Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 5, 1992

УДК 62–50

© 1992 г. Ф.Л. Черноусько

ОГРАНИЧЕННЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматриваются управляемые системы с распределенными параметрами, описываемые уравнениями в частных производных, разрешенными относительно первой или второй производной по времени. Управление, фигурирующее в правой части уравнений, предполагается ограниченным по модулю. Предлагается способ управления, который приводит управляемую систему в нулевое состояние за конечное время. Предложенный подход основан на декомпозиции системы и применении оптимального по быстродействию управления для каждой моды движения, полученной в результате разложения решения по методу Фурье. Получены оценки времени процесса управления. Даются достаточные условия разрешимости поставленной задачи. Приводятся примеры.

1. Постановка задачи. Рассматриваются управляемые системы с распределенными параметрами, описываемые линейными уравнениями в частных производных. Будем параллельно рассматривать уравнение

$$w_t = Aw + v \tag{1.1}$$

разрешенное относительно первой производной по времени, и уравнение

$$w_{tt} = Aw + v \tag{1.2}$$

разрешенное относительно второй производной.

В уравнениях (1.1) и (1.2) $w(x, t)$ – скалярная функция n-мерного вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ пространственных координат и времени t, характеризующая состояние системы, v – искомое управление, A – линейный дифференциальный оператор, содержащий частные производные по координатам x_i, $i = 1, \ldots, n$. Коэффициенты оператора A не зависят от t, а его порядок $\operatorname{ord} A$ считаем четным и равным $2m$.

Наиболее важными и распространенными примерами уравнений (1.1) и (1.2), которые имеются в виду в дальнейшем, являются: 1) уравнение теплопроводности, которое получается из (1.1), если $m = 1$, $A = \Delta$ – оператор Лапласа; 2) волновое уравнение, получаемое из (1.2) при $m = 1$, $A = \Delta$; 3) уравнение колебаний упругого стержня или пластины, получаемое из (1.2) при $m = 2$, $A = -\Delta^2$ и $n = 1, 2$ соответственно. Уравнения (1.1), (1.2) описывают также процессы теплопроводности и колебаний в неоднородной среде, если

$$Aw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\right], \quad m = 1$$

где $a(x)$ – заданная функция, характеризующая неоднородность среды.

Уравнения (1.1), (1.2) рассматриваются в некоторой ограниченной области изменения пространственных переменных $x \in \Omega$ и при $t \geqslant 0$. На границе Γ области Ω должно удовлетворяться однородное граничное условие вида

$$Mw = 0, \quad M = (M_1, \ldots, M_m), \quad x \in \Gamma \tag{1.3}$$

Здесь M_j – линейный дифференциальный оператор порядка $\operatorname{ord} M_j < 2m$ ($j = 1, \ldots, m$) с коэффициентами, не зависящими от t. В частности, при $m = 1$ оператор M –

скалярный и имеет вид

$$Mw = b_0(x)w + b_1(x)\partial w/\partial x$$

где $b_0(x)$, $b_1(x)$ – заданные на Γ функции. Условие (1.3) может, в частности, превращаться в условие Дирихле (при $b_0 = 1$, $b_1 = 0$) или Неймана (при $b_0 = 0$, $b_1 = 1$).

Начальные условия имеют вид

$$w(x,0) = w_0(x), \quad x \in \Omega \tag{1.4}$$

для уравнения (1.1) и

$$w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_{t0}(x), \quad x \in \Omega \tag{1.5}$$

для уравнения (1.2).

На управляющую функцию v в уравнениях (1.1), (1.2) наложено ограничение

$$|v(x,t)| \leqslant v^0, \quad x \in \Omega, \quad t \geqslant 0 \tag{1.6}$$

где $v^0 > 0$ – заданная постоянная.

Сформулируем задачу управления.

Требуется построить управление $v(x, t)$, удовлетворяющее ограничению (1.6) и такое, что соответствующее ему решение уравнения (1.1) или (1.2) с граничным условием (1.3) и с соответствующими начальными условиями (1.4) или (1.5) обращается в нуль в некоторый конечный (нефиксированный) момент $T > 0$. Точнее, всюду в Ω должны быть выполнены условия $w(x, T) = 0$ для уравнения (1.1) и $w(x, T) = w_t(x, T) = 0$ для уравнения (1.2). Очевидно, что если положить $v \equiv 0$ при $t \geqslant T$, то решение останется тождественно равным нулю при $t > T$.

Граница области Ω предполагается гладкой, в примерах рассматривается также кусочно-гладкая граница. Требования к начальным функциям и функциональные классы, которым принадлежат решения поставленных задач в различных случаях, рассматриваются в разд. 9.

Отметим, что задачам управления системами с распределенными параметрами посвящено большое число работ, например [1–6]. Предлагаемый ниже способ управления отличается от известных. Он позволяет построить управление с учетом ограничений в замкнутой форме и обеспечивает приведение системы в заданное состояние за конечное время. Этот способ использует декомпозицию исходной системы на простые подсистемы и в этом смысле близок по идее к работе [7], где рассматривались системы с конечным числом степеней свободы.

2. Декомпозиция задачи управления. Решение поставленной задачи будет опираться на метод Фурье. Для его применения рассмотрим сначала следующую задачу на собственные значения, отвечающую начально-краевым задачам (1.1)–(1.5) при $v = 0$.

Задача состоит в определении функций $\varphi(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющих при соответствующих постоянных λ линейному однородному уравнению и граничному условию

$$A\varphi = -\lambda\varphi, \quad x \in \Omega; \quad M\varphi = 0, \quad x \in \Gamma \tag{2.1}$$

Как известно, при определенных условиях (для самосопряженных эллиптических уравнений и, в частности, для уравнения Лапласа, т.е. при $A = \Delta$), задача на собственные значения (2.1) обладает следующими свойствами.

Имеется дискретный счетный спектр положительных собственных значений λ_k, которые могут быть пронумерованы в неубывающем порядке: $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, причем $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$. В некоторых случаях, например, для оператора Лапласа $A = \Delta$ при условии Неймана имеется также нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$. Этот случай также будем включать в рассмотрение. Указанным собственным значениям отвечает ортогональная система собственных функций $\varphi_k(x)$, которая является полной в области Ω. Нормировав эти функции, получим ортонормальную систему функций $\varphi_k(x)$, обладающих следующими свойствами:

$$A\varphi_k = -\lambda_k\varphi_k, \quad x \in \Omega; \quad M\varphi_k = 0, \quad x \in \Gamma$$
$$(\varphi_k, \varphi_i) = \int_\Omega \varphi_k(x)\varphi_i(x)dx = \delta_{ki} \tag{2.2}$$

Здесь δ_{ki} – символ Кронекера. Индекс k в (2.2) и далее, если не оговорено специально, пробегает значения от 0 до ∞ при наличии нулевого собственного значения $\lambda_0 = 0$ и от 1 до ∞ при его отсутствии. Суммирование в дальнейшем будет проводиться по k также в указанных выше пределах.

Воспользуемся теперь методом Фурье для разделения временно́й (от t) и пространственной (от x) зависимостей. Решения уравнений (1.1) и (1.2) будем искать в виде разложений по собственным функциям

$$w(x, t) = \Sigma q_k(t)\varphi_k(x) \tag{2.3}$$

Здесь $q_k(t)$ – некоторые функции времени.

Управление v в (1.1), (1.2) также представим в виде разложения

$$v(x, t) = \Sigma u_k(t)\varphi_k(x) \tag{2.4}$$

где $u_k(t)$ – пока неизвестные функции времени.

Подставляя разложения (2.3) и (2.4) в уравнение (1.1), получим

$$\Sigma \dot{q}_k\varphi_k = \Sigma(q_k A\varphi_k + u_k\varphi_k)$$

Здесь и далее точки означают производные по времени.

Воспользуемся уравнением $A\varphi_k = -\lambda_k\varphi_k$ из (2.2), а также условием ортогональности функций φ_k. В результате будем иметь систему уравнений

$$\dot{q}_k + \lambda_k q_k = u_k \tag{2.5}$$

Аналогично, подставляя разложения (2.3), (2.4) в уравнение (1.2), получим

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = u_k \tag{2.6}$$

Здесь и далее ω_k – частоты собственных колебаний, равные

$$\omega_k = \lambda_k^{1/2}, \quad 0 = \omega_0 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \dots \tag{2.7}$$

Отметим, что решение в виде (2.3) по построению удовлетворяет краевому условию (1.3), так как этому условию удовлетворяют все собственные функции согласно (2.2).

