

УДК 539.3

© 1992 г. В.М. Небогатов, Ю.В. Немировский

### НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Предлагается общий метод получения нижних оценок предельной нагрузки, суть которого состоит в следующем. Действующая на конструкцию нагрузка представляется в виде функционального ряда по некоторым базисным нагрузкам, для каждой из которых, приложенной в отдельности, найден коэффициент предельной нагрузки (КПН) либо его нижняя оценка. При помощи этих оценок, соответствующих им статически допустимых полей напряжений, а также коэффициентов разложения в функциональный ряд устанавливается нижняя оценка КПН для исходного распределения нагрузки. Найденная один раз система нижних оценок КПН для базисных нагрузок позволяет получить нижнюю оценку КПН для любого, в том числе знакопеременного распределения нагрузки. Это может быть весьма полезным в случае, когда распределение нагрузки на конструкцию меняется с течением времени, например, в случае снеговой или ветровой нагрузки.

Большинство работ по предельным нагрузкам ([1–5] и др.) посвящено формулировке и реализации кинематического метода теории предельного равновесия, приводящего к верхней оценке предельной нагрузки. Нахождение нижних оценок представляет собой более сложную задачу в связи с тем, что построенные статически допустимые поля напряжений в каждой точке конструкции не должны превышать условие пластичности. Проверка этого поточечного неравенства является самостоятельной задачей для каждого поля напряжений, требующей либо аналитических оценок, либо численных расчетов. Для отдельных типов конструкций были реализованы различные подходы ([6–12] и др.), оказавшиеся чрезвычайно трудоемкими и уступающими по простоте кинематическому методу. Значительная часть оценок ([13–16] и др.) сводится к простому подбору в частных случаях статически допустимых полей напряжений. Между тем только нижняя оценка позволяет оценить безопасную нагрузку для конструкции.

1. Пусть напряженное состояние жесткопластической или упруго-идеальнопластической конструкции описывается обобщенными напряжениями  $Q$ , определенными в некоторой области  $S$  [17]. На конструкцию действует обобщенная нагрузка  $F = (F_1, F_2, \dots, F_p)$ , каждая компонента которой  $F_\nu$  – вектор распределения некоторой части обобщенной нагрузки по соответствующей поверхности или линии  $D_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, p$ ) (в частности, некоторые из них могут быть обусловлены объемными силами).

Предположим, что имеется представление исходной нагрузки в виде ряда

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m F^{(m)}, \quad \gamma_m \geq 0; \quad F^{(m)} = (F_1^{(m)}, \dots, F_p^{(m)}) \quad (1.1)$$

Вектор-функции  $F^{(m)}$  определены на тех же множествах  $D_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, p$ ), причем ряд сходится к  $F$  покомпонентно слабо в  $L^2(D_\nu)$ . Для каждого  $M = 1, 2, \dots$  рассмотрим частичную сумму ряда  $F_M = \gamma_1 F^{(1)} + \gamma_2 F^{(2)} + \dots + \gamma_M F^{(M)}$  и обозначим через  $\alpha$ ,  $\alpha^{(m)}$ ,  $\alpha_M$  КПН соответственно для отдельно приложенных нагрузок  $F$ ,  $F^{(m)}$  и  $F_M$ .

Допустим, что для каждой из обобщенных нагрузок  $F^{(m)}$ , приложенной в отдельности, установлена нижняя оценка КПН:  $\alpha^{(m)} \geq \alpha_0^{(m)}$ ; в частности, может быть известно точное значение  $\alpha^{(m)}$ . Тогда для нагрузки  $\alpha_0^{(m)} F^{(m)}$  существует уравновешивающее ее поле обобщенных напряжений  $Q_0^{(m)}$ , всюду не превышающее предела текучести:  $f(Q_0^{(m)}) \leq 1$ . Здесь  $f$  – положительно однородная первой степени выпуклая функция напряжений, характеризующая форму условия пластичности.

Обозначим

$$\alpha_M^\circ = \left[ \sum_{m=1}^M \frac{\gamma_m}{\alpha_0^{(m)}} \right]^{-1}, \quad \alpha_M^* = \frac{\alpha_M^\circ}{\sup_S f(Q_M^\circ)}; \quad Q_M^\circ = \sum_{m=1}^M \frac{\gamma_m}{\alpha_0^{(m)}} Q_0^{(m)}$$

Ясно, что  $\alpha_M^* \geq \alpha_M^\circ$ , и поле напряжений  $\alpha_M^* Q_M^\circ$  — статически допустимое для нагрузки  $\alpha_M^* F_M$  (уравнения равновесия предполагаются линейными). Следовательно, оно приводит к нижней оценке КПН  $\alpha_M$  для  $F_M$ :

$$\alpha_M^\circ \leq \alpha_M^* \leq \alpha_M \quad (1.2)$$

Запишем принцип виртуальных мощностей для обобщенных действительных напряжений  $Q$ , скоростей деформации  $q$  и скоростей перемещения  $v$  в состоянии разрушения, отвечающем нагрузке  $\alpha F$

$$\int_S Q q dS = \alpha \sum_{\nu=1}^p \int_{D_\nu} F_\nu v dD_\nu \quad (1.3)$$

Запишем теперь принцип виртуальных мощностей применительно к действительным обобщенным напряжениям  $Q_M$  в состоянии разрушения, отвечающем нагрузке  $\alpha_M F_M$  и полю скоростей  $v$ :

$$\int_S Q_M q dS = \alpha_M \sum_{\nu=1}^p \int_{D_\nu} F_M v dD_\nu \quad (1.4)$$

Из локального принципа максимума [18] имеем  $Q_M q \leq Q q$ , поэтому выполнение соотношений (1.3), (1.4) влечет неравенство

$$\alpha \geq \alpha_M \left[ \left( \sum_{\nu=1}^p \int_{D_\nu} F_M v dD_\nu \right) / \left( \sum_{\nu=1}^p \int_{D_\nu} F v dD_\nu \right) \right] \quad (1.5)$$

В силу слабой покомпонентной сходимости последовательности  $F_M \rightarrow F$  при  $M \rightarrow \infty$ , предел отношения, записанного в квадратных скобках, существует и равен единице. Переходя в (1.5) к верхнему пределу [19] при  $M \rightarrow \infty$  (обычный предел может и не существовать), будем иметь  $\alpha \geq \overline{\lim} \alpha_M$ .

