Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 5, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Е.Г. Полищук

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ВЯЗКОЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Рассматривается метод решения краевой задачи для вязкожесткопластической среды, приводящий к методу граничных элементов.

1. **Постановка задачи.** Введем следующие обозначения: R^3 – пространство с фиксированными евклидовыми координатами x_1, x_2, x_3; Ω – область в R^3 класса C^1, т.е. граница $\partial\Omega$ – двумерное многообразие класса C^1 и область Ω расположена локально по одну сторону $\partial\Omega$; $v = \{v_i\}$ – поле скоростей в Ω, $e(v) = \{e_{ij}(v)\}$ – тензор скоростей деформации ($e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$ $i, j = 1, 2, 3$); $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ – тензор напряжений, $s = \{s_{ij}\}$ – его девиатор. Для точек из $\partial\Omega$ через $\mathbf{n}$ обозначаем вектор единичной внешней нормали, $\mathbf{F} = \{F_i\}$ ($F_i = \sigma_{ij}n_j$) – вектор плотности сил на $\partial\Omega$ (здесь и далее по совпадающим индексам проводится суммирование); для всякого вектора $\mathbf{a}$, приложенного в точке из $\partial\Omega$, a_n означает его проекцию на нормаль и $\mathbf{a}_t$ – его касательную составляющую $|\mathbf{a}|$ – длина и $(\cdot\,,\cdot)$ – соответствующее скалярное произведение; для $e = \{e_{ij}\}$, $q = \{q_{ij}\}$ полагаем $\langle e, q\rangle = e_{ij}q_{ij}$ и $|e| = (e_{ij}e_{ij})^{1/2}$; в пространстве R^3 мера $dx = dx_1dx_2dx_3$, а dS – мера на $\partial\Omega$, порожденная dx; $T(\Omega)$ ($D(\Omega)$) – пространство тензоров напряжений $\sigma(x)$ (девиаторов $s(x)$ в Ω с компонентами из $L^2(\Omega)$; $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ – пространство векторных полей $\mathbf{v} = \{v_i\}$ в Ω, таких, что v_i принадлежит пространству Соболева $H^1(\Omega)$; $\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ – пространство векторных полей $\mathbf{v} = \{v_i\}$ в $\partial\Omega$, таких, что v_i принадлежит пространству Соболева $H^{1/2}(\partial\Omega)$; $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ – пространство линейных непрерывных функционалов на $\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)$.

Пусть среда вязкожесткопластическая, т.е. несжимаемая и девиатор тензора напряжений определяется [1] пластическим потенциалом

$$\varphi(e) = \tfrac{1}{2}\mu\,|e|^2 + \tau_s\,|e|$$

где μ – коэффициент пязкости, τ_s – предел текучести. Требуется, чтобы девиатор s принадлежал субдифференциалу $\partial\varphi(e(v))$, т.е. $s = \mu e(v) + \tau_s e(v)/|e(v)|$, если $e(v) \neq 0$, и $|s| \leqslant \tau_s$, если $e(v) = 0$.

Для медленных (квазистационарных) процессов действительные поля скоростей и напряжений определяются следующей краевой задачей.

Задача 1. В области Ω найти поле скоростей $\mathbf{v}$ и тензор напряжений σ, удовлетворяющие следующим условиям:

1) поле скоростей удовлетворяет условию $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$;

2) выполняются уравнения равновесия $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0$, $i = 1, 2, 3$;

3) уравнение состояния среды $s \in \partial\varphi(e(v))$;

4) граничные условия: граница $\partial\Omega$ состоит из трех частей (с ненулевыми площадями) $\partial\Omega_F$, $\partial\Omega_v$, $\partial\Omega_c$.