Подставим решение (2.3) в начальные условия (1.4) и (1.5) и воспользуемся свойствами ортонормированности собственных функций (2.2). Получим начальные условия для задачи (2.5) в виде

$$q_k(0) = q_k^0 = \int_\Omega w_0(x)\varphi_k(x)dx \tag{2.8}$$

и для задачи (2.6) в виде

$$q_k(0) = q_k^0 = \int_\Omega w_0(x)\varphi_k(x)dx$$
$$\dot{q}_k(0) = (\dot{q}_k)^0 = \int_\Omega w_{t0}(x)\varphi_k(x)dx \tag{2.9}$$

Таким образом, исходная задача управления для уравнений в частных производных (1.1) и (1.2) свелась к задаче управления для линейных управляемых систем бесконечного порядка (2.5) и (2.6). На управляющие функции u_k этих систем наложим ограничения

$$|u_k(t)| \leqslant U_k, \quad t \geqslant 0 \tag{2.10}$$

Значения постоянных U_k должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялось наложенное ограничение (1.6).

Из (2.4) и (2.10) вытекает оценка

$$|v(x, t)| \leqslant \Sigma U_k |\varphi_k(x)|$$

Следовательно, для выполнения исходного ограничения (1.6) достаточно потребовать, чтобы при всех $x \in \Omega$ удовлетворялось неравенство

$$\Sigma U_k |\varphi_k(x)| \leqslant v^\circ, \quad x \in \Omega \tag{2.11}$$

Введем обозначение

$$\Phi_k = \max_{x \in \Omega} |\varphi_k(x)| \tag{2.12}$$

Неравенство (2.11) заведомо выполнено при условии

$$\Sigma U_k \Phi_k \leqslant v^0 \tag{2.13}$$

Итак, для решения поставленной задачи управления уравнениями (1.1), (1.2) достаточно решить следующие задачи управления системами (2.5), (2.6). Требуется построить управления по обратной связи $u_k(q_k)$ в системе (2.5) и $u_k(q_k, \dot{q}_k)$ в системе (2.6) при $k = 0, 1, \ldots,$ удовлетворяющие ограничениям (2.10) и приводящие эти системы в нулевое состояние ($q_k = 0$ для (2.5) и $q_k = \dot{q}_k = 0$ для (2.6)) за конечное время при любых начальных условиях вида (2.8) или (2.9) соответственно. При этом постоянные U_k в (2.10) должны удовлетворять неравенству (2.11) при всех x, или, что является достаточным, более сильному неравенству (2.13).

Заметим, что в результате применения метода Фурье достигнута декомпозиция системы: каждая мода движения описывается своим уравнением (2.5) или (2.6) с соответствующим управлением u_k. Однако постоянные U_k в ограничениях (2.10) связаны неравенствами (2.11) или (2.13), что представляет собой основную трудность при решении задачи.

Для каждого уравнения (2.5) или (2.6) будем строить управление по обратной связи u_k, оптимальное по быстродействию при ограничении (2.10) с произвольным фиксированным U_k. Эти управления хорошо известны [8]. Они приводятся ниже вместе с некоторыми дополнительными соотношениями, необходимыми для дальнейшего анализа неравенств (2.11), (2.13) и выбора U_k.

3. Уравнение первого порядка по времени. Рассмотрим задачу оптимального по быстродействию попадания в нуль для одного из уравнений (2.5) при ограничении (2.10) и начальном условии (2.8). Имеем

$$\begin{gathered} \dot{q}_k + \lambda_k q_k = u_k, \quad |u_k| \leqslant U_k, \quad \lambda_k \geqslant 0 \\ q_k(0) = q_k^0, \quad q_k(T_k) = 0, \quad T_k \to \min \end{gathered} \tag{3.1}$$

Решение задачи (3.1) получим элементарным путем. Интегрируя уравнение (3.1) и удовлетворяя начальному условию, найдем

$$q_k(t) = [q_k^0 + \int_0^t u_k(\tau)\exp(\lambda_k \tau)d\tau]\exp(-\lambda_k t) \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что для скорейшего обращения решения $q_k(t)$ в нуль управление u_k должно быть максимально по модулю и противоположно по знаку начальному значению q_k^0, или, что то же самое, решению $q_k(t)$.

Таким образом, синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид

$$u_k(q_k) = \begin{cases} -U_k \operatorname{sign} q_k, & q_k \neq 0 \\ 0, & q_k = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Управление (3.3) постоянно вдоль любой фазовой траектории. Подставляя его в (3.2) и интегрируя, получим

$$q_k(t) = \{ |q_k^0| - U_k \lambda_k^{-1} [\exp(\lambda_k t) - 1] \} \exp(-\lambda_k t) \operatorname{sign} q_k^0 \tag{3.4}$$

В конечный момент, согласно (3.1), имеем $q_k(T_k) = 0$. Из (3.4) находим момент окончания процесса

$$\begin{aligned} &T_k = \lambda_k^{-1} \ln(1 + \lambda_k |q_k^0| U_k^{-1}), \quad \lambda_k > 0, \quad k \geqslant 1 \\ &T_0 = |q_0^0| U_0^{-1}, \quad \lambda_0 = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Решение задачи оптимального быстродействия (3.1) для всех $k \geqslant 0$ представлено в форме синтеза оптимального управления (3.3). Фазовая траектория и время быстродействия даны формулами (3.4) и (3.5) соответственно.

4. Уравнение второго порядка по времени. Рассмотрим теперь задачу оптимального управления для одного из уравнений (2.6) при ограничении (2.10) и начальных условиях (2.9). Имеем

$$\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k = u_k, \quad |u_k| \leqslant U_k, \quad \omega_k \geqslant 0 \tag{4.1}$$

$$q_k(0) = q_k^0, \quad \dot{q}_k(0) = (\dot{q}_k)^0, \quad q_k(T_k) = \dot{q}_k(T_k) = 0, \quad T_k \to \min$$

Сначала рассмотрим случай $\omega_k > 0$, $k \geqslant 1$. Введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} &t = \omega_k^{-1} \tau, \quad q_k = U_k \omega_k^{-2} y, \quad \dot{q}_k = U_k \omega_k^{-1} z \\ &u_k = U_k u, \quad T_k = \omega_k^{-1} T_* \end{aligned} \tag{4.2}$$

После замены (4.2) соотношения (4.1) примут нормализованный вид

$$\begin{aligned} &dy/d\tau = z, \quad dz/d\tau = -y + u, \quad |u| \leqslant 1 \\ &y(0) = y^0, \quad z(0) = z^0, \quad y(T_*) = z(T_*) = 0, \quad T_* \to \min \end{aligned} \tag{4.3}$$

Решение задачи оптимального быстродействия (4.3) известно [8]. Синтез оптимального управления для задачи (4.3) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} &u(y, z) = \operatorname{sign}[\psi(y) - z], \quad \psi \neq 0 \\ &u(y, z) = \operatorname{sign} y = -\operatorname{sign} z, \quad \psi = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Функция $\psi(y)$ задана равенствами

$$\begin{aligned} &\psi(y) = (-y^2 - 2y)^{1/2}, \quad -2 \leqslant y \leqslant 0 \\ &\psi(y) = \psi(y + 2), \qquad y < -2 \\ &\psi(y) = -\psi(-y), \qquad y > 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Кривая переключений $z = \psi(y)$, определяемая соотношениями (4.4), (4.5), обладает центральной симметрией и состоит из полуокружностей единичного радиуса с центрами в точках

$$z = 0, \quad y = \pm(2i + 1), \quad i = 0, 1, \ldots \tag{4.6}$$

Знаку плюс в (4.6) отвечают полуокружности, лежащие в четвертом квадранте, а знаку минус – во втором квадранте фазовой плоскости y, z.

Оптимальные фазовые траектории, соответствующие синтезу управления (4.4), состоят из дуг окружностей с центрами в точках $y = \pm 1$, $z = 0$. При этом в области $z > \psi(y)$, где $u = -1$, центр этих окружностей находится в точке $y = -1$, $z = 0$, а в области $z < \psi(y)$, где $u = 1$, – в точке $y = 1$, $z = 0$. Полуокружности кривой переключений с центрами в точках $y = \pm 1$, $z = 0$ сами являются отрезками фазовых траекторий.