Окончательно, учитывая (1.2), получим оценку

$$\alpha_0 \leq \alpha_* \leq \alpha \quad (1.6)$$

$$\alpha_* = \overline{\lim} \alpha_M^*; \quad \alpha_0 = \overline{\lim} \alpha_M^\circ = \lim \alpha_M^\circ = \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m}{\alpha_0^{(m)}} \right)^{-1} \quad (M \rightarrow \infty)$$

Таким образом, для получения нижней оценки КПН  $\alpha_0$  для нагрузки (1.1) необходимы только значения постоянных  $\gamma_m$  и оценки  $\alpha_0^{(m)}$  КПН для каждой из нагрузок  $F^{(m)}$ , приложенной в отдельности. Для получения более точной оценки  $\alpha_*$  требуется также информация о соответствующих статически допустимых полях напряжений  $Q_0^{(m)}$  от выбора которых в свою очередь зависит точность этой оценки. Поля напряжений  $Q_0^{(m)}$  можно строить непосредственно, задавая их с точностью до нескольких параметров с последующей максимизацией нижней оценки КПН по этим параметрам. Кроме того, можно использовать решения более простых или известных задач, а также решения близких задач, например задач теории упругости.

Как частный случай, из неравенств (1.6) следует: если нагрузки  $F^{(m)}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) являются предельными, то нагрузка (1.1) при  $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \leq 1$ ,  $\gamma_m \geq 0$  безопасна либо предельна.

2. Рассмотрим задачу определения КПН для призматического стержня при совместном действии осевой силы  $T$  и скручивающего момента  $M$  (обе нагрузки возрастают пропорционально одному параметру). Пусть  $\Sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат  $X_i$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), ось  $X_3$  которой направлена по оси стержня. Введем безразмерные величины  $x_i = X_i/d$ ,  $\sigma_{ij} = \Sigma_{ij}/\sigma_s$ ,  $t = T/(d^2 \sigma_s)$ ,  $m = M/(d^3 \sigma_s)$ , где  $d$  — характерная длина,  $\sigma_s$  — предел текучести. Как обычно,  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$ , остальные компоненты тензора напряжений подчиняются условию текучести Мизеса  $\sigma_{33}^2 + 3(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \leq 1$ .

Для стержня круглого поперечного сечения  $S$ , ограниченного окружностью  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  (в данном случае  $d$  — размерный радиус стержня), КПН при действии только одной из нагрузок таковы ([20], с. 69):  $\alpha_1^0 = \pi |t|^{-1}$ ,  $\alpha_2^0 = 2\pi(3\sqrt{3}|m|)^{-1}$ . Для КПН при совместном действии осевой силы  $t$  и скручивающего момента  $m$ , полагая в (1.1).

(1.2)  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ,  $\gamma_3 = \gamma_4 = \dots = 0$ , будем иметь оценку  $\alpha \geq \alpha_0 = 2\pi(2|t| + 3\sqrt{3}|m|)^{-1}$ . Соответствующие статически допустимые поля напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)} &= \text{sign } t, & \sigma_{ij}^{(1)} &= 0 \quad (i+j < 6), & \sigma_{12}^{(2)} &= \sigma_{ii}^{(2)} = 0 \\ \sigma_{13}^{(2)} &= -x_2 R, & \sigma_{23}^{(2)} &= x_1 R, & R &= \text{sign } m [3(x_1^2 + x_2^2)]^{-1/2} \end{aligned}$$

приводят к оценке

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \alpha_* = \alpha_0 \inf_S [\sigma_{33}^2 + 3(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)]^{-1/2} \\ \sigma_{ij} &= (\alpha_0/\alpha_1^0) \sigma_{ij}^{(1)} + (\alpha_0/\alpha_2^0) \sigma_{ij}^{(2)} \end{aligned}$$

Видно, что в этом случае

$$\alpha_* = \alpha_1^0 \alpha_2^0 (\alpha_1^0 + \alpha_2^0)^{-1/2} = 2\pi(4t^2 + 27m^2)^{-1/2}$$

Кривые 1, 2 на фиг. 1 ограничивают области допустимых значений  $t, m$ , отвечающие соответственно КПН  $\alpha_0, \alpha_*$ , т.е. множества  $\{(\beta t, \beta m): 0 \leq \beta \leq \alpha_0\}$  и  $\{(\beta t, \beta m): 0 \leq \beta \leq \alpha_*\}$ . Оценка  $\alpha_*$  дает результат, практически совпадающий с точным решением (предельная кривая ([20], с. 53), показанная штрихами).

Для стержня прямоугольного поперечного сечения  $S$ , ограниченного прямыми  $2|x_1| = 1$ ,  $2|x_2| = \eta$  ( $\eta \leq 1$ ), КПН при действии только одной из нагрузок таковы ([20], с. 70):

$$\alpha_1^0 = \eta |t|^{-1}, \quad \alpha_2^0 = \eta^2(3-\eta)(12\sqrt{3}|m|)^{-1}$$

