

УДК 539.3

© 1992 г. Ф.М. Бородич, А.Б. Мосолов

## ФРАКТАЛЬНАЯ ШЕРОХОВАТОСТЬ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

Показано, что шероховатость реальных отшлифованных тел имеет фрактальный характер. Проводится связь между фрактальной размерностью поверхности и ее статистическими свойствами. Строятся модели контакта фрактальных шероховатых штампов с гладкой поверхностью деформируемого полупространства моделируемой средой Винклера и жестко пластической средой. На макроуровне вдавливаемые штампы считаются либо плоскими, либо выпуклыми. На начальном этапе процесса вдавливания, когда сближение между штампом и средой много меньше размера шероховатости, получены степенные асимптотики, связывающие действующую на штамп силу и сближение для некоторых моделей деформируемого основания (как пластического, так и упругого). Выявлена связь показателя степени с фрактальными размерностями поверхности и отпечатка.

Известно [1–3], что параметры области фактического контакта реальных твердых тел существенно зависят от извилистости и шероховатости контактирующих поверхностей. Анализ влияния шероховатости на характеристики контактного взаимодействия привлекает широкое внимание [1–5]. Возникающие при этом проблемы связаны прежде всего с тем, что точное аналитическое решение контактных задач теории упругости и пластичности известно лишь для немногих случаев тел, имеющих правильную геометрическую форму. Поэтому учет шероховатости поверхности приходится проводить на более или менее простых моделях, например, на модели регулярной синусоидальной шероховатости (или волнистости) поверхности тела [3]. В этой модели при низких давлениях контактные зоны определяются по теории Герца. При высоких давлениях считается, что области раздела малы и могут быть найдены с использованием модели трещины под давлением. Было показано в [6], что характер сближения двух упругих полупространств с малой областью раздела между границами существенно зависит от первоначальной геометрии границы, поэтому использование модели трещины в контактной задаче требует специальных разъяснений.

Естественно, что микрогеометрия поверхности твердых тел будет оказывать существенное влияние на их контактные свойства, особенно на начальном этапе сжатия тел.

Замечательная особенность строения поверхности многих реальных тел была обнаружена в последние годы. Оказалось, что весьма часто структура неровностей поверхности тел характеризуется самоподобием, т.е. ведет себя автомодельно (в статистическом смысле) при масштабном переходе (преобразовании растяжения координат) [7–12]. Это, в частности, означает, что по крайней мере на мезомасштабе (т.е. на промежуточном масштабе между микро- и макромасштабами) поверхность обладает неровностями всех размеров. Для построения геометрической модели реальной поверхности, обладающей указанными свойствами, наиболее естественным представляется привлечь аппарат теории фрактальных множеств (фрактальных поверхностей) [7, 13, 14], ибо фрактальные поверхности, как известно, обладают самоподобием, или самоаффинностью и характеризуются наличием каскада неровностей всех размеров.

Самая ранняя модель, в которой шероховатость моделировалась наложением на первоначальную гладкую выпуклую поверхность самоподобных искажений меньших масштабов, по-видимому, была предложена в [15] (см. также [2]). Заметим, что построенная в модели Арчарда поверхность не является фрактальной.

Как отмечалось выше, методы теории фракталов тесным образом связаны с преобразованиями подобия. Однако очевидно, что применение методов подобия в контактных задачах может быть не связано с фрактальностью [16]. Тот факт, что шероховатость реальных тел является фрактальной [12] обусловил попытки учета фрактальности в задачах трибологии [9, 17, 18]. Следует отметить, что ранее была построена модель [19]<sup>1</sup>, учитывающая самоподобие дискретного контакта реальных тел, причем техника описания явления автомодельности аналогичная использованной для автомодельного процесса накопления повреждаемости в телах при циклическом нагружении [20]. Было показано [21], что ряд результатов [20] можно перефразировать на языке теории фракталов.

<sup>1</sup>См. также Бородич Ф.М. Экспериментальные исследования процесса сжатия многослойных–металлических пакетов /М., 1985. 106 с. Деп. ВНИИИС Госстроя СССР. 12.09.85. № 6223–85.