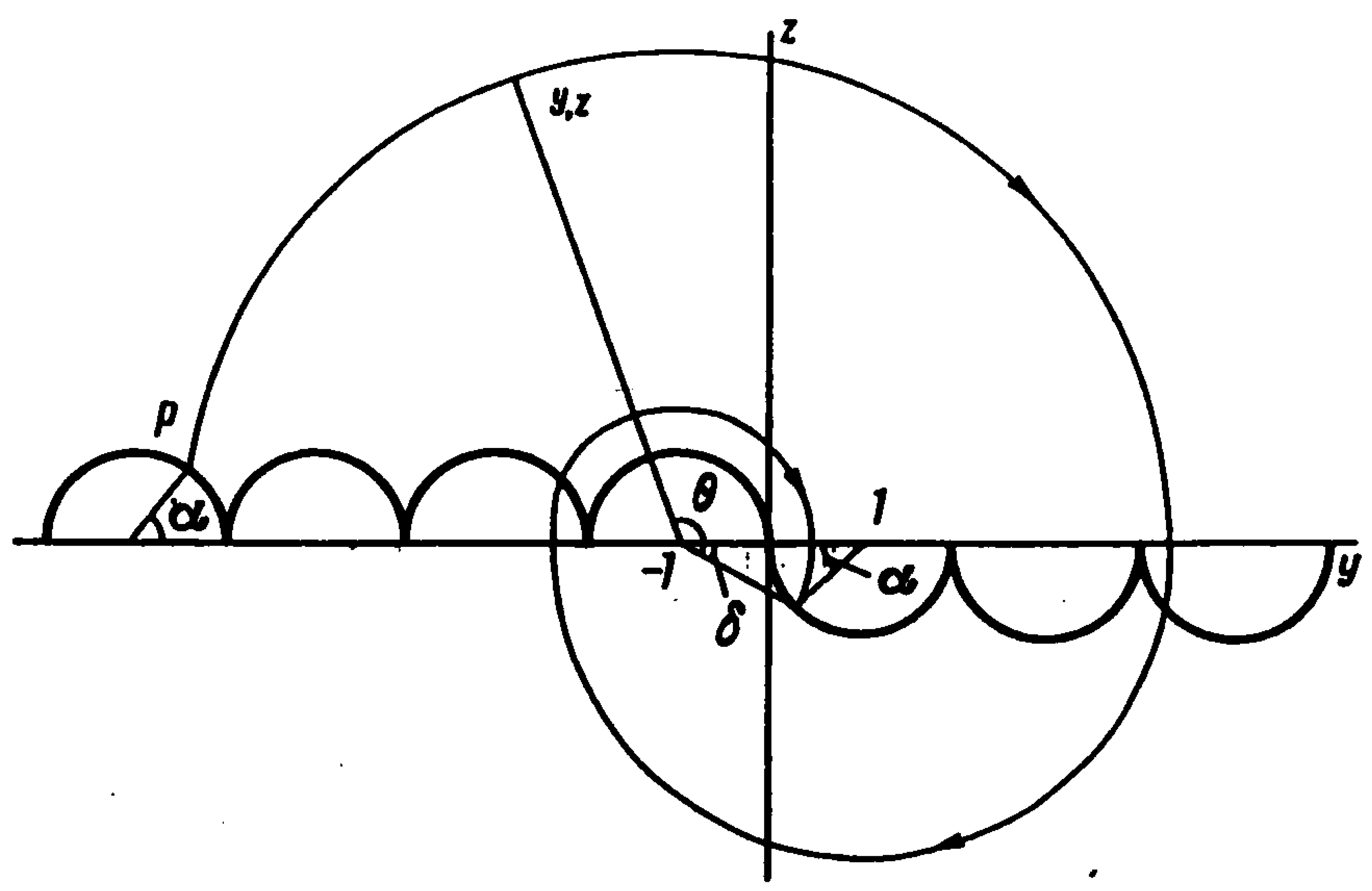
На фиг. 1 жирной линией изображена кривая переключений, а тонкой линией – одна из оптимальных траекторий. Стрелками указано направление роста времени.

Оценим время движения $T_*(y, z)$ по оптимальной фазовой траектории, начинающейся в некоторой точке y, z. Пусть для определенности эта точка лежит в области $z > \psi(y)$. Сделаем сначала некоторые вспомогательные построения.

Обозначим через r, θ полярные координаты начальной точки y, z в случае, если за полюс принята точка $y = -1$, $z = 0$. Имеем

$$y = r\cos\theta - 1, \quad z = r\sin\theta \tag{4.7}$$

Начальный участок фазовой траектории есть дуга окружности $r = \text{const}$. Продолжим эту дугу в обратном времени до пересечения ее с кривой переключений $z = \psi(y)$.



Пусть точка пересечения P находится на i-й (считая от начала координат) полуокружности кривой переключений (см. фигуру, где $i = 4$). Это означает, что координаты точки P можно представить в виде

$$y_P = -2i + 1 + \cos\alpha, \quad z_P = \sin\alpha$$
$$i = 2, 3, \ldots, \quad \alpha \in [0, \pi) \tag{4.8}$$

Угол α отвечает дуге, отсекаемой точкой P от полуокружности кривой переключений, на которой она лежит. Отметим, что такие же дуги α оптимальная траектория отсекает от всех полуокружностей кривой переключений, которые она пересекает. Заключительная дуга фазовой траектории также имеет угловую меру α, см. фигуру.

Так как точка P с координатами (4.8) лежит на окружности $r = \text{const}$, то имеем

$$r^2 = (y_P + 1)^2 + z_P^2 = 4(i-1)^2 + 1 - 4(i-1)\cos\alpha \tag{4.9}$$

Обозначим через R длину радиуса-вектора фазовой точки y, z. Используя соотношения (4.7), получим

$$R^2 = y^2 + z^2 = (r-1)^2 + 2r(1 - \cos\theta) \tag{4.10}$$

Из (4.10), (4.9) следуют неравенства

$$R \geqslant r - 1 \geqslant [4(i-1)^2 - 4(i-1) + 1]^{1/2} - 1 = 2i - 4 \tag{4.11}$$

Время движения по любой дуге оптимальной траектории, как нетрудно видеть, равно угловой мере этой дуги. Каждая дуга между соседними переключениями управления либо равна π, либо (для первого и последнего участков) не превосходит π, а общее число участков равно целому числу i, введенному выше. Поэтому имеем $T_* \leqslant \pi i$. С учетом неравенства (4.11) получим оценку

$$T_* \leqslant \pi(R/2+2) \equiv T^0(R) \tag{4.12}$$

Оценка (4.12) справедлива для всех $R \geqslant 0$, однако из нее не следует стремление $T_* \to 0$ при $R \to 0$. Поэтому получим еще одну оценку для достаточно малых R.

Пусть $i = 2$, т.е. имеется только одно переключение управления, см. фиг. 1. В этом случае оптимальная траектория состоит из дуги радиуса r с угловой мерой $\theta + \delta$ и дуги радиуса 1 с угловой мерой α, совпадающей с участком кривой переключений. Через δ обозначен угол между осью z и лучом, проведенным из точки $y = -1$, $z = 0$ в точку траектории, где происходит переключение. Таким образом

$$T_* = \theta + \delta + \alpha \tag{4.13}$$

где, как можно определить при помощи фигуру, имеем

$$\sin\delta = r^{-1}\sin\alpha, \quad \delta \in [0, \pi/2] \tag{4.14}$$

Получим несколько вспомогательных соотношений, нужных для оценки времени (4.13). Полагая $i = 2$ в (4.9), найдем

$$r = [1 + 8\sin^2(\alpha/2)]^{1/2} \tag{4.15}$$

Равенства (4.14) и (4.15) определяют зависимость угла δ от α. Исследование этой зависимости показывает, что при изменении угла α в пределах (4.8) угол δ изменяется в пределах $[0, \pi/6]$, причем всегда $\delta \leqslant \alpha$. Таким образом, имеем

$$0 \leqslant \delta \leqslant \pi/6, \quad \delta \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha < \pi \tag{4.16}$$

Отметим следующее неравенство:

$$\sin(\gamma/2) \geqslant \gamma/\pi, \quad \gamma \in [0, \pi] \tag{4.17}$$

Полагая $\gamma = \alpha$ в неравенстве (4.17), получим из (4.15) соотношение

$$r \geqslant (1 + 8\pi^{-2}\alpha^2)^{1/2}, \quad \alpha \in [0, \pi)$$

которое перепишем в виде

$$r \geqslant g(\xi) = (1 + \xi)^{1/2}, \quad \xi = 8\pi^{-2}\alpha^2, \quad \xi \in [0, 8) \tag{4.18}$$