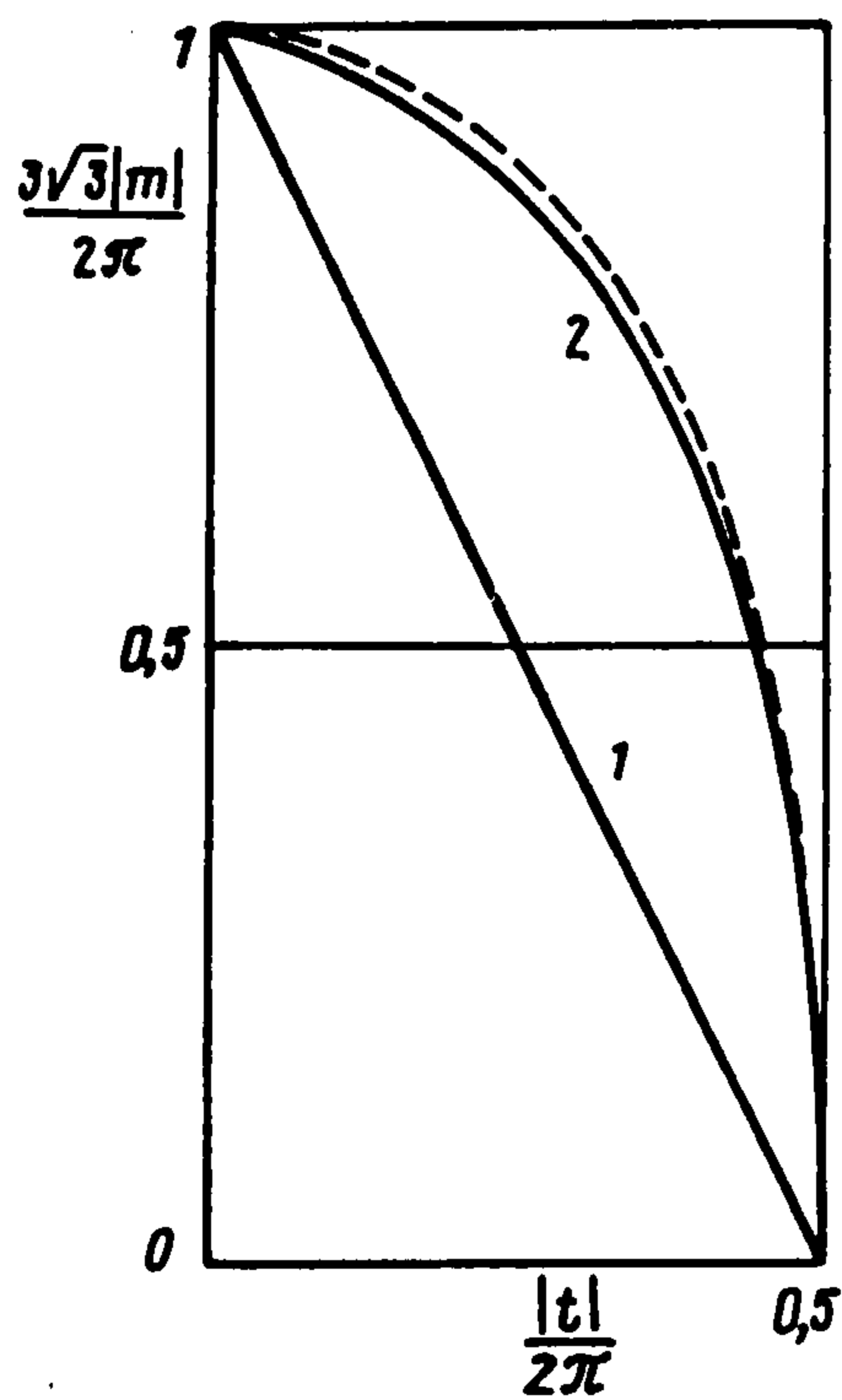
Статически допустимые поля напряжений имеют вид ( $\kappa = \pm 1$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)} &= \text{sign } t, & \sigma_{ij}^{(1)} &= 0 \quad (i+j < 6), & \sigma_{12}^{(2)} &= \sigma_{ii}^{(2)} = 0 \\ \sigma_{13}^{(2)} &= \begin{cases} 0 \\ -\kappa/\sqrt{3} \\ 0 \\ \kappa/\sqrt{3} \end{cases}, & \sigma_{23}^{(2)} &= \begin{cases} \kappa\sqrt{3} \text{ в треугольнике } M_1 O M_2 \\ 0 \text{ в трапеции } M_2 O_1 O_2 M_3 \\ -\kappa/\sqrt{3} \text{ в треугольнике } M_3 O M_4 \\ 0 \text{ в трапеции } M_4 O_2 O_1 M_1 \end{cases} \end{aligned}$$

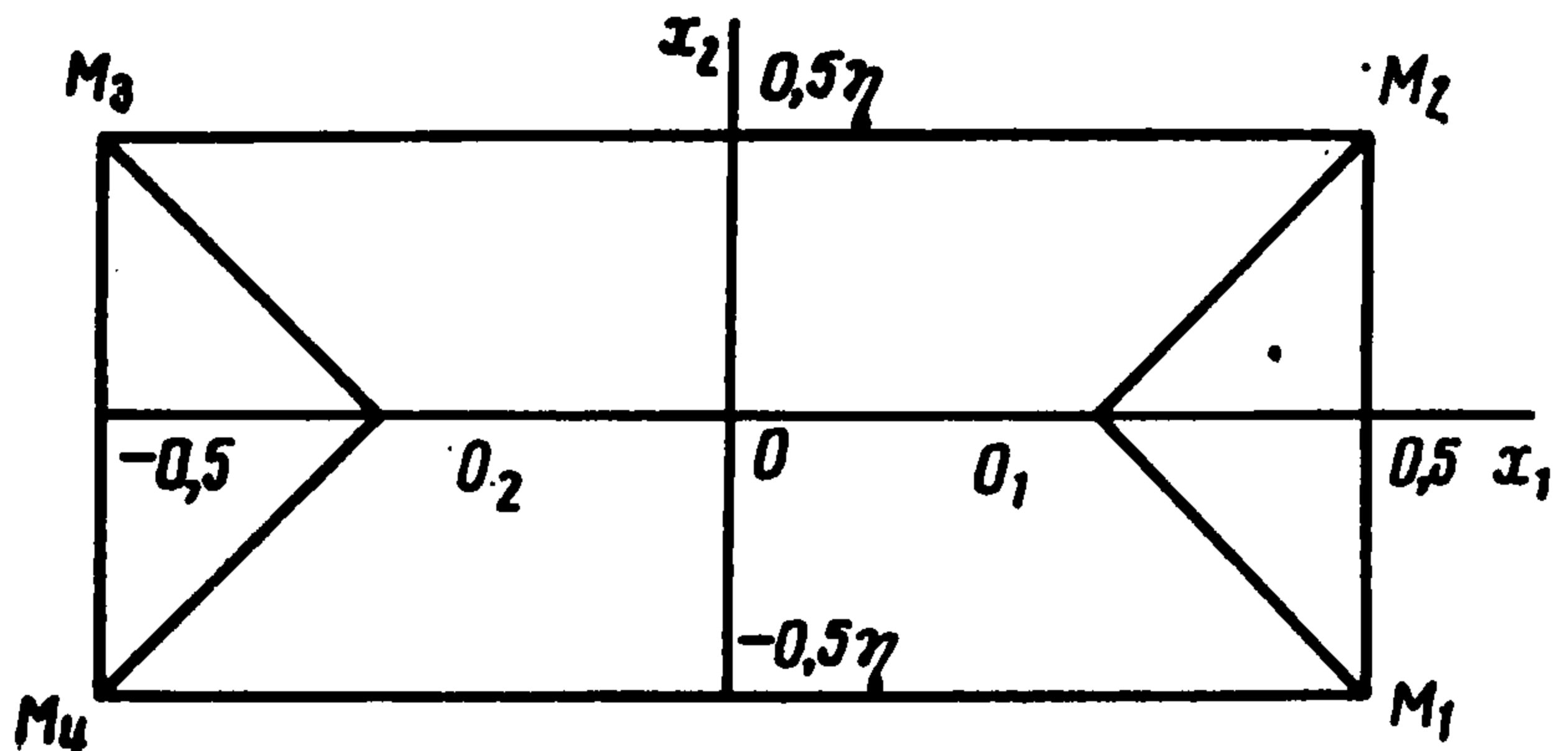
(фиг. 2). Тогда аналогично предыдущему имеем оценки