1. Фрактальная размерность поверхности и статистический анализ ее геометрии. Напомним, что обычно фракталом называют множество, размерность Хаусдорфа–Безиковича которого превосходит его топологическую размерность [7].

Размерность  $D_H$  Хаусдорфа–Безиковича множества  $S$  определяется как критическая размерность, при которой  $d$ -мерная мера  $M_d(S)$  множества  $S$  ( $d$ -размерность покрытия  $S$ ) меняется от нуля до бесконечности [7, 14]

$$M_d(S) \sim N(\delta) \delta^d |_{\delta \rightarrow 0} \rightarrow \begin{cases} 0, & d > D_H \\ \infty, & d < D_H \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь  $N(\delta)$  – число множеств, размера  $\delta$ , покрывающих  $S$ .

Так, например, при покрытии плоского квадрата отрезками ( $d = 1$ ,  $M_1 \sim \delta^{-1} \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ ), а при покрытии его кубиками ( $d = 3$ )  $M_3 \sim \delta \rightarrow 0$ , только при  $d = 2 = D_H$  получим конечную  $M_2$  меру.

Из (1.1) следует, что размерность фрактала  $D$  (которую в данном случае будем отождествлять с  $D_H$ ) определяется по формуле [7]

$$D = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)} \quad (1.2)$$

Очевидно, величина  $D$  не обязана быть целым числом, поэтому фракталами называют также множества с дробной размерностью. Для фрактальных поверхностей (топологическая размерность  $d_T = 2$ )  $2 < D \leq 3$ . Условно можно сказать, что  $D$  характеризует степень извилистости и изрезанности поверхности. При  $D = 2$  это обычная "гладкая" поверхность, а при  $D = 3$  поверхность изрезана и измята так, что фактически "заполняет" слой в трехмерном пространстве.

Из определения фрактала следует, что при стремлении характерного размера покрытия  $\delta$  (масштаба "измерения" фрактала) к нулю характерная линейная мера фрактала стремится к бесконечности. Так, для фрактальной линии ( $D > 1$ ) длина  $L(\delta)$ , измеренная с точностью  $\delta$ , при уменьшении  $\delta$  расходится по закону

$$L(\delta) \sim N(\delta) \delta \sim \delta^{1-D} |_{\delta \rightarrow 0} \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