Так как $g(\xi)$ – вогнутая функция, на рассматриваемом интервале удовлетворяется неравенство

$$[g(\xi) - g(0)]\xi^{-1} \geqslant [g(8) - g(0)]/8, \quad \xi \in [0, 8]$$

Подставляя в последнее неравенство значения $g(0) = 1$ и $g(8) = 3$ согласно (4.18), получим

$$g(\xi) = (1 + \xi)^{1/2} \geqslant 1 + \xi/4, \quad \xi \in [0, 8]$$

что дает возможность упростить соотношение (4.18)

$$r \geqslant 1 + 2\pi^{-2}\alpha^2, \quad \alpha \in [0, \pi) \tag{4.19}$$

Преобразуем теперь соотношение (4.10), используя неравенство (4.17) при $\gamma = \theta$. Имеем

$$R^2 = (r-1)^2 + 4r\sin^2(\theta/2) \geqslant (r-1)^2 + 4\pi^{-2}r\theta^2$$

В последнее неравенство подставим (4.19). Получим

$$R^2 \geqslant 4\pi^{-4}\alpha^4 + 4\pi^{-2}\theta^2$$

Отсюда вытекают следующие два неравенства:

$$R \geqslant 2\pi^{-2}\alpha^2, \quad R \geqslant 2\pi^{-1}|\theta| \tag{4.20}$$

Преобразуем теперь равенство (4.13) для T_*, используя неравенства (4.16) и (4.20)

$$T_* = \theta + \delta + \alpha \leqslant 2\alpha + \theta \leqslant 2|\alpha| + |\theta| \leqslant \pi[(2R)^{1/2} + R/2] \equiv T^1(R) \tag{4.21}$$

Сопоставим оценки (4.12) и (4.21). Напомним, что оценка (4.21) получена при $i = 2$, а оценка (4.12) – при всех $i \geqslant 2$. Но при $i \geqslant 3$, согласно (4.11), имеем $R \geqslant 2$. Из (4.12), (4.21) следует, что $T^0(R) \leqslant T^1(R)$ при $R \geqslant 2$. Следовательно, при всех $i \geqslant 3$ имеем $T^0(R) \leqslant T^1(R)$.

Таким образом, установлено, что оценка (4.21) времени быстродействия

$$T_* \leqslant T^1(R) = \pi[R/2 + (2R)^{1/2}], \quad R = (y^2 + z^2)^{1/2} \tag{4.22}$$

справедлива при любых y, z.

Возвращаясь к исходным размерным переменным (4.2), получим оценку времени оптимального быстродействия для задачи (4.1) в виде

$$\begin{gathered} T_k(q_k, q_k^{\cdot}) \leqslant \pi U_k^{-1}[\rho_k/2 + (2U_k\omega_k^{-1}\rho_k)^{1/2}] \\ \rho_k = [\omega_k^2 q_k^2 + (q_k^{\cdot})^2]^{1/2}; \quad k = 1, 2, \ldots; \quad \omega_k > 0 \end{gathered} \tag{4.23}$$

Здесь и далее верхний нулевой индекс у q_k, $q_k^{\cdot}$ опущен.

Отдельно рассмотрим случай нулевого собственного значения $k = 0$, $\omega_0 = 0$. В этом случае синтез оптимального управления для задачи (4.1) имеет вид [8]

$$\begin{gathered} u_0(q_0, q_0^{\cdot}) = U_0 \operatorname{sign}[\psi_0(q_0) - q_0^{\cdot}], \quad \psi_0 \neq 0 \\ u_0(q_0, q_0^{\cdot}) = U_0 \operatorname{sign} q_0 = -U_0 \operatorname{sign} q_0^{\cdot}, \quad \psi_0 = 0 \\ \psi_0(q_0) = -[2U_0|q_0|]^{1/2} \operatorname{sign} q_0, \quad \psi_0(0) = 0 \end{gathered} \tag{4.24}$$

Время оптимального быстродействия определяется формулой (в указанном виде она приведена, например, в [7])

$$T_0(q_0, q_0^{\cdot}) = U_0^{-1}\{2[(q_0^{\cdot})^2/2 - U_0 q_0 \sigma]^{1/2} - q_0^{\cdot}\sigma\}$$

$$\sigma = \operatorname{sign}[\psi_0(q_0) - q_0^{\cdot}]$$

Применяя к приведенному соотношению неравенство $(a+b)^{1/2} \leqslant |a|^{1/2} + |b|^{1/2}$, получим оценку

$$T_0(q_0, q_0^{\cdot}) \leqslant (2^{1/2} + 1)U_0^{-1}|q_0^{\cdot}| + 2U_0^{-1/2}|q_0|^{1/2} \tag{4.25}$$

Таким образом, получены необходимые в дальнейшем соотношения для задачи оптимального быстродействия (4.1) при всех $k \geqslant 0$. Синтез оптимального управления $u_k(q_k, q_k^{\cdot})$ при $k \geqslant 1$ в размерных переменных определен соотношениями (4.4), (4.5), в которые нужно подставить формулы замены (4.2). В случае $k = 0$ синтез задан формулами (4.24). Оптимальные фазовые траектории также хорошо известны [8]. Для времени оптимального быстродействия получены оценки (4.23) в случае $k \geqslant 1$ и (4.25) при $k = 0$.

5. Анализ ограничений и построение управления. В полученных в разд. 3, 4 соотношениях фигурируют постоянные U_k – ограничения на управления для k-й моды движения. Эти постоянные выберем так, чтобы уменьшить полное время движения, равное

$$T = \max_k T_k, \quad k \geqslant 0 \text{ или } k \geqslant 1 \tag{5.1}$$

при выполнении ограничения (2.11) или (2.13). Индекс k в (2.11), (2.13) и (5.1) принимает значения 0, 1, ... при наличии нулевого собственного значения $\lambda_0 = 0$ у задачи (2.2) и значения 1, 2, ... при его отсутствии.

Так как все T_k монотонно возрастают с ростом U_k, а в ограничения (2.11), (2.13) все U_k входят линейно с положительными коэффициентами, то естественно выбрать U_k из условия равенства всех T_k: $T_0 = T_1 = \ldots$ При этом получится минимально возможное (при ограничениях (2.11), (2.13)) значение времени T в (5.1).

Следуя указанному предложению, положим для уравнения первого порядка в соответствии с (3.5)

$$T_k = \lambda_k^{-1} \ln(1 + \lambda_k | \dot{q}_k | U_k^{-1}) = T$$

Здесь T – пока неопределенная постоянная.

Отсюда найдем

$$U_k = \lambda_k | q_k^0 | [\exp(\lambda_k T) - 1]^{-1}, \quad k \geqslant 0 \tag{5.2}$$

Формула (5.2) справедлива при всех $\lambda_k \geqslant 0$. Подставляя (5.2) в неравенство (2.13), получим

$$\Sigma \lambda_k [\exp(\lambda_k T) - 1]^{-1} | q_k^0 | \Phi_k \leqslant v^0 \tag{5.3}$$

Как известно, при весьма общих предположениях собственные значения λ_k и максимумы собственных функций Φ_k возрастают не быстрее, чем некоторые степени номера k. Модули коэффициентов Фурье $|q_k|$ по крайней мере не возрастают с номером k для любой ограниченной начальной функции $w_0(x)$. Следовательно, из-за наличия экспоненциального множителя ряд в левой части неравенства (5.3) сходится при любом $T > 0$. Когда T пробегает значения от 0 до ∞, сумма ряда монотонно убывает от ∞ до 0. Следовательно, всегда существует такое $T > 0$, при котором неравенство (5.3) выполняется. Таким образом, поставленная задача управления для уравнения (1.1) всегда разрешима предложенным методом. Время процесса T можно выбрать из условия выполнения неравенства (5.3).

Оценку сверху для времени T получим, используя неравенство

$$\lambda_k [\exp(\lambda_k T) - 1]^{-1} \leqslant T^{-1} \tag{5.4}$$

Из (5.3) и (5.4) следует, что если T выбрано из условия

$$T = Q_1 / v^0, \quad Q_1 = \Sigma | q_k | \Phi_k < \infty \tag{5.5}$$

то неравенство (5.3) заведомо выполнено. Следовательно, при сходимости ряда Q_1 время T можно выбрать согласно простой формуле (5.5).

