей, то и входящие в соотношение (5.1) матрицы в их 3×3 варианте могут рассматриваться в своей канонической форме каждая. Подставляя их в оператор (9.1) и проектируя результат на векторы (10.1)–(10.4), приходим к табл. 2, составленной для случая $K = 0$. Plusом обозначено отличие от нуля соответствующей проекции. Сравнение табл. 1 и 2 показывает их качественную эквивалентность.

Таблица 2

	S	H	N	D	R	Γ
e_1, e_2, e_3	0	+	+	0	0	0
e_4, e_5, e_6	0	0	0	0	+	+
e_7	+	+	0	0	0	0
e_8	0	0	0	+	+	0

13. Управление формой колебаний. Для того чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость прямолинейной формы колебаний в системе (7.1) при $\epsilon = 0$, в правую часть системы (9.1) введем обратную связь, сформированную по аналогии с (6.1) следующим образом:

$$\dot{x} = - \sum_{i,j} a_{ij} e_i K_j - e_8 S \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (13.1)$$

Стационарное состояние $\dot{x} \equiv 0$ достигается у этой системы на многообразии $K = 0$, $S = 0$. Матрицу коэффициентов a_{ij} надлежит выбрать так, чтобы, будучи ограниченной на компакте $K = 0, S = 0$, она обеспечивала асимптотическую устойчивость стационар-

ного состояния с максимальной степенью устойчивости. Продифференцируем (8.1) в силу системы (13.1):

$$dK_l/dt = dK_l/dx' = - \sum_{i,j} a_{ij}(e_l \cdot e_i) K_j - (e_l \cdot e_8) S \quad (13.2)$$

Если матрицу $\{a_{ij}\}$ выбрать обратной матрице Грама $G_0 = \{(e_i \cdot e_j)\}$ то, учитывая, что $(e_l \cdot e_8) = 2K_l$, получим

$$dK_l/dt = -K_l - 2K_l S \quad (13.3)$$

Степень устойчивости максимальна, однако в силу того, что на конусе $\det G_0 = 0$, матрица $\{a_{ij}\}$ получается неограниченной.

Чтобы избежать этого, достаточно выбрать матрицу $\{a_{ij}\}$, равной матрице алгебраических дополнений матрицы G_0 : $\{a_{ij}\} = \{G_{0ij}\}$. Тогда вместо (13.3) будем иметь

$$dK_l/dt = -K_l \det G_0 - 2K_l S$$

Вычисляя производную от S и учитывая (11.2), получим

$$dK/dt = -2K^2(1+2S) - 4KS, \quad dS/dt = - \sum_{i,j} G_{0ij} K_i K_j - S(1+2S) \quad (13.4)$$

Поскольку G_{0ij} зависят от x , то в отличие от плоского случая (6.4) здесь не удалось записать систему (13.4) только в переменных, определяющих стабилизируемое многообразие $-K, S$. К системе (13.4) для замыкания следует присоединить систему (13.1).

Для доказательства устойчивости многообразия $K = S = 0$ в системе (13.1), (13.4) построим системы сравнения, для чего напомним оценки сверху и снизу для квадратичной формы $\sum G_{0ij} K_i K_j$. В силу положительной определенности этой формы имеем

$$\mu(x) (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2) \leq \sum G_{0ij} K_i K_j \leq \lambda(x) (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2)$$

где $\mu(x)$ и $\lambda(x)$ минимальное и максимальное собственные значения матрицы G_0 . Поскольку $G_{0ij}(x)$ являются однородными функциями четвертой степени, то

$$\mu(x) = \|x\|^4 \mu(x'), \quad \lambda(x) = \|x\|^4 \lambda(x') \quad \text{где } \|x'\| = 1$$

Введем обозначение

$$\nu_1 = \min_{\|x'\|=1} \mu(x'), \quad \nu_2 = \max_{\|x'\|=1} \lambda(x')$$

В результате рассматриваемая квадратичная форма приобретает оценки

$$\nu_1 (1+2S)^2 K \leq \sum G_{0ij} K_i K_j \leq \nu_2 (1+2S)^2 K$$

Это позволяет написать следующие системы сравнения:

$$dK^i/dt = -2(K^i)^2(1+2S^i) - 4K^i S^i, \quad dS^i/dt = -\nu_i (1+2S^i)^2 K^i - S^i(1+2S^i) \quad (i=1, 2)$$

Если $S(0) > 0$, то $i=1$ и $K(t) \leq K^1(t)$, $S(t) \leq S^1(t)$

Если $S(0) < 0$, то $i=2$ и $K(t) \leq K^2(t)$, $S(t) \geq S^2(t)$

Вычерчивая из систем сравнения резонансные члены, получаем их нормальную форму

$$dK^i/dt = -2(K^i)^2, \quad dS^i/dt = -S^i - 4\nu_i K^i S^i$$

из которой следует $K^i \rightarrow 0$ и $S^i \rightarrow 0$.

Следовательно, если $S(0) < 0$, то

$$0 \leq K(t) \leq K^2 \rightarrow 0, \quad 0 > S(t) \geq S^2(t) \rightarrow 0$$

т.е. $K(t) \rightarrow 0$ и $S(t) \rightarrow 0$.

Если $S(0) > 0$, то

$$0 \leq K(t) \leq K^1 \rightarrow 0, \quad S(t) \leq S^1 \rightarrow 0$$

Если при этом $S(t)$ все время остается положительным, то отсюда следует $K(t) \rightarrow 0$ и $S(t) \rightarrow 0$. Если же $S(t)$ меняет знак, то начиная с момента, в котором $S = 0$ следует перейти к системе сравнения $i=2$.

Таким образом доказано, что выбранное управление обеспечивает асимптотическую устойчивость многообразия $K = S = 0$, однако она уже не является экспоненциальной, что объясняется вырожденностью пучка разрушения на конусе.

14. Выводы. Отметим основные качественные отличия плоского случая (резонанс 1:1) от трехмерного пространственного (резонанс 1:1:1).

Если в плоском случае (1:1) направление разрушения прямолинейной формы колебаний и направление прецессии этой формы являются одномерными в фазовом пространстве, то в случае (1:1:1) направления разрушения и прецессии определяются трехмерными линейными многообразиями, вырождающимися в двумерные на $K = 0$.

В плоском случае удастся выбрать обратные связи так, чтобы обеспечить экспоненциальную асимптотическую устойчивость многообразия прямолинейных форм, а тем самым и устойчивость их при постоянно действующих возмущениях.

В трехмерном случае удастся обеспечить лишь асимптотическую устойчивость степенного вида для того же многообразия. Вопрос о стабилизации при постоянно действующих возмущениях поэтому остается открытым.

Базис инфинитезимальных эволюций в плоском случае имеет размерность четыре, совпадающую с размерностью фазового пространства и порождает в нем абелеву, четырехпараметрическую группу Ли. В пространственном случае этот базис имеет размерность восемь, что на две единицы превосходит размерность фазового пространства, в котором он порождает восьмипараметрическую некоммутативную группу Ли.

Представляет интерес продолжить рассмотрение резонансных случаев не только более высоких кратностей, но и более высоких порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 126 с.
2. Журавлев В.Ф. К динамике упругого твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 93–97.
3. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
4. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
5. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 637 с.
6. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.

Москва

Поступила в редакцию

9.1.1992