Аналогично для площади фрактальной поверхности имеем

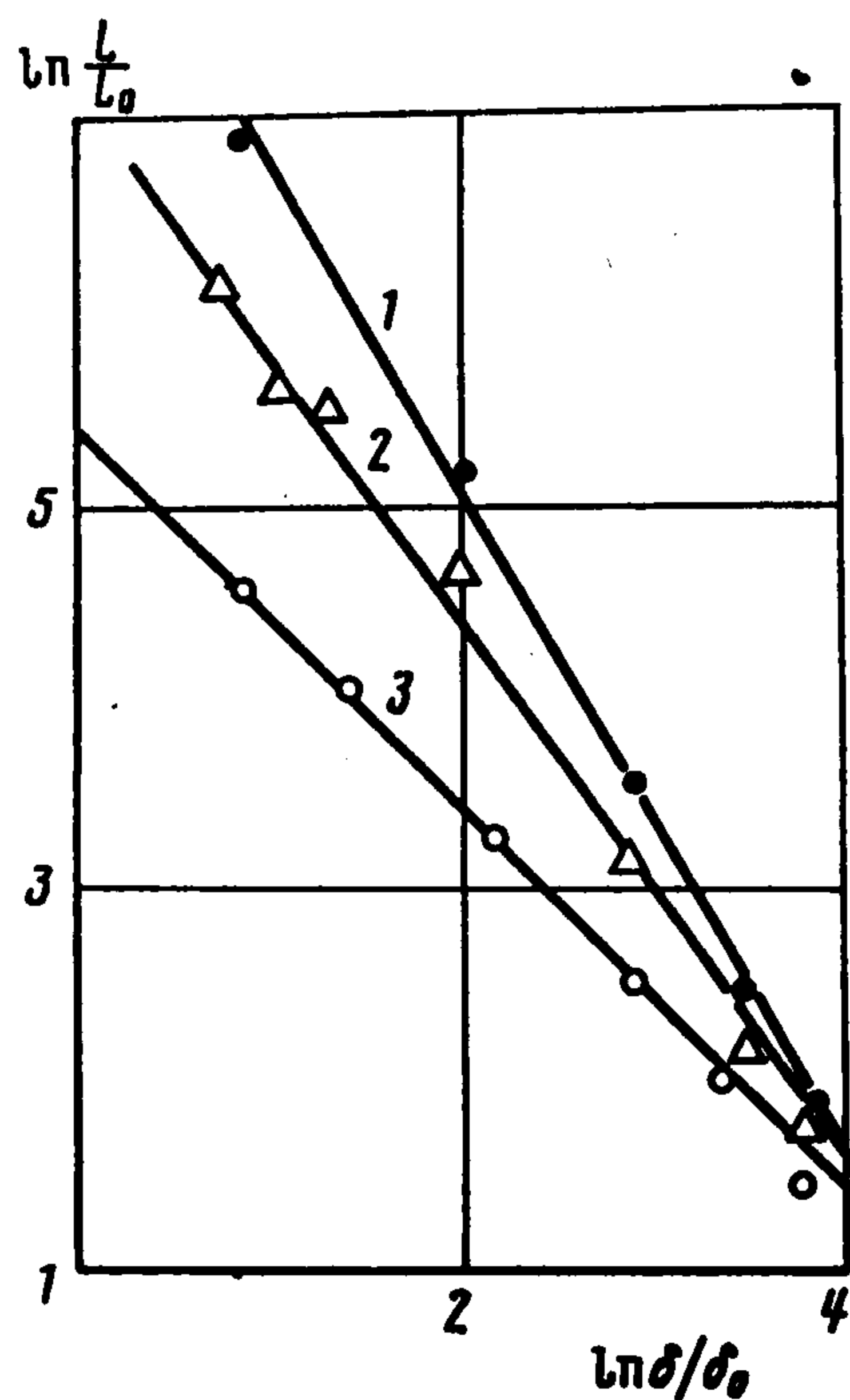
$$S(\delta) \sim N(\delta) \delta^2 \sim \delta^{2-D} |_{\delta \rightarrow 0} \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Свойства (1.3), (1.4) диктуют необходимость наложения ограничений на пределы применимости фрактальной модели:

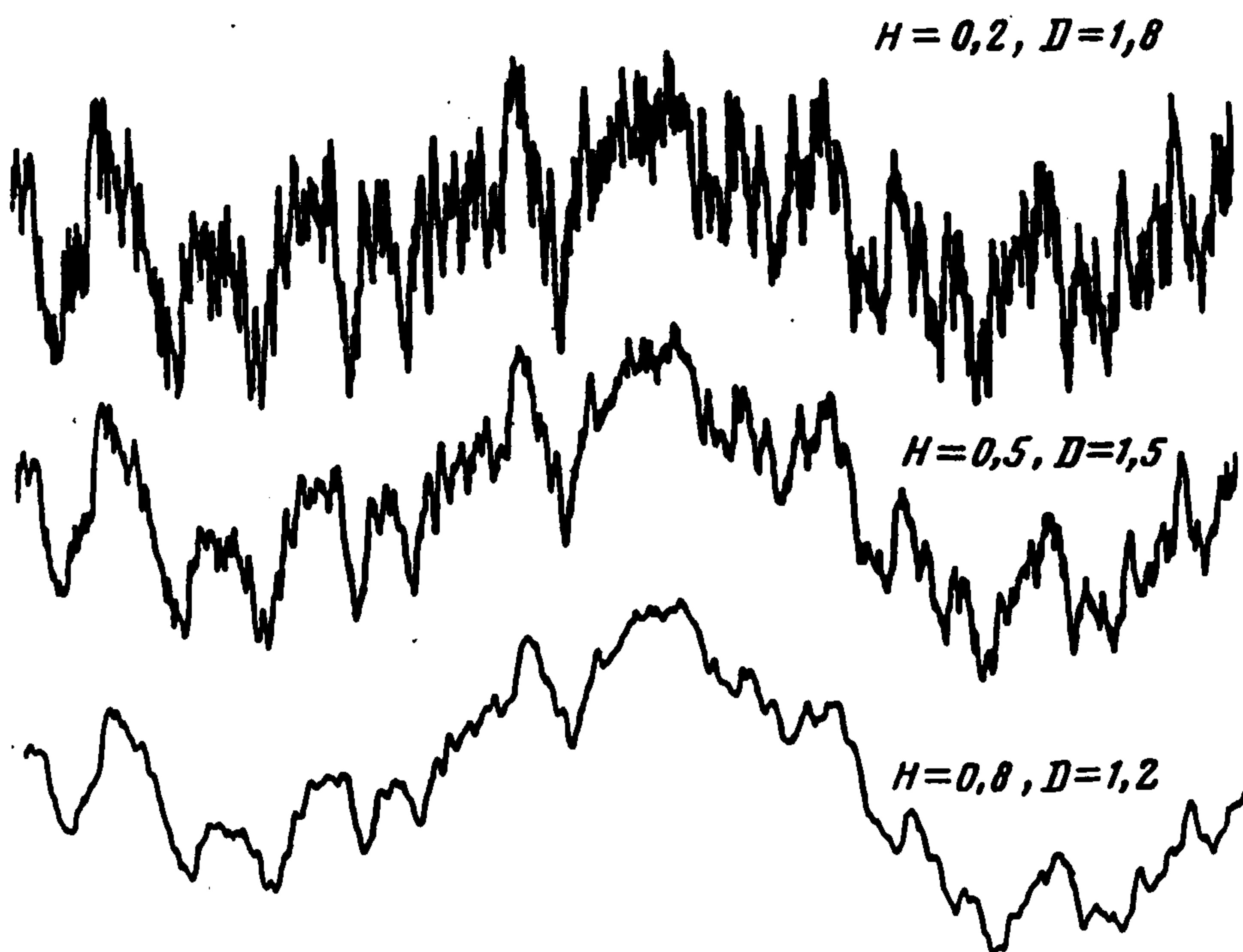
$$\delta_* \ll \delta \ll \Delta_*$$

Действительно, извилистость фрактальной поверхности бесконечна, тогда как реальная поверхность, разумеется, имеет конечную извилистость. Поэтому естественно ввести нижний предел  $\delta_*$  применимости фрактальной модели. Размер  $\delta_*$  обычно связывают с микроструктурой материала, для металлов это может быть размер зерна, субзерна или какого-либо другого характерного структурного элемента. С другой стороны должен существовать и верхний предел применимости фрактальной модели  $\Delta_*$ , связанный с геометрическими размерами тела, характерным масштабом неоднородности внешних полей и т.д.

Фрактальность поверхности реальных тел подтверждается результатами многочисленных экспериментальных исследований [7, 8, 11, 12, 22–24]. Обнаружено, что фракталами являются поверхности многих пористых и керамических материалов, поверхность трещин в металлах и горных породах, поверхность металлов после механической обработки и т.д. Предложен ряд методик, опирающихся на различные физические принципы, для определения фрактальных параметров поверхности тел. Наиболее традиционны методы, основанные на анализе профиллограмм (при помощи соотношения (1.2)), а также "островной" метод Мандельброта [11], основанный на компьютерном анализе изображений, получающихся при пересечении поверхности горизонтальной плоскостью.



Фиг. 1



Фиг. 2

В других методах используются данные акустических измерений [22], экспериментов по адсорбции [8, 23], результаты по рассеянию поверхностью нейтронов и рентгеновского излучения [24].

Приведем пример определения фрактальной размерности поверхности на основе анализа профиллограмм. В этом случае обычно используется известный результат: при пересечении стохастического фрактала плоскостью общего положения получающееся множество – фрактал размерности  $D - 1$  [25].

Рассматривая профиллограмму с этой точки зрения и определив при помощи соотношения (1.2) ее размерность  $D_F$ , можно считать (с вероятностью единица), что размерность поверхности  $D = D_F + 1$ .

На фиг. 1 по данным профиллограммы [1] построена зависимость длины профиля  $L$  отшлифованных поверхностей металлов, обработанных на плоскошлифовальном станке, от масштаба измерения  $\delta$ .