Обратимся к уравнению второго порядка по времени (1.2). В этом случае вместо формул для времен T_k имеются лишь оценки сверху (4.23) и (4.25), поэтому условие равенства всех T_k нельзя выполнить точно. Имея это в виду, а также для упрощения последующих формул предлагается выбрать U_k в виде

$$\begin{aligned} &U_k = c\rho_k, \quad c > 0, \quad k = 1, 2, \ldots \\ &U_0 = \max(c_1 |\dot{q}_0|, \ c_2 |q_0|), \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Здесь c, c_1, c_2 – постоянные. Подставляя U_k из (5.6) в (4.23), получим

$$T_k \leqslant \pi[(2c)^{-1} + 2^{1/2}(\omega_k c)^{-1/2}], \quad k = 1, 2, \ldots$$

Последнее неравенство не нарушится, если в нем заменить ω_k на $\omega_1 \leqslant \omega_k$. Получим оценку

$$T_k \leqslant \pi[(2c)^{-1} + 2^{1/2}(\omega_1 c)^{-1/2}] \tag{5.7}$$

При подстановке выражения (5.6) для U_0 в неравенство (4.25) будем различать два случая. В первом случае, при $c_1 | \dot{q}_0 | \geqslant c_2 | q_0 |$, получим из (4.25) и (5.6)

$$T_0 \leqslant (2^{1/2} + 1) c_1^{-1} + 2 | c_1 \dot{q}_0 |^{-1/2} | q_0 |^{1/2} \leqslant (2^{1/2} + 1) c_1^{-1} + 2 c_2^{-1/2} \tag{5.8}$$

Во втором случае при $c_1|\dot{q}_0| > c_2|q_0|$ аналогичные оценки приводят точно к такому же результату (5.8). Выберем постоянные c_1, c_2 так, чтобы оба слагаемых в правых частях неравенств (5.7) и (5.8) совпадали почленно, т.е.

$$\pi(2c)^{-1} = (2^{1/2}+1)c_1^{-1}, \quad \pi 2^{1/2}(\omega_1 c)^{-1/2} = 2c_2^{-1/2}$$

Отсюда находим искомые постоянные

$$c_1 = \nu_1 c, \quad c_2 = \nu_2 c$$

$$\nu_1 = 2(2^{1/2}+1)\pi^{-1} \approx 1{,}53; \quad \nu_2 = 2\omega_1 \pi^{-2} \tag{5.9}$$

Формулы (5.6) при учете равенств (5.9) запишем в виде

$$U_k = c\rho_k, \quad k \geqslant 1, \quad U_0 = c\max(\nu_1|\dot{q}_0|, \nu_2|q_0|) \tag{5.10}$$

Величины ν_1, ν_2 определены в (5.9) и не зависят от c. Так как в силу выбора постоянных c_1 и c_2 правые части неравенств (5.7) и (5.8) совпадают, то оценка (5.7) справедлива при всех $k \geqslant 0$. Таким образом, для времени процесса управления (5.1) во всех случаях имеем оценку

$$T \leqslant \pi[(2c)^{-1} + 2^{1/2}(\omega_1 c)^{-1/2}] \tag{5.11}$$

Осталось выбрать постоянную c так, чтобы удовлетворить ограничению (2.11). Подставляя (5.10) в (2.11), получим

$$c \leqslant v^0[Q^* + \max(\nu_1|\dot{q}_0|, \nu_2|q_0|)]^{-1} \tag{5.12}$$

Здесь введены обозначения

$$Q^* = \sup_{x\in\Omega} Q_2(x), \quad Q_2(x) = \Sigma\rho_k|\varphi_k(x)| \tag{5.13}$$

$$\rho_k = [\omega_k^2 q_k^2 + (\dot{q}_k)^2]^{1/2}, \quad k \geqslant 1$$

и использованы формулы (4.23) для ρ_k. Неравенство (5.13) записано для случая наличия нулевого собственного значения. При его отсутствии следует просто опустить последнее слагаемое (max) в (5.12).

Таким образом, достаточным условием разрешимости поставленной задачи управления для уравнения (1.2) при помощи предложенного подхода является равномерная ограниченность ряда $Q_2(x)$ из (5.13) в области Ω. Для этого достаточно потребовать равномерной ограниченности в Ω следующих двух рядов:

$$Q_3(x) = \Sigma\omega_k|q_k||\varphi_k(x)|, \quad Q_4(x) = \Sigma|\dot{q}_k||\varphi_k(x)| \tag{5.14}$$

Используя обозначение (2.12), условие ограниченности Q^* из (5.13) можно заменить более сильным условием сходимости числового ряда

$$Q_5 = \Sigma\rho_k\Phi_k < \infty, \quad \rho_k = [\omega_k^2\Phi_k^2 + (\dot{q}_k)^2]^{1/2} \tag{5.15}$$

или условием сходимости двух рядов

$$Q_6 = \Sigma\omega_k|q_k|\Phi_k < \infty, \quad Q_7 = \Sigma|\dot{q}_k|\Phi_k < \infty \tag{5.16}$$

Подытожим полученные результаты. Для обоих уравнений (1.1), (1.2) указаны условия разрешимости и даны оценки сверху времени процесса управления T.

Задача (1.1) всегда разрешима, время T для нее может быть выбрано из условия (5.3) или в случае сходимости ряда Q_1 из более простого условия (5.5).

Задача (1.2) заведомо разрешима, если выполнено одно из условий сходимости рядов (5.13)–(5.16). Для времени T имеется оценка (5.11), в которой постоянная c должна быть выбрана из условия (5.12). Здесь число Q^* определяется соотношениями

(5.13) или одним из следующих соотношений:

$$Q^* = \sup_{x\in\Omega} Q_3(x) + \sup_{x\in\Omega} Q_4(x), \quad Q^* = Q_5, \quad Q^* = Q_6 + Q_7$$

в случае выполнения условий сходимости рядов (5.14) – (5.16) соответственно.

Отметим, что при равномерном стремлении к нулю начальных функций w_0, w_{t0} все их коэффициенты Фурье стремятся к нулю, и при этом все ряды в (5.3), (5.5), (5.13) – (5.16) также стремятся к нулю. Из оценок (5.3), (5.11). (5.12) следует, что при этом для обоих уравнений (1.1), (1.2) время процесса $T \to 0$.

После определения времени T и постоянной c найдем U_k из соотношений (5.2) и (5.10) для уравнений (1.1) и (1.2) соответственно. Коэффициенты u_k искомого закона управления (2.4) определены в виде синтеза, т.е. в зависимости от текущих значений q_k и $\dot q_k$, в разд. 3 и 4 для уравнений (1.1) и (1.2) соответственно, см. (3.3), (4.4). Поскольку для систем разд. 3, 4 известны оптимальные траектории, то управления, полученные в форме синтеза, могут быть представлены и в виде программ $u_k(t)$, т.е. в виде релейных функций времени с точками переключения, зависящими от начальных условий.

Таким образом, управление (2.4) может быть представлено либо в виде программного управления для заданных начальных условий, либо в виде синтеза, если используются управления u_k в зависимости от q_k и $\dot q_k$. Во втором случае управление формируется в виде $v = v(x', w(\cdot, t))$ для системы (1.1) и в виде $v = v(x;\ w(\cdot, t),\ w_t(\cdot, t))$ для системы (1.2). Приведенная запись означает, что управление v в точке $x \in \Omega$ в момент t есть функционал от функций $w(y, t)$ и $w_t(y, t)$ при $y \in \Omega$. Однако при этом сохраняется и зависимость от начальных функций w_0, w_{t0} посредством постоянных U_k, которые зависят от начальных данных, см. (5.2), (5.10). В этих формулах постоянные T и c также зависят от начальных условий.

Полученное управление (2.4) по построению таково, что все краевые и начальные условия, а также ограничения (1.6) автоматически удовлетворяются. Это управление близко к оптимальному по быстродействию, так как, во-первых, оптимальными являются управления для каждой подсистемы и, во-вторых, ограничения U_k выбраны так, что времена управления для подсистем равны или близки друг к другу.

Ниже рассматриваются некоторые конкретные примеры, в которых анализируются условия сходимости рядов (5.5), (5.15), (5.16). Получены условия разрешимости задачи в виде требований к начальным функциям. В заключение даны некоторые общие условия разрешимости задачи управления для уравнения (1.2).

6. Одномерные задачи ($n = 1$, $A = \Delta$). Рассмотрим сначала уравнения теплопроводности и колебаний в случае одной пространственной переменной x. Уравнения (1.1), (1.2) имеют вид

$$w_t = w_{xx} + v, \quad w_{tt} = w_{xx} + v \tag{6.1}$$

Область Ω представляют собой отрезок $[0, a]$ оси x, а ее граница состоит из двух точек $x = 0$, $x = a$. Будем параллельно рассматривать условия (1.3) типа Дирихле и Неймана

$$w(0) = w(a) = 0, \quad w_x(0) = w_x(a) = 0 \tag{6.2}$$

Собственные функции $\varphi_k(x)$, отвечающие задачам (6.1), (6.2), удовлетворяют уравнениям

$$\varphi_k'' = -\lambda_k\varphi_k, \quad 0 < x < a \tag{6.3}$$

где штрихи означают производные по x, и условиям Дирихле или Неймана

$$\varphi_k(0) = \varphi_k(a) = 0, \quad \varphi_k'(0) = \varphi_k'(a) = 0 \tag{6.4}$$