Здесь $\partial\Omega_F$ – часть поверхности, где заданы силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}^*$; $\partial\Omega_v$ – часть поверхности, где заданы скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$; $\partial\Omega_c$ – пятно контакта с инструментом; на нем имеются кинематическое ограничение и условие трения, описанные ниже: а) для поля $\mathbf{v}$ и скорости инструмента $\mathbf{w}$ нормальные составляющие равны; б) для тангенциальной составляющей $\mathbf{F}_t$ силы $\mathbf{F}$ имеем $|\mathbf{F}_t| \leqslant k = \mathrm{const}$, причем, если в данной точке $|\mathbf{F}_t| < k$, то $\mathbf{v}_t = \mathbf{w}_t$ (прилипание); если же $|\mathbf{F}_t| = k$, то вектор $(\mathbf{v}_t - \mathbf{w}_t)$ противоположен вектору $\mathbf{F}_t$ (проскальзывание).

2. Вариационная формулировка. Обозначим

$$A = \{ v \in H^1(\Omega):\ v = v^* \ \text{ на } \partial\Omega_v,\ \ v_n = w_n \ \text{ на } \ \partial\Omega_c \}$$

$$M = \{ v \in H^1(\Omega):\ \ \mathrm{div}(v) = 0 \}$$

Пусть (v^0, σ^0) – решение краевой задачи 1. Тогда [1] v^0 – решение следующей вариационной задачи.

Задача 2. Найти поле v^0, доставляющее на множестве $A \cap M$ минимум функционалу

$$J(v) = \tfrac{1}{2}\mu \int_\Omega |e(v)|^2 dx + \tau_s \int_\Omega |e(v)|\, dx - \int_{\partial\Omega_F} (F^*, v)\, dS + k \int_{\partial\Omega_c} |v_t - w_t|\, dS$$

Будем предполагать, что кинематические условия не допускают движения Ω как абсолютно твердого тела, т.е. если поле v есть разность полей из A и $e(v) \equiv 0$, то $v \equiv 0$. При этом предположении можно утверждать [1], что решение задачи 2 существует и единственно.

3. Седловая точка. Трудность решения задачи 2 состоит в том, что минимум функционала J нужно искать не на всем множестве A, а только для полей v, удовлетворяющих условию несжимаемости $v \in M$. Эта трудность снимается [2] введением множителей Лагранжа. Пусть $p \in L^2 = L^2(\Omega)$. Обозначим

$$G(v, p) = J(v) + \int_\Omega p\ \mathrm{div}(v)\, dx$$

Задача 3. Найти седловую точку (v^0, p^0) функции G на множестве $A \times L^2$, т.е.

$$G(v^0, p^0) = \min_{v \in A}\ \sup_{p \in L^2}\ G(v, p) = \max_{p \in L^2}\ \inf_{v \in A}\ G(v, p)$$

можно проверить, что задача 3 имеет единственное решение (v^0, p^0). Поле v^0 есть решение задачи 2. Действительно, так как

$$G(v^0, p^0) = J(v^0) + \sup_{p \in L^2} \int_\Omega p\ \mathrm{div}(v^0)\, dx < +\infty$$

то $\mathrm{div}(v^0) = 0$. Поэтому $v^0 \in M$. Значит,

$$J(v^0) = G(v^0, p^0) = \min_{v \in A} G(v, p^0) \leqslant \min_{v \in A \cap M} G(v, p^0) = \min_{v \in A \cap M} J(v)$$

4. Тензор напряжений. Так как $v^0 \in H^1(\Omega)$, то тензор напряжений $\sigma^0 \in T(\Omega)$ и значит, нельзя ввести плотность поверхностных сил F на $\partial\,\Omega$ по формуле $F_i = \sigma_{ij} n_j$. Поэтому нужна слабая формулировка граничного условия для сил. Обозначим

$$R(\Omega) = \{ \sigma = \{\sigma_{ij}\} \in T(\Omega):\ \partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \}$$

Если σ имеет непрерывно дифференцируемые компоненты и удовлетворяет уравнениям равновесия, то

$$\int_\Omega \langle \sigma, e(v) \rangle\, dx = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j v_i\, dS, \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Используя это равенство, можно [3] показать, что существует такой единственный непрерывный линейный оператор

$$\nu:\ R(\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$$

что если тензор σ имеет непрерывные компоненты, то функционал $\nu(\sigma)$ действует по формуле

$$\nu(\sigma)(u) = \int_{\partial\Omega} (F, u)\, dS, \quad \forall u \in H^{1/2}(\partial\Omega); \quad F = \{F_i\}, \quad F_i = \sigma_{ij} n_j$$