Приведенные данные свидетельствуют о том, что шероховатость отшлифованной поверхности металла является фракталом, причем размерность  $D_F$  фрактала зависит от чистота обработки. Кривые 1–3 соответствуют поверхностям: 9-й класс точности,  $D_F \approx 1,8$ ; доводка этой же поверхности, 10-й класс точности,  $D_F \approx 1,5$ ; то же, но уже 14 класс точности,  $D_F \approx 1,0$ . Графики построены для относительных длин  $L/L_0$ ,  $\delta/\delta_0$ , точки соответствуют экспериментальным данным, линии проведены по методу наименьших квадратов.

Как уже отмечалось выше, фрактальные структуры локально инвариантны при масштабном переходе, причем для стохастического фрактала все направления равноправны и параметр растяжения одинаков для всех координат. Это вполне приемлемо при описании структур, сформировавшихся в изотропных условиях (наглядным примером могут служить различные фрактальные кластеры [14]). Если же фрактальные структуры формируются в условиях заметной анизотропии свойств или процессов, то ожидать изотропного поведения при масштабном переходе уже нельзя. Можно, однако, попытаться сохранить основную идею фрактального подхода, связанную с автомодельностью структуры при масштабных преобразованиях, используя вместо простой группы дилатации (однородного растяжения по всем координатам)  $x \rightarrow \lambda x$ , группу самоаффинных масштабных преобразований (квазиоднородное растяжение)  $x \rightarrow (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$ , где, вообще говоря,  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ . В результате приходим к важному понятию самоаффинных фракталов [7, 26, 27], локально инвариантных (для стохастических фракталов – в смысле распределения) относительно самоаффинных преобразований. Свойства самоаффинных фракталов неизмеримо богаче, чем у фракталов

самоподобных, хотя между ними имеется и много общего. Не останавливаясь на этом вопросе (см. например, [27]) рассмотрим важные для дальнейшего обсуждения самоаффинные фрактальные структуры, связанные с дробным броуновским движением.

В одномерном случае дробный броуновский процесс  $B_H(t)$  представляет собой однозначную случайную функцию переменной  $t$ , такую, что приращение  $B_H(t_2) - B_H(t_1)$  имеет гауссово распределение с вариацией

$$\langle |B_H(t_2) - B_H(t_1)|^2 \rangle \sim |t_2 - t_1|^{2H}, \quad 0 < H < 1 \quad (1.5)$$

Здесь и далее угловые скобки означают усреднение по ансамблю.

При  $H = 1/2$  получаем обычный броуновский процесс с независимыми приращениями, для которого  $\langle \Delta B^2 \rangle \sim \Delta t$ . При  $H \neq 1/2$  свойства дробного броуновского процесса сильно отличаются от привычных, поскольку при  $H > 1/2$  имеет место положительная корреляция между приращениями, а при  $H < 1/2$  — отрицательная. В последнем случае влияние корреляций может распространяться на большие промежутки времени и существенно влиять на вид траекторий процесса. Для примера на фиг. 2 показаны траектории дробного броуновского процесса при различных  $H$  [27].

Из (1.5) можно получить, что при изменении масштаба переменной  $t \rightarrow \lambda t$  (т.е.  $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow \lambda \Delta t$ ) приращение претерпевает изменение по правилу  $\Delta B_H \rightarrow \lambda^H \Delta B_H$ . Таким образом, рассматривая траекторию  $B_H(t)$  на плоскости  $t, B$  естественно говорить о самоаффинном поведении  $B_H(t)$ .

Можно показать, что траектории дробного броуновского процесса являются самоаффинными фракталами с размерностью  $D = 2 - H$ .

Аналогично предыдущему можно определить дробный броуновский процесс в  $d$ -мерном пространстве. В этом случае вместо (1.5) нужно записать вариацию в виде

$$\langle |B_H(x_2) - B_H(x_1)|^2 \rangle \sim |x_2 - x_1|^{2H} \quad (1.6)$$

Фрактальная размерность траекторий такого процесса определяется следующим образом:  $D = d + 1 - H$ .

В дальнейшем особый интерес будут представлять самоаффинные фрактальные поверхности  $z = z_H(x, y)$ , моделируемые при помощи дробного броуновского движения. В этом случае  $d = 2$ ,  $x = (x, y)$ ,  $B_H = z_H$  и соответственно  $D = 3 - H$ .