Собственные значения задач (6.3), (6.4) таковы:

$$\lambda_k = \omega_k^2, \quad \omega_k = \pi k/a \tag{6.5}$$

причем $k \geq 1$ для задачи Дирихле и $k \geq 0$ для задачи Неймана. Ортонормированные собственные функции для задач Дирихле и Неймана равны соответственно

$$\varphi_k(x) = (2/a)^{1/2}\sin(\omega_k x), \quad k = 1, 2, \ldots$$
$$\varphi_0(x) = a^{-1/2}, \quad \varphi_k(x) = (2/a)^{1/2}\cos(\omega_k x) \tag{6.6}$$

Величины Φ_k из (2.12) в данном случае ограничены

$$\Phi_k = (2/a)^{1/2}, \quad k \geqslant 1, \quad \Phi_0 = a^{-1/2} \tag{6.7}$$

Вычислим коэффициенты Фурье (2.8), (2.9), предполагая начальные функции $w_0(x)$, $w_{t0}(x)$ достаточное число раз дифференцируемыми по x и применяя интегрирование по частям. При помощи (6.6) получим

$$q_k(0) = \int_0^a w_0\varphi_k dx = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}\omega_k^{-1}\left\{[(-w_0)\cos(\omega_k x)]|_0^a + \int_0^a w_0'\cos(\omega_k x)\,dx\right\} =$$
$$= \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}\omega_k^{-1}\left\{[(-w_0)\cos(\omega_k x)]|_0^a - \omega_k^{-1}\int_0^a w_0''\sin(\omega_k x)\,dx\right\} =$$
$$= \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}\omega_k^{-1}\left\{[(-w_0 + \omega_k^{-2}w_0'')\cos(\omega_k x)]|_0^a + \omega_k^{-3}\int_0^a w_0^{\mathrm{IV}}\sin(\omega_k x)\,dx\right\} \tag{6.8}$$

для задачи Дирихле и

$$q_k(0) = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}\omega_k^{-2}\left\{[w_0'\cos(\omega_k x)]|_0^a + \omega_k^{-1}\int_0^a w_0'''\sin(\omega_k x)\,dx\right\} =$$
$$= \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}\omega_k^{-2}\left\{[(w_0' - \omega_k^{-2}w_0''')\cos(\omega_k x)]|_0^a - \omega_k^{-3}\int_0^a w_0^{\mathrm{V}}\sin(\omega_k x)\,dx\right\}, \quad k \geqslant 1 \tag{6.9}$$

для задачи Неймана. Из соотношений (6.8), (6.9) можно вывести оценки коэффициентов Фурье в зависимости, во-первых, от степени гладкости начальной функции w_0 и, во-вторых, от дополнительных условий в граничных точках $x = 0$, $x = a$, т.е. на Г. Аргумент 0 у функции q_k опускаем. Через B_j всюду далее обозначены некоторые положительные константы, а через C^i – классы функций, имеющих на отрезке $[0, a]$ непрерывные производные до i-го порядка включительно. Для задачи Дирихле при помощи (6.8) получим

$$\begin{aligned}
&|q_k| \leqslant B_1\omega_k^{-1} && \text{при} \quad w_0 \in C^1\\
&|q_k| \leqslant B_2\omega_k^{-2} && \text{при} \quad w_0 \in C^2, \quad w_0 = 0 \ \text{на Г}\\
&|q_k| \leqslant B_3\omega_k^{-3} && \text{при} \quad w_0 \in C^3, \quad w_0 = 0 \ \text{на Г}\\
&|q_k| \leqslant B_4\omega_k^{-4} && \text{при} \quad w_0 \in C^4, \quad w_0 = w_0'' = 0 \ \text{на Г}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Аналогично для задачи Неймана из (6.9) имеем

$$\begin{aligned}
&|q_k| \leqslant B_5\omega_k^{-1} && \text{при} \quad w_0 \in C^1\\
&|q_k| \leqslant B_6\omega_k^{-2} && \text{при} \quad w_0 \in C^2\\
&|q_k| \leqslant B_7\omega_k^{-3} && \text{при} \quad w_0 \in C^3, \quad w_0' = 0 \ \text{на Г}\\
&|q_k| \leqslant B_8\omega_k^{-4} && \text{при} \quad w_0 \in C^4, \quad w_0' = 0 \ \text{на Г}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Очевидно, оценки вида (6.10), (6.11) можно продолжать неограниченно. Для коэффициентов Фурье $\dot{q}_k(0)$ из (2.9) имеют место оценки, аналогичные (6.10), (6.11), с заменой w_0 на w_{t0}.

Переходя к исследованию сходимости рядов из (5.5), (5.16), заметим, что величины Φ_k согласно (6.7) не зависят от k. Учитывая еще соотношение (6.5), получим следующие условия сходимости рядов.

Ряд (5.5) для задачи Дирихле сходится при условиях

$$w_0 \in C^2, \quad w_0 = 0 \ \text{на Г} \tag{6.12}$$

а для задачи Неймана – при условии

$$w_0 \in C^2 \tag{6.13}$$

Ряды (5.16) для задачи Дирихле сходятся при условиях

$$w_0 \in C^3, \quad w_{t0} \in C^2, \quad w_0 = w_{t0} = 0 \ \text{на Г} \tag{6.14}$$

а для задачи Неймана – при условиях

$$w_0 \in C^3, \quad w_{t0} \in C^2, \quad \partial w_0/\partial n = 0 \ \text{на} \ \Gamma \qquad (6.15)$$

Отметим, что условия сходимости (6.12), (6.14) рядов (5.5), (5.16) для задачи Дирихле включают, помимо требований гладкости, условия Дирихле для начальных функций w_0, w_{t0}. Эти условия, вообще говоря, не являются обязательными при постановке начальнокраевых задач, и их нужно накладывать дополнительно. В случае же задачи Неймана условия (6.13), (6.15) менее ограничительны: для ряда (5.5) никаких условий, кроме условий гладкости, не накладывается, а для рядов (5.16) накладывается условие Неймана только на начальную функцию w_0 (но не на функцию w_{t0}).

Напомним, что задача управления для первого уравнения (6.1) (уравнения теплопроводности) всегда разрешима, и условия (6.12), (6.13), обеспечивающие сходимость ряда (5.5), служат лишь основанием для простой оценки времени процесса управления в (5.5). Для второго уравнения (6.1) (уравнения колебаний струны) условия (6.14), (6.15) являются достаточными условиями разрешимости задачи управления предложенным методом.

7. Управление колебаниями стержня ($n = 1$, $A = -\Delta^2$). В качестве примера уравнения четвертого порядка рассмотрим управление поперечными колебаниями упругого стержня. Уравнение (1.2) в этом случае имеет вид

$$w_{tt} = -w_{xxxx} + v \qquad (7.1)$$

Ограничимся для определенности граничными условиями шарнирного опирания на обоих концах стержня длины a, т.е.

$$w = w_{xx} = 0 \ \text{на} \ \Gamma, \quad \Gamma = \{ x = 0, \ x = a \} \qquad (7.2)$$

Задача на собственные значения (2.1) для системы (7.1), (7.2) имеет вид

$$\varphi^{\mathrm{IV}} = \lambda\varphi, \quad x \in \Omega = [0, a], \quad \varphi = \varphi'' = 0 \ \text{на} \ \Gamma \qquad (7.3)$$

Как известно, собственные значения задачи (7.3) положительны и таковы

$$\lambda_k = \omega_k^2, \quad \omega_k = (k\pi/a)^2, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (7.4)$$

где ω_k имеют смысл частот собственных колебаний стержня. Соответствующие собственные функции задачи (7.3) могут быть представлены в виде группы равенств (6.6). Поэтому оценки (6.7), (6.8) и (6.10) остаются справедливыми для рассматриваемой задачи, однако всюду в (6.6), (6.8), (6.10) частоты ω_k определяются теперь формулами (7.4) (вместо (6.5)). Используя указанные оценки, получим аналогично (6.14) следующие достаточные условия сходимости рядов (5.16) в рассматриваемой задаче:

$$w_0 \in C^2, \quad w_{t0} \in C^1, \quad w_0 = 0 \ \text{на} \ \Gamma \qquad (7.5)$$

Условия (7.5) включают лишь одно из двух краевых условий (7.2) на Г. Они менее ограничительны, чем (6.14), и заведомо выполняются при тех ограничениях, которые обычно накладываются на начальные функции в задаче о колебаниях стержня.