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \alpha_0 = \eta^2(3-\eta)[\eta(3-\eta)|t| + 12\sqrt{3}|m|]^{-1} \\ \alpha &\geq \alpha_* = \alpha_1^0 \alpha_2^0 (\alpha_1^0 + \alpha_2^0)^{-1/2} = \eta^2(3-\eta)[\eta^2(3-\eta)^2 t^2 + 432 m^2]^{-1/2} \end{aligned}$$

Если на фиг. 1 заменить коэффициенты при  $|m|$  и  $|t|$  соответственно на  $12\sqrt{3}/[\eta^2(3-\eta)]$  и  $1/(2\eta)$ , то кривые 1, 2 будут отвечать КПН  $\alpha_0, \alpha_*$  в данном случае; точное решение задачи отсутствует.



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Рассмотрим круглую или кольцевую пластинку  $0 \leq a \leq r \leq b$  постоянной толщины  $2h$ , изгибаемую распределенной поперечной нагрузкой  $p(r)$ . Здесь  $p(r)$  — некоторая, в общем случае знакопеременная, интегрируемая по Риману функция,  $r$  — радиальная координата. Введем безразмерные величины  $q = pb^2 M_0^{-1}$ ,  $x = r/b$ ,  $\eta = a/b$ , где  $M_0 = \sigma_s h^2$ .

Зададим последовательность разбиений  $P_n$ :  $\eta = x_0^{(n)} \leq x_1^{(n)} \leq \dots \leq x_{k_n}^{(n)} = 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), такую что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i^{(n)} = 0, \quad \Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}$$

и рассмотрим на отрезке  $[\eta, 1]$  ступенчатую функцию  $\psi_n$ , принимающую на интервале  $\langle x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)} \rangle$  значение  $q(t_i^{(n)})$ , где  $t_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ . Значения функции на концах интервала произвольны. Можно показать, что последовательность  $\psi_n$  сходится к  $q(x)$  по норме  $L^2$  (более того, она сходится по норме  $L^1$ ).

Пусть известна нижняя оценка КПН  $\alpha^\circ(z_1, z_2)$  в случае, когда распределение безразмерной нагрузки совпадает с характеристической функцией  $K(z_1, z_2, x)$  любого отрезка  $[z_1, z_2] \subset [\eta, 1]$ :  $K(z_1, z_2, x) = 1$ , если  $x \in [z_1, z_2]$ , иначе  $K(z_1, z_2, x) = 0$ . В случае условий текучести Треска и Мизеса величины  $\alpha^\circ(z_1, z_2)$  является нижней оценкой и для распределения нагрузки  $-K(z_1, z_2, x)$ . Тогда для ступенчатой функции

$$\psi_n = \sum_{i=1}^{k_n} q(t_i^{(n)}) K(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}, x)$$

из (1.6) получаем следующую оценку КПН:

$$\alpha_n \geq \alpha_n^\circ = \left[ \sum_{i=1}^{k_n} \frac{|q(t_i^{(n)})|}{\alpha^\circ(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)})} \right]^{-1} \quad (3.1)$$

Соответствующая оценка для исходного произвольного распределения нагрузки имеет вид  $\alpha \geq \alpha_0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^\circ$ .

Рассмотрим, например, однородную круглую шарнирно опертую пластину  $0 = \eta \leq x \leq 1$  при условии текучести Треска. В этом случае имеем ([20], с. 114)

$$\alpha^0(z_1, z_2) = 6 [3(z_2^2 - z_1^2) - 2(z_2^3 - z_1^3)]^{-1}$$

— точное значение КПН. Подставляя его в соотношение (3.1) и используя определение интеграла Римана, получаем оценку КПН для произвольного распределения нагрузки

$$\alpha \geq \alpha_0 = \left( \int_0^1 |q(x)| x(1-x) dx \right)^{-1} \quad (3.2)$$

В случае, когда функция  $q(x)$  знакопостоянна, величина  $\alpha_0$  — точное значение КПН [21], и в (3.2) имеет место равенство.