Будем называть $\nu(\sigma)$ плотностью сил на $\partial\Omega$, отвечающей тензору σ. По функционалу $\nu(\sigma)$ естественно вводятся $\nu_i(\sigma) \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, такие, что

$$\nu(\sigma)(u) = \sum_{i=1}^{3} \nu_i(\sigma)(u_i), \quad \forall u = \{u_i\} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

(Пишем $\nu(\sigma) = \{\nu_i(\sigma)\}$, и $\nu_i(\sigma)$ называется компонентой $\nu(\sigma)$). Вводятся также функционалы $\nu_n(\sigma)$ и $\nu_t(\sigma)$, называемые нормальной и тангенциальной составляющими.

Граничные условия на силы в задаче 1 будем понимать в обобщенном смысле, т.е. вместо функций плотности используется функционал $\nu(\sigma)$. Стандартно проверяется

Утверждение. Пусть (v^0, p^0) – седловая точка из задачи 3. Тогда существует девиатор $s^0 \in \partial\varphi(e(v^0))$, такой, что пара (v^0, σ^0), где $\sigma^0 = \{\sigma^0_{ij}\}$, $\sigma^0_{ij} = s^0_{ij} + p^0\delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронекера), есть решение (обобщенное) краевой задачи 1.

5. Алгоритм Удзавы. Для нахождения седловой точки из задачи 3 можно применить алгоритм Удзавы [4]. При этом придется при фиксированном p находить минимум по v функционала

$$G(v, p) = J(v) + \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v)\, dx$$

Функционал J недифференцируемый, что затрудняет минимизацию. Поэтому несколько изменим задачу 3. Пусть

$$Q = \{q = \{q_{ij}\} \in T(\Omega) : |q(x)| \leqslant \tau_s \text{ почти всюду в } \Omega\}$$

$$R = \{r = \{r_i\} \in L^2(\partial\Omega_c) : |r(x)| \leqslant k \text{ почти всюду в } \partial\Omega_c\}$$

Обозначим $Z = L^2(\Omega) \times T(\Omega) \times L^2(\partial\Omega_c)$, $B = L^2(\Omega) \times Q \times R \subset Z$. Пусть

$$L(v, z) = \tfrac{1}{2}\mu \int_{\Omega} |e(v)|^2 dx + \int_{\Omega} \langle q, e(v)\rangle\, dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div}(v)\, dx - \int_{\partial\Omega_F} (F^*; v)\, dS +$$

$$+ \int_{\partial\Omega_c} (r, v_t - w_t)\, dS, \quad v \in A, \quad z = (p, q, r) \in Z$$

Вместо задачи 3 рассматривается следующая

Задача 4. Найти седловую точку (v^0, z^0) функционала L на множестве $A \times B$, т.е.

$$L(v^0, z^0) = \min_{v \in A} \sup_{z \in B} L(v, z) = \max_{z \in B} \inf_{v \in A} L(v, z)$$

Если (v^0, z^0), $z^0 = (p^0, q^0, r^0)$ – решение задачи 4, то из равенств

$$\tau_s \int_{\Omega} |e(v)|\, dx = \max_{q \in Q} \int_{\Omega} \langle q, e(v)\rangle\, dx, \quad k \int_{\partial\Omega_c} |v_t - w_t|\, dS = \max_{r \in R} \int_{\partial\Omega_c} (r, v_t - w_t)\, dS$$

следует, что (v^0, p^0) – решение задачи 3. Также можно получить, что q^0 – девиатор, а $\{p^0\delta_{ij}\}$ – шаровая часть действительного тензора напряжений, т.е. из решения задачи 4 формируется решение задачи 1.