8. Двумерные и трехмерные задачи ($n = 2, 3$; $A = \Delta$). Перейдем к рассмотрению уравнений

$$w_t = \Delta w + v, \quad w_{tt} = \Delta w + v; \quad n = 2, 3 \qquad (8.1)$$

в двумерном и трехмерном случаях. Пусть область Ω представляет собой прямоугольник при $n = 2$ и прямоугольный параллелепипед при $n = 3$, т.е. задается в виде

$$\Omega\colon\ 0 \leqslant x_i \leqslant a_i; \quad i = 1, \ldots, n; \quad n = 2, 3 \qquad (8.2)$$

Решения задач на собственные значения (2.2) для уравнений (8.1) в областях (8.2) при условиях типа Дирихле и Неймана известны и получаются методом разделения переменных. В двумерном случае ($n = 2$) для задачи Дирихле получим аналогично (6.5), (6.6)

$$\begin{aligned} &\lambda_{ik} = \omega_{ik}^2 = \pi^2 [(i/a_1)^2 + (k/a_2)^2]; \quad i, k = 1, 2, \ldots \\ &\varphi_{ik}(x_1, x_2) = 2(a_1 a_2)^{-1/2} \sin(\pi i x_1/a_1) \sin(\pi k x_2/a_2) \end{aligned} \qquad (8.3)$$

Для задачи Неймана собственные значения задаются соотношениями (8.3) при $i, k = 0, 1, \ldots$, а собственные функции имеют вид, аналогичный (6.6)

$$\begin{aligned} &\varphi_{ik}(x_1, x_2) = 2(a_1 a_2)^{-1/2} \cos(\pi i x_1/a_1) \cos(\pi k x_2/a_2) \\ &\varphi_{00}(x_1, x_2) = (a_1 a_2)^{-1/2} \\ &\varphi_{0k} = 2^{1/2}(a_1 a_2)^{-1/2} \cos(\pi k x_2/a_2) \end{aligned} \qquad (8.4)$$

$$\varphi_{i0} = 2^{1/2}(a_1 a_2)^{-1/2}\cos(\pi i x_1/a_1); \quad i, k = 1, 2, \ldots$$

Величины (2.12) в силу (8.3), (8.4) ограниченны и таковы:

$$\Phi_{ik} = 2(a_1 a_2)^{-1/2}; \quad i, k = 1, 2, \ldots \tag{8.5}$$

Перейдем к оценкам коэффициентов Фурье (2.8), (2.9), предполагая начальные функции w_0, w_{t0} достаточно гладкими. Заменяя кратные интегралы по области Ω повторным интегрированием по x_1, x_2, а затем, применяя интегрирование по частям, получим аналогично (6.8) – (6.11) следующие оценки:

$$\begin{aligned}
&|q_{ik}| \leqslant B_1 (ik)^{-1} \quad \text{при} \quad w_0 \in C^{(1)} \\
&|q_{ik}| \leqslant B_2 (ik)^{-2} \quad \text{при} \quad w_0 \in C^{(2)}, \quad w_0 = 0 \ \text{на} \ \Gamma \\
&|q_{ik}| \leqslant B_3 (ik)^{-3} \quad \text{при} \quad w_0 \in C^{(3)}, \quad w_0 = 0 \ \text{на} \ \Gamma
\end{aligned} \tag{8.6}$$

для задачи Дирихле и

$$\begin{aligned}
&|q_{ik}| \leqslant B_4 (ik)^{-1}, \quad |q_{0k}| \leqslant B_5 k^{-1} \\
&|q_{i0}| \leqslant B_6 i^{-1} \quad \text{при} \quad w_0 \in C^{(1)} \\
&|q_{ik}| \leqslant B_7 (ik)^{-2}, \quad |q_{0k}| \leqslant B_8 k^{-2} \\
&|q_{i0}| \leqslant B_9 i^{-2} \quad \text{при} \quad w_0 \in C^{(2)} \\
&|q_{ik}| \leqslant B_{10} (ik)^{-3}, \quad |q_{0k}| \leqslant B_{11} k^{-3} \\
&|q_{i0}| \leqslant B_{12} i^{-3} \quad \text{при} \quad w_0 \in C^{(3)}, \quad \partial w_0/\partial n = 0 \ \text{на} \ \Gamma
\end{aligned} \tag{8.7}$$

для задачи Неймана. В соотношениях (8.6), (8.7) всюду $i, k = 1, 2, \ldots$, а $C^{(r)}$ – класс функций w, имеющих в замкнутой области Ω непрерывные частные производные вида

$$\partial^{p+q}/\partial x_1^p \partial x_2^q, \quad 0 \leqslant p \leqslant r, \quad 0 \leqslant q \leqslant r \tag{8.8}$$

Для коэффициентов Фурье $q_{ik}^{\cdot}(0)$ из (2.9) имеют место оценки, аналогичные (8.6), (8.7), с заменой w_0 на w_{t0}.

При помощи соотношений (8.3), (8.5) – (8.7) получим искомые достаточные условия сходимости рядов (5.5), (5.16). В рассматриваемых здесь случаях суммирование в этих рядах проводится по двум индексам i, k в пределах от 1 до ∞ для задачи Дирихле и от 0 до ∞ для задачи Неймана.

Оказывается, что ряд (5.5) сходится для задачи Дирихле при условиях

$$w_0 \in C^{(2)}, \quad w_0 = 0 \ \text{на} \ \Gamma \tag{8.9}$$

а для задачи Неймана – при условии

$$w_0 \in C^{(2)} \tag{8.10}$$

Ряды (5.16) сходятся для задачи Дирихле при условиях

$$w_0 \in C^{(3)}, \quad w_{t0} \in C^{(2)}, \quad w_0 = w_{t0} = 0 \ \text{на} \ \Gamma \tag{8.11}$$

а для задачи Неймана – при условиях

$$w_0 \in C^{(3)}, \quad w_{t0} \in C^{(2)}, \quad \partial w_0/\partial n = 0 \ \text{на} \ \Gamma \tag{8.12}$$

Условия сходимости (8.9) – (8.12) вполне аналогичны соответствующим условиям (6.12) – (6.15) для одномерной задачи.

В трехмерном случае ($n = 3$), который рассматривается совершенно аналогично двумерному, собственные значения определяются равенствами, подобными (8.3)

$$\lambda_{ijk} = \pi^2 [(i/a_1)^2 + (j/a_2)^2 + (k/a_3)^2]$$

Здесь $i, j, k \geqslant 1$ для задачи Дирихле и $i, j, k \geqslant 0$ для задачи Неймана.

Для собственных функций и коэффициентов Фурье имеют место формулы и оценки, аналогичные (8.3) – (8.5). В итоге приходим к точно таким же условиям сходимости (8.9) – (8.12), как и в двумерном случае. При этом под $C^{(r)}$ в этих условиях следует понимать аналогично (8.8) класс функций w, имеющих в замкнутой области Ω непрерывные частные производные вида

$$\partial^{p+q+s}/\partial x_1^p \partial x_2^q \partial x_3^s, \quad 0 \leqslant p \leqslant r, \quad 0 \leqslant q \leqslant r, \quad 0 \leqslant s \leqslant r$$

9. **Условия разрешимости в общем случае.** Как указано в разд. 5, для разрешимости задачи управления в случае уравнения (1.1) не требуется никаких дополнительных условий, а в случае управления (1.2) достаточно, например, чтобы были равномерно ограниченны в Ω функции $Q_3(x)$ и $Q_4(x)$ из (5.14). Проанализируем эти условия.

Всюду ниже предполагаем достаточную гладкость коэффициентов операторов A из (1.2) и M из (1.3), а также границы Γ и начальных функций w_0, w_{t0} из (1.5).

Заметим, что ряды (5.14) содержат, во-первых, собственные функции $\varphi_k(x)$ задачи (2.2) и, во-вторых, коэффициенты Фурье $q_k, \dot{q}_k$ начальных функций w_0, w_{t0}. Поэтому представляется целесообразным использовать следующие оценки рядов (5.14), вытекающие из неравенства Коши–Буняковского и позволяющие разделить вклады собственных функций и коэффициентов Фурье

$$
\begin{aligned}
Q_3(x) &\leqslant [\Sigma\lambda_k^{-\beta}\varphi_k^2(x)\cdot\Sigma\lambda_k^{1+\beta}q_k^2]^{1/2}\\
Q_4(x) &\leqslant [\Sigma\lambda_k^{-\gamma}\varphi_k^2(x)\cdot\Sigma\lambda_k^{\gamma}(\dot{q}_k)^2]^{1/2}
\end{aligned}
\qquad (9.1)
$$

Здесь β и γ – пока произвольные числа, которые должны быть выбраны так, чтобы все ряды в (9.1) были ограничены.

Будем рассматривать дробные (положительные и отрицательные) степени дифференциального оператора A. Оператор A порядка $2m$ определяет преобразование $Aw = f$. Его область определения D_A есть класс функций w, определенных в области Ω, имеющих в этой области суммируемые с квадратом частные производные порядка до $2m$ включительно (этот факт можно записать в форме $D_A \subset H_{2m}(\Omega)$, где H_{2m} – соответствующее пространство Соболева), а также удовлетворяющих краевым условиям (1.3).