Удобным инструментом для характеристики фрактальных свойств поверхности является спектральная плотность  $S_z(k)$ , определяемая следующим образом:

$$\langle z_H(x) z_H(x + \delta) \rangle = \int S_z(k) \cos(2\pi k \cdot \delta) 2\pi k dk \quad (1.7)$$

Поскольку в плоскости  $x, y$  все направления считаются эквивалентными, то  $S_z(k)$  будет зависеть только от  $k = |k|$  и можно показать [26], что

$$S_z(k) \sim k^{-(\beta+1)}, \quad \beta = 1 + 2H \quad (1.8)$$

Следовательно, зная степенное масштабное поведение спектральной плотности  $S_z$ , можно определить фрактальную размерность поверхности по правилу  $D = (7 - \beta)/2$ .

Как показывают результаты исследований шероховатой поверхности реальных тел, сформировавшейся при трении или механической обработке, во многих случаях структура шероховатости демонстрирует автомодельное поведение при изменении масштаба рассмотрения [9, 10, 12]. Следует, однако, помнить, что процессы, приводящие к появлению шероховатости, обычно сильно анизотропны — направление "вдоль" поверхности значительно отличается от поперечного направления. Это приводит к тому, что корреляционные длины — "вдоль" и "поперек" поверхности могут сильно различаться как по величине, так и по свойствам, проявляемым при масштабировании, хотя автомодельность поверхности (в самоаффинном) смысле сохраняется.