Пусть, например,  $q(x) = q_1 + (q_2 - q_1)x$  ( $q_1, q_2$  — постоянные); для определенности  $q_1 > 0, q_2 < 0$ . Оценка (3.2) принимает вид

$$\alpha \geq 12(q_1 - q_2)^3 (q_1^4 - 2q_1^3 q_2 - 2q_1 q_2^3 + q_2^4)^{-1}$$

Для ступенчатой нагрузки

$$q(x) = \sum_{i=1}^n q_i K(a_i, b_i, x), \quad a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_n$$

из (3.2) следует оценка

$$\alpha \geq 6 \left\{ \sum_{i=1}^n |q_i| [3(b_i^2 - a_i^2) - 2(b_i^3 - a_i^3)] \right\}^{-1}$$

Отсюда в пределе можно получить оценку для совокупности сосредоточенных кольцевых нагрузок  $P_i$ , равномерно распределенных по окружностям

$$x_i = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \alpha \geq 2\pi \left[ \sum_{i=1}^n |P_i| (1 - a_i) \right]^{-1}$$

4. Рассмотрим пологую оболочку постоянной толщины  $2h$ , прямоугольную в плане  $0 \leq X_1 \leq a, 0 \leq X_2 \leq b$ , защемленную по всему краю и изгибаемую поперечной нагрузкой  $p(X_1, X_2)$ . Считаем, как обычно, что срединная поверхность оболочки описывается уравнением

$$2Z = H + K_1 X_1 + K_2 X_2 + K_{11} X_1^2 + 2K_{12} X_1 X_2 + K_{22} X_2^2$$

$$H, K_i, K_{ij} = \text{const} \quad (i, j = 1, 2)$$

Уравнения равновесия оболочки в безразмерных переменных имеют вид [22]

$$n_{11,1} + n_{12,2} = 0, \quad n_{12,1} + n_{22,2} = 0 \quad (4.1)$$

$$k_{11} n_{11} + 2k_{12} n_{12} + k_{22} n_{22} + m_{11,11} + 2m_{12,12} + m_{22,22} = -q(x_1, x_2)$$

$$x_i = X_i/a, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq \eta = b/a, \quad k_{ij} = 2a^2 K_{ij}/h$$

$$m_{ij} = M_{ij}/M_0, \quad n_{ij} = N_{ij}/N_0, \quad M_0 = \sigma_s h^2, \quad N_0 = 2\sigma_s h, \quad q = pa^2/M_0$$

(запятая в индексах означает дифференцирование по соответствующей безразмерной координате). Здесь  $k_{ij}$  — безразмерные кривизны,  $M_{ij}, N_{ij}$  — моменты и тангенциальные силы,  $\sigma_s$  — предел текучести при одноосном растяжении.

Рассмотрим условие пластичности Ходжа [23]

$$H(m) \leq 1, \quad H(n) \leq 1 \quad (4.2)$$

$$H(l) = l_{11}^2 - l_{11} l_{22} + l_{22}^2 + 3l_{12}^2; \quad l = m, n$$

В случае защемленного края всякое поле усилий и моментов, удовлетворяющее уравнениям (4.1) и условию пластичности, будет статически допустимым.

Система уравнений (4.1) сводится к одному уравнению

$$(m_{11} + k_{22}\varphi)_{,11} + 2(m_{12} - k_{12}\varphi)_{,12} + (m_{22} + k_{11}\varphi)_{,22} = -q(x_1, x_2) \quad (4.3)$$

причем усилия в оболочке связаны с функцией напряжения  $\varphi$  равенствами

$$n_{11} = \varphi_{,22}, \quad n_{22} = \varphi_{,11}, \quad n_{12} = -\varphi_{,12} \quad (4.4)$$

Функцию  $q(x_1, x_2)$  представим в виде двойного ряда Фурье по косинусам

$$q(x_1, x_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \gamma_{nm} \cos n\pi x_1 \cos m\pi \frac{x_2}{\eta} = \sum_{n, m=0}^{\infty} |\gamma_{nm}| q_{nm}$$

Используем обозначения

$$q_{nm} = s_{nm} \cos n\pi x_1 \cos m\pi \frac{x_2}{\eta}, \quad p_{nm} = s_{nm} \sin n\pi x_1 \sin m\pi \frac{x_2}{\eta}$$

где  $s_{nm} = 1$ , если  $\gamma_{nm} \geq 0$ , иначе  $s_{nm} = -1$ .

Найдем оценки  $\alpha_{nm}^0$  КПН для каждой из базисных нагрузок  $q_{nm}$ ; тогда соответствующую оценку КПН для исходного распределения нагрузки  $q(x_1, x_2)$ , учитывая сходимость ряда Фурье по норме  $L^2$ , получаем по формуле

$$\alpha \geq \alpha_0 = \left( \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{|\gamma_{nm}|}{\alpha_{nm}^0} \right)^{-1} \quad (4.5)$$

Итак, рассмотрим оболочку под действием нагрузки  $q = A_{nm} q_{nm}$ . В случае  $nm \neq 0$  представим распределение моментов и функцию напряжений в виде

$$\begin{aligned} m_{11} &= c_1 q_{nm} + c_2 p_{nm}, & m_{12} &= c_3 q_{nm} + c_4 p_{nm} \\ m_{22} &= c_5 q_{nm} + c_6 p_{nm}, & \varphi &= c_7 q_{nm} + c_8 p_{nm} \end{aligned} \quad (4.6)$$

( $c_1, c_2, \dots, c_8$  — постоянные). Подставляя выражения (4.6) в уравнение (4.3) и приравнявая коэффициенты при  $p_{nm}$ ,  $q_{nm}$  в левой и правой частях, получаем

$$A_{nm} = \pi^2 [n^2 (c_1 + k_{22} c_7) - 2nm\eta^{-1} (c_4 - k_{12} c_8) + m^2 \eta^{-2} (c_5 + k_{11} c_7)] \quad (4.7)$$

$$0 = n^2 \eta^2 (c_2 + k_{22} c_8) - 2nm\eta (c_3 - k_{12} c_7) + m^2 (c_6 + k_{11} c_8) \quad (4.8)$$