Опишем алгоритм Удзавы для задачи 4. Пусть Φ: $Z \to A$ – такой оператор, что $v = \Phi(z)$ – точка минимума на множестве A функционала $L(v, z)$ по v при данном z. Алгоритм состоит в следующем. Начальное значение $z^{(1)} \in B$ берем произвольно. Шаг процесса:

1) для фиксированного $z^{(n)} \in B$ находим $v^{(n+1)} = \Phi(z^{(n)})$,

2) следующее $z^{(n+1)} = (p^{(n+1)}, q^{(n+1)}, r^{(n+1)})$ вычисляется по формулам: $p^{(n+1)} = p^{(n)} + \rho \operatorname{div} v^{(n)}$; $q^{(n+1)}$ – проекция на Q элемента $q^{(n)} + \rho e(v^{(n)})$;

$r^{(n+1)}$ – проекция на R элемента $r^{(n)} + \rho(v_t^{(n)} - w_t)$. Число $\rho \in (0, \rho_{max})$ и для ρ_{max} имеется оценка.

Итак, основной пункт алгоритма состоит в вычислении значений оператора Ф. Вычисление $v = \Phi(p, q, r)$ проведем в два этапа: сначала находим v на $\partial\Omega$ при помощи интегрального уравнения, а затем по явной формуле вычисляем v внутри Ω. Пусть сначала p, q, r непрерывно дифференцируемы. Так как $v = \{v_i\}$ – точка минимума на A функционала L при фиксированных p, q, r, то для всякой допустимой вариации поля $\zeta = \{\zeta_i\}$ (т.е. $\zeta \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$, $\zeta = 0$ на $\partial\Omega_v, \zeta_n$ на $\partial\Omega_c$) будет

$$I_1 + I_2 + I_3 - \int_{\partial\Omega_F} (F^*, \zeta)\, dS + \int_{\partial\Omega_c} (r, \zeta_t)\, dS = 0 \qquad (1)$$

$$I_1 = \int_\Omega \mu \langle e(v), e(\zeta)\rangle\, dx, \quad I_2 = \int_\Omega \langle q, e(\zeta)\rangle\, dx, \quad I_3 = \int_\Omega p \operatorname{div}(\zeta)\, dx$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \mu e_{ij}(v) n_j \zeta_i dS - \int_\Omega \mu \frac{\partial e_{ij}(v)}{\partial x_j} \zeta_i dx$$

$$I_2 = \int_{\partial\Omega} q_{ij} n_j \zeta_i dS - \int_\Omega \frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j} \zeta_i dx, \quad I_3 = \int_{\partial\Omega} p \zeta_i n_i dS - \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} \zeta_i dx$$

Поэтому из (1) следует

$$\mu \frac{\partial e_{ij}(v)}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad \left(b_i = \frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \qquad (2)$$

$$F = F^* \text{ на } \partial\Omega_F, \quad F_t = -r \text{ на } \partial\Omega_c (F = F_i, \quad F_i = \mu e_{ij}(v) n_j + q_{ij} n_j + p n_i) \qquad (3)$$

Уравнения (2) имеют вид уравнений равновесия для упругой среды с модулем упругости при сдвиге $G = \mu/2$ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0$, на которую действует сила с объемной плотностью b_i

Пусть

$$u^{(k)}(\xi, x) = \{u_i^{(k)}(\xi, x)\}, \quad F^{(k)}(\xi, x) = \{F_i^{(k)}(\xi, x)\}, \quad k = 1, 2, 3$$

$$u_i^{(k)}(\xi, x) = \frac{1}{8\pi\mu r} \left(3\delta_{ik} + \frac{r_i r_k}{r^2}\right)$$

$$F_i^{(k)}(\xi, x) = -\frac{1}{8\pi\mu r^2} \left\{ \left(\delta_{ik} + \frac{r_i r_k}{r^2}\right) \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{r_i n_k - r_k n_i}{r} \right\}$$