Условимся моделировать самоаффинную шероховатую поверхность при помощи

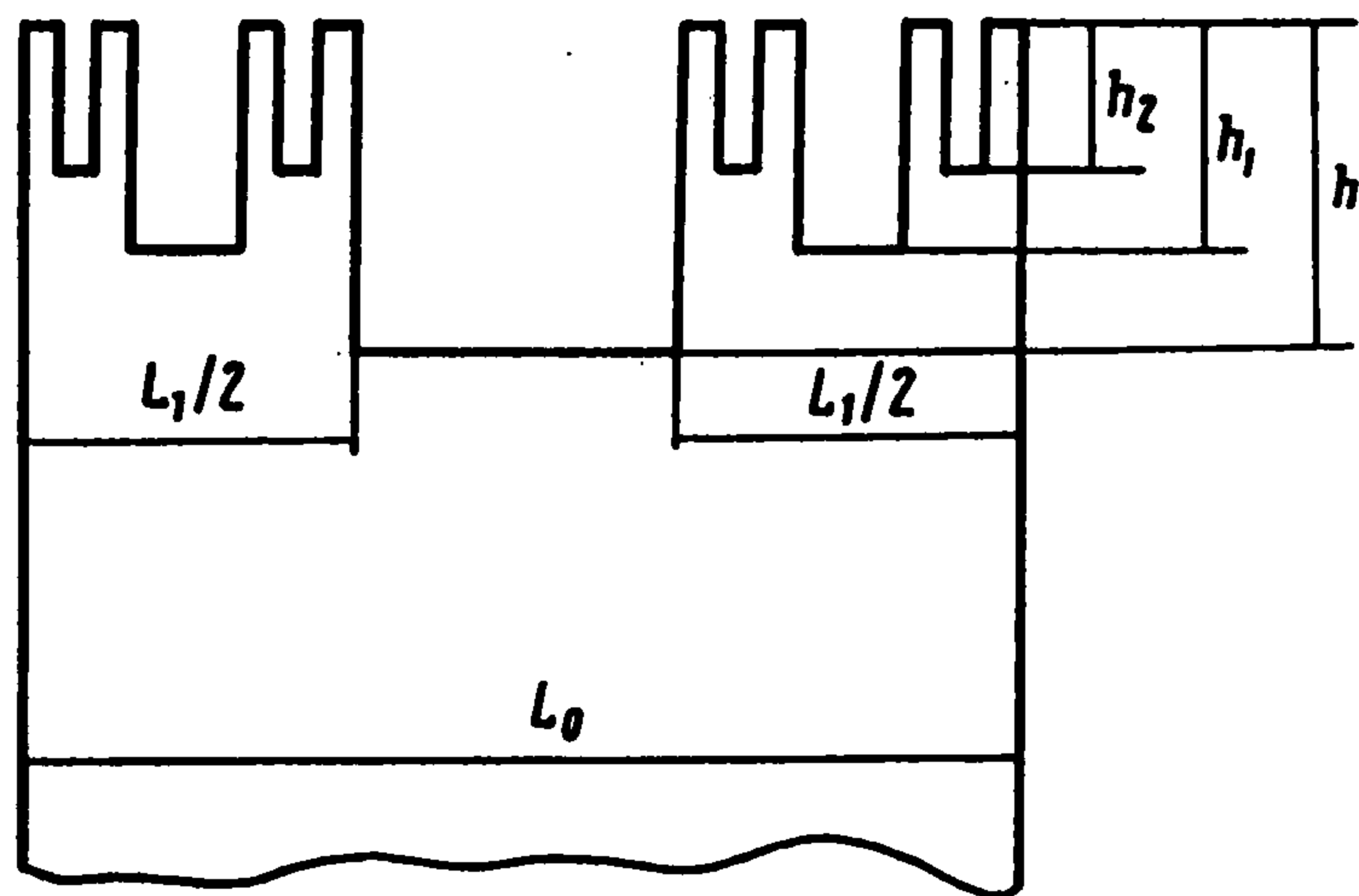
дробного броуновского движения. Если преобладают продольные корреляции, то будет реализовываться случай  $H < \frac{1}{2}$ , если поперечные, — случай  $H > \frac{1}{2}$ . Соотношения (1.6)–(1.8) дают способ определения фрактальных параметров поверхности на основе статистического анализа ее геометрии. Он состоит в следующем. В результате анализа профилограмм нужно построить корреляционную функцию (1.7), определить по ней спектральную плотность  $S_z(k)$  и, построив зависимость  $\ln S_z(k) \sim \ln k$ , убедиться, что экспериментальные точки ложатся на прямую, наклон которой определяет  $\beta$ , а следовательно,  $H$  и  $D$ . Если же зависимость  $S_z(k)$  в логарифмических координатах не линеаризуется, то простая фрактальная модель для описания шероховатости такой поверхности неприменима и можно попытаться построить модель на основе мультифрактальной меры [7, 14]. Этот случай в данной работе рассматриваться не будет.