Подставим теперь выражения (12), (14) в (10). После приведения подобных приходим к системе неравенств

$$A_i q_{nm}^2 + B_i p_{nm} q_{nm} + C_i p_{nm}^2 \leq 1 \quad (i = 1, 2) \quad (4.9)$$

Здесь

$$A_1 = c_1^2 - c_1 c_5 + c_5^2 + 3c_3^2 \geq 0$$

$$B_1 = 2c_1 c_2 - c_1 c_6 + 6c_3 c_4 - c_2 c_5 + 2c_5 c_6, \quad C_1 = c_2^2 - c_2 c_6 + c_6^2 + 3c_4^2 \geq 0$$

$$A_2 = \beta_1 c_7^2 + \beta_2 c_8^2 \geq 0, \quad B_2 = 2(\beta_1 + \beta_2) c_7 c_8, \quad C_2 = \beta_1 c_8^2 + \beta_2 c_7^2 \geq 0$$

$$\beta_1 = \pi^4 (m^4 \eta^{-4} - n^2 m^2 \eta^{-2} + n^4) \geq 0, \quad \beta_2 = 3n^2 m^2 \pi^4 \eta^{-2} > 0$$

Можно показать, что система неравенств (4.9) будет выполняться в каждой точке срединной поверхности оболочки только в случае, если

$$A_1 \leq 1, \quad C_1 \leq 1, \quad A_2 \leq 1, \quad C_2 \leq 1 \quad (4.10)$$

В соответствии с теорией предельного равновесия наилучшую нижнюю оценку  $\alpha_{nm}^0$  получим, решая для каждой пары  $n, m$  ( $nm \neq 0$ ) следующую задачу нелинейного программирования: определить максимальное значение величины  $A_{nm}$  как функции  $c_1, c_2, \dots, c_8$  при выполнении ограничений (4.8), (4.10).

Для пластины ( $k_{ij} = 0$ ) оценка определяется в явном виде

$$\alpha_{nm}^{\circ} = \pi^2 [\sqrt{r^2 + s^2} + 2 \cdot 3^{-1/2} nm \eta^{-1}]$$

$$r = n^2 + m^2 \eta^{-2}, \quad s = 3^{-1/2} (n^2 - m^2 \eta^{-2})$$

В случае  $n \neq 0, m = 0$  поле усилий и моментов выберем в виде

$$m_{11} = -c_1 q_{n0}, \quad m_{22} = -g(x_2) q_{n0}, \quad m_{12} = -(c_4 x_2 + c_5) p_n, \quad \varphi = -c_6 q_{n0}$$

$$p_n = s_{n0} \sin n \pi x_1, \quad g(x_2) = c_2 (x_2 - \frac{1}{2} \eta)^2 + c_3; \quad c_1, c_2, \dots, c_6 = \text{const}$$

Из равенств (4.4) тогда следует, что  $n_{11} = n_{12} = 0, n_{22} = c_6 n^2 \pi^2 q_{n0}$ . После подстановки в (4.3) получаем:  $A_{n0} = -(k_{22} c_6 + c_1) n^2 \pi^2 + 2 c_4 n \pi + 2 c_2$ . Система неравенств

$$\Phi(g) \cos^2 n \pi x_1 + 3(c_4 x_2 + c_5)^2 \sin^2 n \pi x_1 \leq 1, \quad c_6^2 n^4 \pi^4 \cos^2 n \pi x_1 \leq 1$$

$$\Phi(g) = c_1^2 - c_1 g + g^2$$

будет выполняться для всех  $x_1 \in [0, 1]$  лишь в случае, если

$$\Phi(g) \leq 1, \quad 3(c_4 x_2 + c_5)^2 \leq 1, \quad c_6^2 n^4 \pi^4 \leq 1 \quad (4.11)$$

Числа  $c_3$  и  $c = c_3 + \frac{1}{2} c_2 \eta^2$  — экстремальные значения функции  $g(x_2)$  на отрезке  $[0, \eta]$ . Поскольку наибольшее значение положительной квадратичной функции  $\Phi(g)$  достигается на одном из концов интервала, выполнение всюду в пластине первого из неравенств (4.11) эквивалентно системе неравенств

$$\Phi(c_3) \leq 1, \quad \Phi(c) \leq 1 \quad (4.12)$$

Второе и третье неравенства в (4.11) будут выполняться для всех  $x_2 \in [0, \eta]$  только в случае, если

$$|c_5| \leq 3^{-1/2}, \quad |c_4 \eta + c_5| \leq 3^{-1/2}, \quad |c_6| \leq (n \pi)^{-2} \quad (4.13)$$

Ясно, что максимальное значение величины  $A_{n0}$  при выполнении ограничений (4.12), (4.13) складывается из максимума функции  $B_{n0} = -c_1 n^2 \pi^2 + 8(c - c_3) \eta^{-2}$  при ограничениях (4.12) и максимума функции  $2c_4 n \pi - k_{22} c_6 n^2 \pi^2$  при ограничениях (4.13).

Оба максимума определяются в явном виде; в результате получаем оценку

$$\alpha_{n0}^{\circ} = 2(n^4 \pi^4 \eta^2 + 192 \eta^{-2})(576 + 3n^4 \pi^4 \eta^4)^{-1/2} + 4 \cdot 3^{-1/2} n \pi / \eta$$

Аналогичная оценка соответствует нагрузке  $q_{0m}$  ( $m \neq 0$ ):

$$\alpha_{0m}^{\circ} = 2(m^4 \pi^4 \eta^{-2} + 192 \eta^2)(576 \eta^4 + 3m^4 \pi^4)^{-1/2} + 4 \cdot 3^{-1/2} m \pi / \eta$$