$$r = (r_i r_i)^{1/2}, \quad r_i = x_i - \xi_i$$

Тогда [5] (полагая $G = \mu/2$ и $\nu = 0$) имеем, что $u^{(k)}(\xi, x)$ – фундаментальное решение уравнения (3) и $F_i^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} n_j$ на множестве $\partial\Omega$, где $\sigma_{ij}^{(k)} = \mu e_{ij}(u^{(k)})$. Из уравнения (2) следует

$$I_5 + I_6 = 0 \qquad (4)$$

$$I_5 = \int_\Omega \mu \frac{\partial e_{ij}(v)}{\partial x_j} u_i^{(k)}(\xi, x)\, dx, \quad I_6 = \int_\Omega b_i(x) u_i^{(k)}(\xi, x)\, dx$$

Имеем

$$I_5 = \int_{\partial\Omega} \mu e_{ij}(v) n_j u_i^{(k)} dS(x) - \int_\Omega \mu e_{ij}(v) e_{ij}(u^{(k)})\, dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \mu e_{ij}(v) n_j u_i^{(k)} dS(x) - \int_{\partial\Omega} F_i^{(k)} v_i dS(x) + \int_\Omega \mu \frac{\partial e_{ij}(u^{(k)})}{\partial x_j} v_i dx$$

$$I_6 = \int_\Omega \left[\frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i}\right] u_i^{(k)} dx = \int_{\partial\Omega} (q_{ij}n_j + pn_i)u_i^{(k)} dS(x) -$$

$$- \int_\Omega q_{ij} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} dx - \int_\Omega p \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_i} dx$$

Так как $u^{(k)}$ – фундаментальное решение, то для $\forall\, \xi \in \operatorname{int} \Omega$ последний интеграл из выражения для I_5 равен $-v_k(\xi)$. Поэтому из (4) и определения F в (3) имеем для $\xi \in \operatorname{int} \Omega$

$$v_k(\xi) = \int_{\partial\Omega} F_i(x)u_i^{(k)}(\xi, x) dS(x) - \int_{\partial\Omega} F_i^{(k)}(\xi, x) v_i(x)\, dS(x) -$$

$$- \int_\Omega q_{ij}(x) \frac{\partial u_i^{(k)}(\xi, x)}{\partial x_j} dx - \int_\Omega p(x) \frac{\partial u_i^{(k)}(\xi, x)}{\partial x_i} dx \qquad (5)$$

Аналогично получаются для $v(\xi)$ на $\partial\Omega$ интегральные уравнения

$$c_{ki}(\xi)v_i(\xi) = \int_{\partial\Omega} F_i u_i^{(k)} dS(x) - \int_{\partial\Omega} F_i^{(k)} v_i dS(x) - \int_\Omega q_{ij} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} dx -$$

$$- \int_\Omega p \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_i} dx, \qquad k = 1, 2, 3 \qquad (6)$$

Для $c_{ki}(\xi)$ известны формулы [5]. В частности, в гладких точках $c_{ki}(\xi) = \delta_{ki}/2$. Итак, первый этап вычисления $v = \Phi(p, q, r)$ состоит в нахождении полей $v = \{ v_i \}$, $F = \{ F_i \}$ на $\partial\Omega$, таких, что справедливы интегральные уравнения (6) и $v = v_*$ на $\partial\Omega_v$, $F = F^*$ на $\partial\Omega_F$, $F_t = -r$ на $\partial\Omega_c$. Потом находим v в $\operatorname{int} \Omega$ по формуле (5).

Вычисление $v = \Phi(p, q, r)$ рассмотрено в случае, когда p, q, r непрерывно дифференцируемы. В силу непрерывности оператора Φ получаем, что вычисление значения $\Phi(p, q, r)$ проводится также и в общем случае.

Замечание. Если вычисление значений оператора Φ проводить стандартным способом, то в дискретной аппроксимации задачи приходим к методу конечных элементов. Предложенный способ приводит к методу граничных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
2. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. Т. 1. М.: Мир, 1971. 371 с.
4. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
5. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
24. VI. 1991