Согласно теореме Агмона о ядре [9], оператор A^{-s} при $2ms > n$ является интегральным оператором с непрерывным ядром, равным

$$K(x, y) = \Sigma\lambda_k^{-s}\varphi_k(x)\varphi_k(y)$$

Полагая $x = y$, т.е. рассматривая ядро на диагонали, получим равномерную ограниченность ряда

$$\Sigma\lambda_k^{-s}\varphi_k^2(x) \leqslant \text{const} < \infty, \quad 2ms > n$$

Отсюда следует, что для равномерной ограниченности первых сомножителей в правых частях (9.1), т.е. рядов, зависящих от x, достаточно, чтобы

$$\beta > n(2m)^{-1}, \quad \gamma > n(2m)^{-1} \qquad (9.2)$$

Отметим, что условия (9.2) при $m = 1$ впервые даны в работе В.А. Ильина [10].

Вторые сомножители в правых частях (9.1) (ряды, зависящие от коэффициентов Фурье) в силу равенства Парсеваля можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
\Sigma\lambda_k^{1+\beta}q_k^2 &= \int_\Omega (A^{(1+\beta)/2}w_0)^2dx\\
\Sigma\lambda_k^{\gamma}(\dot{q}_k)^2 &= \int_\Omega (A^{\gamma/2}w_{t0})^2dx
\end{aligned}
\qquad (9.3)
$$

Ряды (9.3) сходятся, если функции $A^{(1+\beta)/2}w_0$ и $A^{\gamma/2}w_{t0}$ суммируемы с квадратом в области Ω, т.е. принадлежат классу $L^2(\Omega)$. Другими словами, функции w_0 и w_{t0} должны принадлежать областям определения соответствующих операторов, т.е.

$$w_0 \in D_{A^{(1+\beta)/2}}, \quad w_{t0} \in D_{A^{\gamma/2}} \qquad (9.4)$$

Из результатов работ Сили [11] следует, что область определения D_{A^s} при при $s \in (0, 1)$ лежит в $H_{2ms}(\Omega)$ и выделяется тем из краевых условий (1.3), порядок которых $\operatorname{ord} M_j = r_j < r = 2ms - ½$. В случае, если для некоторого j имеем $r_j = r$, то соответствующее граничное условие понимается в некотором интегральном смысле.

В рассматриваемом случае, согласно (9.4), имеем

$$\begin{aligned} &s = (1+\beta)/2, \quad r = m(1+\beta) - ½ \quad \text{для} \quad w_0 \\ &s = \gamma/2, \quad r = m\gamma - ½ \quad \text{для} \quad w_{t0} \end{aligned} \qquad (9.5)$$

причем s может быть и больше единицы.

Пусть, например, $s = 1 + \sigma$, где $\sigma \in (0, 1)$. Тогда, представляя результат действия оператора A^s в виде $A^s w = A^\sigma(Aw)$ и применяя теорему Сили, придем к следующему утверждению. Область определения D_{A^s} лежит в $H_{2ms}(\Omega)$ и выделяется краевыми условиями (1.3), а также теми из краевых условий $M_j Aw = 0$, для которых $\operatorname{ord} M_j < 2m\sigma - ½$. Другими словами, при $s \in (1, 2)$ на функцию w, помимо краевых условий (1.3), накладываются еще те из условий вида $M_j Aw = 0$, для которых $\operatorname{ord}(M_j A) < r = 2ms - ½$.

Аналогичные результаты следуют также из лемм, приведенных в Приложении 2 книги [12].

Таким образом, для сходимости рядов (9.3) функции w_0 и w_{t0} нужно подчинить условиям, зависящим от параметров s, r, причем эти условия тем жестче, чем больше s, r. Отметим, что в ограничениях $r_j < r$ на порядки операторов r_j – целые числа, поэтому дробная часть числа r несущественна.

Определим при помощи соотношений (9.2), (9.5) для каждой из функций w_0, w_{t0} для числа: нижнюю грань s^* возможных значений s и целую часть r^* от нижней грани возможных значений r. Значения $\nu^* = 2ms^*$ и r^* для различных пар n, m при $n \leqslant 3$, $m \leqslant 2$ сведены в таблицу.

n, m	$\nu^*(w_0)$	$\nu^*(w_{t0})$	$r^*(w_0)$	$r^*(w_{t0})$
1,1	3/2	1/2	1	0
1,2	5/2	1/2	2	0
2,1	2	1	1	0
2,2	3	1	2	0
3,1	5/2	3/2	2	1
3,2	7/2	3/2	3	1

При помощи найденных значений ν^*, r^* можно ответить на вопрос о сходимости рядов (9.1) и тем самым указать достаточные условия разрешимости рассматриваемых задач управления.

Для этого достаточно потребовать выполнения следующих условий.

Во-первых, функции w_0, w_{t0} должны принадлежать классам $H_\nu(\Omega)$, где ν – любое число, большее соответствующего ν^*. В частности, ν можно выбрать целым, и тогда это требование будет означать существование у функций w_0, w_{t0}, суммируемых с квадратом частных производных порядка до ν включительно.

Во-вторых, функции w_0, w_{t0} должны удовлетворять на Γ тем из краевых условий (9.2), для которых $\operatorname{ord} M_j \leqslant r^*$, и тем из краевых условий $M_j Aw = 0$, для которых $\operatorname{ord}(M_j A) \leqslant r^*$. Так как $\operatorname{ord} M_j < \operatorname{ord} A = 2m$, то наложение условий $M_j Aw = 0$ может потребоваться лишь при $r^* \geqslant 2m$.

Из таблицы видно, что неравенство $r^* \geqslant 2m$ имеет место только при $n = 3$, $m = 1$ для функции w_0. В этом случае для задачи Дирихле ($\operatorname{ord} M = 0$) имеем $\operatorname{ord} MA = 2 = r^*(w_0)$, и на функцию w_0 нужно наложить дополнительно условие $Aw = 0$ на Γ.

В случае же задачи Неймана ($\mathrm{ord}\, M = 1$) при $n = 3$, $m = 1$, а также для любых задач при остальных значениях n, m дополнительных условий не возникает.

Появление дополнительного краевого условия можно пояснить следующим образом. Предлагаемый закон управления (2.4) обращается в нуль на Г в случае задачи Дирихле, так как при этом $\varphi_k = 0$ на Г. Это снижает возможности управления на границе области, и может требовать дополнительных условий на начальные функции на Г.

В то же время некоторые из краевых условий (1.3) для разрешимости задачи накладывать необязательно. Например, при $n = 2$, $m = 1$ имеем $r^*(w_0) = 1$, $r^*(w_{t0}) = 0$. Следовательно, для оператора A второго порядка в случае задачи Дирихле ($\mathrm{ord}\, M = 0$) функции w_0, w_{t0} должны удовлетворять условию Дирихле, а в случае задачи Неймана ($\mathrm{ord}\, M = 1$) функция w_0 должна удовлетворять условию Неймана, а функция w_{t0} может ему и не удовлетворять.

Сопоставляя данные таблицы с результатами рассмотрения примеров в разд. 6–8, видим, что в примерах условия сходимости оказались менее ограничительными при $n = 1$, $m = 2$ и $n = 3$, $m = 1$. При $n = 1$, $m = 2$ в примере не требуется накладывать условие $w_0'' = 0$ на Г, которое фигурирует в таблице: $r^*(w_0) = 2$. При $n = 3, m = 1$ в примере для задачи Неймана не требуется условия $\partial w_{t0}/\partial n = 0$, а для задачи Дирихле — условия $\Delta w_0 = 0$ на Г, которые следуют из таблицы.

Автор выражает глубокую благодарность М.С. Аграновичу, В.А. Ильину, А.И. Овсеевичу и А.С. Шамаеву за ценные советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
3. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 479 с.
4. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 463 с.
5. *Lions J.L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Review. 1988. V. 30. No. 1. 1–68.
6. *Уткин В.И., Орлов Ю.В.* Теория бесконечномерных систем управления на скользящих режимах. М.: Наука, 1990. 133 с.
7. *Черноусько Ф.Л.* Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 883–893.
8. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
9. *Agmon S.* On kernels, eigenvalues and eigenfunctions of operators related to elliptic problems. // Communs Pure and Appl. Math. 1965. V. 18. № 4. P. 627–663.
10. *Ильин В.А.* О равномерной сходимости разложений по собственным функциям во всей замкнутой области. // Мат. сб. 1958. Т. 45 (87). № 2. С. 195–232.
11. *Seeley R.* Interpolation in L^p with boundary conditions. // Stud. Math. 1972. V. 44, № 1. P. 47–60.
12. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука, 1991. 367 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.II.1992