Для нахождения оценки  $\alpha_{00}^{\circ}$  в качестве базисной нагрузки имеем равномерно распределенную нагрузку интенсивности  $q_{00} \equiv s_{00}$ . В этом случае поле обобщенных усилий зададим в виде

$$m_{11} = s_{00}(-c_1 x^2 + c_2 y^2 \eta^{-2} + 1), \quad n_{11} = -s_{00} c_4$$

$$m_{22} = s_{00}(-c_1 y^2 \eta^{-2} + c_2 x^2 + 1), \quad n_{22} = -s_{00} c_5$$

$$m_{12} = s_{00} c_3 x y \eta^{-1}, \quad n_{12} = -s_{00} c_6$$

$$x = x_1 - \frac{1}{2}, \quad y = x_2 - \frac{1}{2} \eta$$

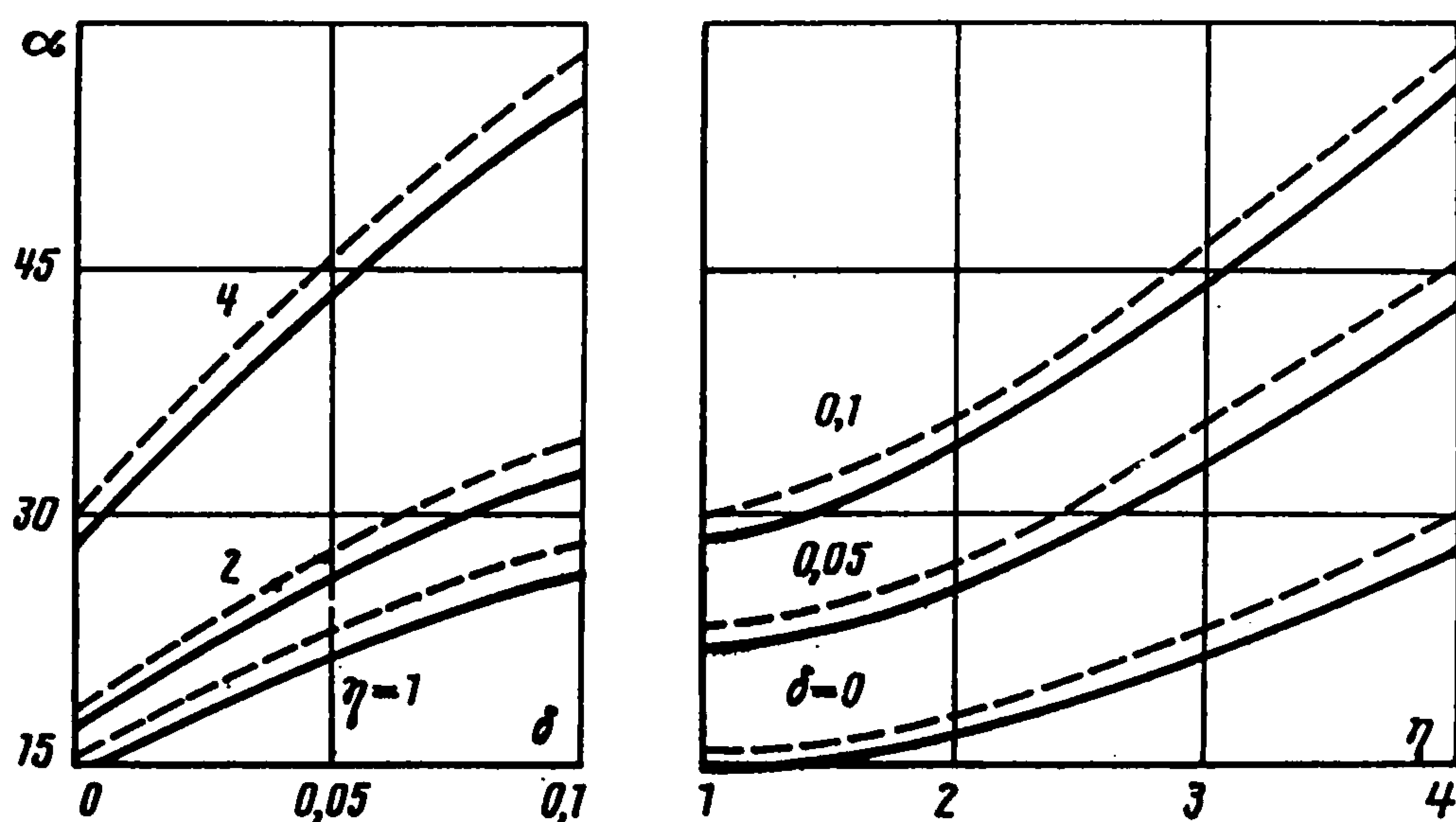
где  $c_1, c_2, \dots, c_6$  — постоянные. Из второго уравнения (4.1) найдем соответствующую нагрузку на оболочку:

$$q = A_{00} q_{00}, \quad A_{00} = B_{00} + C_{00}$$

$$B_{00} = k_{11} c_4 + 2k_{12} c_6 + k_{22} c_5, \quad C_{00} = 2c_1(1 + \eta^{-2}) - 2c_3 \eta^{-1}$$

Второе неравенство (4.2) в этом случае имеет вид

$$c_4^2 - c_4 c_5 + c_5^2 + 3c_6^2 \leq 1 \quad (4.14)$$



Фиг. 3

Далее

$$\begin{aligned}
 & m_{11}^2 - m_{11}m_{22} + m_{22}^2 + 3m_{12}^2 = \\
 & = M(x^4 + y^4\eta^{-4}) - (D_1 - 3c_3^2)\eta^{-2}x^2y^2 + (c_2 - c_1)(x^2 + y^2\eta^{-2}) + 1 \leq \\
 & \leq (\frac{1}{4}M + c_2 - c_1)(x^2 + y^2\eta^{-2}) - (D_1 - 3c_3^2)\eta^{-2}x^2y^2 + 1 \\
 & M = c_1^2 + c_1c_2 + c_2^2, \quad D_1 = c_1^2 + 4c_1c_2 + c_2^2
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $|x| \leq \frac{1}{2}$ ,  $|y| \leq \frac{1}{2}\eta$ , и поэтому  $x^4 \leq \frac{1}{4}x^2$ ,  $y^4 \leq \frac{1}{4}y^2\eta^2$ .  
Приравняем нулю выражения

$$M + 4(c_2 - c_1) = 0, \quad D_1 - 3c_3^2 = 0 \quad (4.15)$$

Тогда первое неравенство (4.2), очевидно, выполняется всюду в оболочке.

Таким образом, максимальное значение величины  $A_{00}$  складывается из максимума  $B_{00}$  при ограничении-неравенстве (4.14) и максимума  $C_{00}$  при ограничениях-равенствах (4.15). Можно показать, что первый максимум равен

$$2 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}(k_1^2 + k_{11}k_{22} + k_{22}^2 + k_{12}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Максимум  $C_{00}$  при выполнении равенств (4.15) ищется как максимум функции одной переменной

$$\begin{aligned}
 C_{00}(c_1) &= 2c_1(I + \eta^{-2}) + 2 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}\eta^{-1}\sqrt{D_1} \\
 2c_2 &= -4 - c_1 \pm \sqrt{D_2}, \quad D_2 = -3c_1^2 + 24c_1 + 16
 \end{aligned}$$

при выполнении неравенств  $D_1 \geq 0$ ,  $D_2 \geq 0$ , последнее из которых эквивалентно тому, что  $4 - 8 \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \leq c_1 \leq 4 + 8 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$ . Данная задача легко решается численно.

Алгоритм численного расчета нижних оценок пологих оболочек по изложенной методике реализован в виде программы для ЭВМ ЕС-1060. В расчетах удерживается заданное число членов ряда, при этом многократно решается задача нелинейного программирования — нахождение  $\max A_{nm}$  при ограничениях (4.8), (4.10). Для ее решения использована программа NPGLM ПНП БИМ [24], основанная на методе штрафов. Полученные оптимальные планы могут оказаться в силу известной погрешности данного метода как внутри, так и вне области, описываемой неравенствами (4.8), (4.10). В любом случае они должны быть спроектированы на границу этой области, т.е. умножены на числа, такие, чтобы результирующие точки оказались на границе. Такая корректировка возможна в силу линейности целевой функции и однородности функций-ограничений.

Оценим несущую способность защемленной оболочки, срединная поверхность которой описывается уравнением

$$Z = H[1 - 2(X_1/a - \frac{1}{2})^2 - 2(X_2/b - \frac{1}{2})^2]$$

для двух различных распределений нагрузки:  $q = \frac{1}{4} \pi^2 \eta^{-1} \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 / \eta$  (сплошная линия) и  $q = 36 \eta^{-2} x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2 / \eta)$  (штриховая линия), отвечающих одной и той же полной нагрузке на оболочку. Примем  $h/a = 0,02$ . На фиг. 3 представлены рассчитанные численно графики зависимости КПН  $\alpha = \alpha(\delta)$ ,  $\delta = H/a$ , при постоянном значении  $\eta$ , а также  $\alpha = \alpha(\eta)$  при постоянной величине  $\delta$ . Расчеты показывают, что с увеличением числа удержанных членов ряда (1.1) оценка (4.5) быстро сходится, и с погрешностью менее 1% можно ограничиться удержанием первых 9–10 членов разложения по каждой координате.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницын А.Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек. М.: Наука, 1983. 288 с.
2. Дехтярь А.С., Рассказов А.О. Несущая способность тонкостенных конструкций. Киев: Будівельник, 1990. 151 с.
3. Дехтярь А.С., Ядгаров Д.Я. Форма и несущая способность оболочек-покрытий. Ташкент: Укитувчи, 1988. 183 с.
4. Дубинский А.М. Расчет несущей способности железобетонных плит и оболочек. Киев: Будівельник, 1976. 158 с.
5. Рассказов А.О., Дехтярь А.С. Предельное равновесие оболочек. Киев.: Виш. шк., 1978. 151 с.
6. Купман Д., Ланс Р. О линейном программировании и теории предельного равновесия // Механика: Период. сб. перев. иностр. статей. 1966. № 2. С. 150–160.
7. Вирма Э. О линейном программировании и теории предельного равновесия // Сб. науч. тр. Эст. сель.-хоз. акад. 1969. № 53. С. 35–50.
8. Проценко А.М. Возможности и особенности применения метода Бубнова – Галеркина в задачах предельного равновесия оболочек // Исследования по теории сооружений. М.: Стройиздат, 1972. Вып. 19. С. 20–27.
9. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
10. Ходж Р., Бельчко Т. Численные методы анализа предельного состояния пластин // Тр. Америк. об-ва инж.-мех. Сер. Е. Прикл. механика. 1968. Т. 35, № 4. С. 192–201.
11. Любимов В.М., Мышев В.Д. Определение нижних оценок предельной нагрузки методом конечных элементов // Материалы Всесоюз. конф. "Вариационно-разностные методы в мат. физ.". Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981. С. 82–90.
12. Кукуджанов В.Н., Любимов В.М., Мышев В.Д. Метод определения нижних оценок предельной нагрузки // Численные методы в механике твердого деформируемого тела. М.: ВЦ АН СССР, 1984. С. 138–148.
13. Мирзабекян Б.Ю. К определению нижней границы несущей способности оболочек // Строительная механика и расчет сооружений. 1968. № 3. С. 21–23.
14. Самарин В.Г. Предельное равновесие пластин с отверстиями // Строит. механика и расчет сооружений. 1968. № 3. С. 27–28.
15. Карпенко Н.И., Рейтман М.И. Нижняя граница несущей способности и оптимальное проектирование железобетонных плит // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку, 1966. М.: Наука, 1966. С. 451–456.
16. Sobotka Z. Staticke řešení mezní únosnosti obdelnikových desek s energetickými podmínkami plasticity // Stavebn. časop. SAV. 1968. V. 16. № 1. P. 7–27.
17. Ходж Ф.Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций. М.: Машгиз, 1963. 380 с.
18. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
19. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1966. 319 с.
20. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 306 с.
21. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.
22. Рекач В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. М.: Высш. шк., 1973. 384 с.
23. Ольшак В., Савчук А. Неупругое поведение оболочек. М.: Мир, 1969. 144 с.
24. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Вып. 55. Пакет научных подпрограмм. Ч. 27. Адаптивная оптимизация. Минск: Ин-т математики АН БССР, 1985. 248 с.