2. Подобие при моделировании контакта шероховатых тел и фрактальная модель контакта. В данной работе основное внимание уделяется задаче о вдавливании отшлифованного фрактально шероховатого тела в полуплоскость и полупространство. Разумеется, получить точное решение контактной задачи для шероховатого тела, поверхность которого моделируется, например, при помощи дробного броуновского процесса, дело совершенно безнадежное. Можно, однако, воспользоваться одним наблюдением, сделанным на основе аналитического и численного исследования многих процессов, носящих фрактальный характер. Оказалось, что в большинстве случаев на асимптотическое поведение процессов слабо влияет конкретная модель фрактала, а основное влияние оказывают его размерности (фрактальная, спектральная и т.д.). Хотя это утверждение строго не доказано, оно представляется вполне правдоподобным и позволяет получить важные выводы об асимптотическом поведении решения многих фрактальных задач. Ниже выбираем поверхность, построенную на основе регулярного фрактала и анализируем контактную задачу для такой поверхности. При этом предполагается, что полученные результаты имеют силу для всех задач с такими же фрактальными размерностями поверхности штампа и отпечатка.

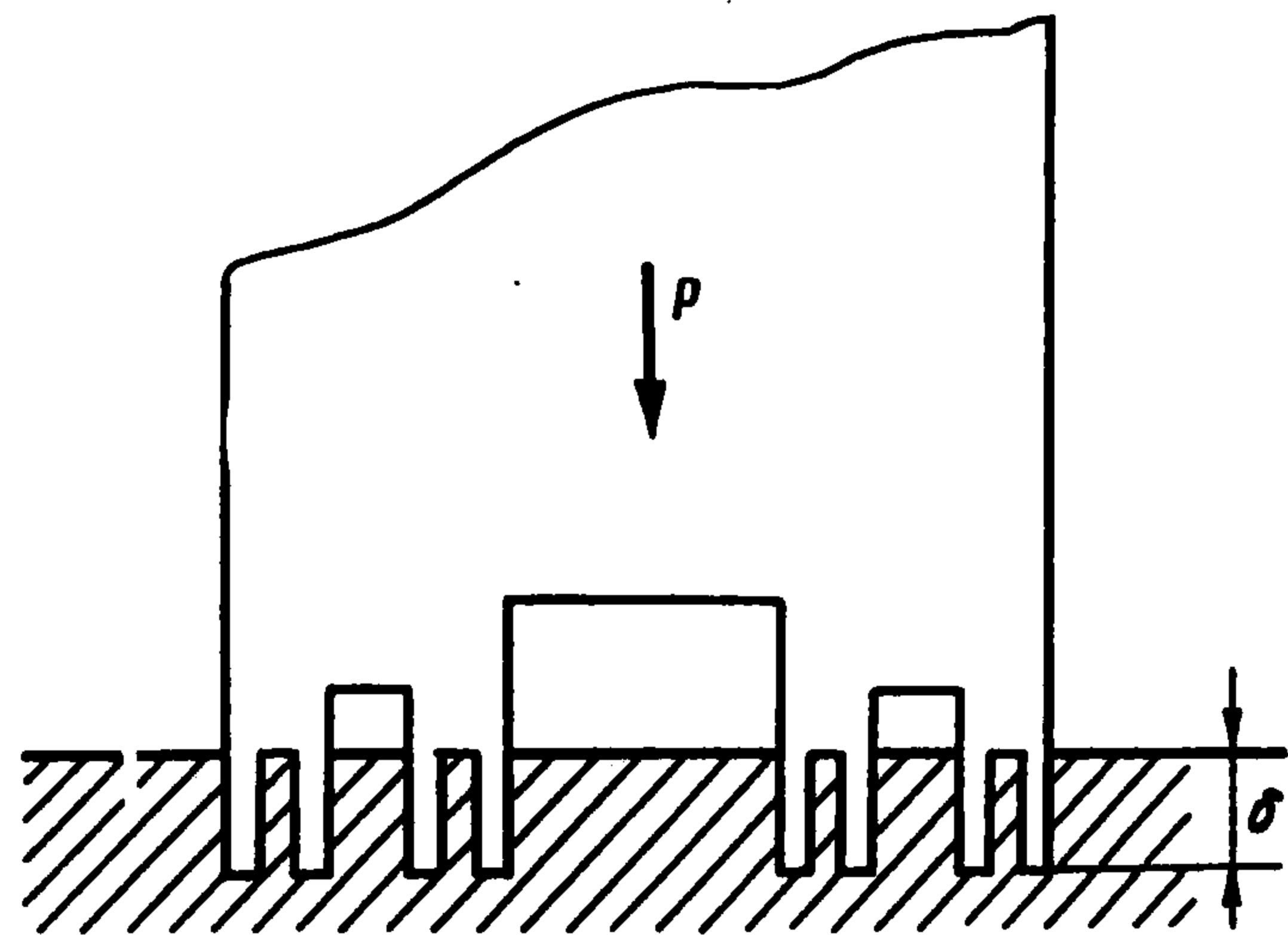
Простейшая модель фрактальной отшлифованной поверхности может быть основана на канторовом множестве [14, 28]. Соединив друг с другом отрезки, получающиеся на последовательных стадиях построения канторова множества, получим объект, изображенный на фиг. 3. На каждой последующей стадии построения этого множества из каждого исходного отрезка выбрасывается средняя часть, так что суммарная длина оставшихся отрезков составляет  $1/a$  от длины исходного ( $a > 1$ ), глубина впадин (отсчитываемая от верха структуры), получающихся на  $n+1$  шаге построения фрактальной структуры в  $b$  раз меньше ( $b \geq 1$ ) глубины впадин возникших на  $n$ -м шаге. В направлении, перпендикулярном плоскости страницы, будем считать поверхность гладкой. Это не очень существенное ограничение. Ниже будет показано, что можно построить канторову поверхность фрактальную и в направлении, перпендикулярном плоскости страницы.

Может сложиться впечатление, что рассматриваемая модель поверхности совершенно нереалистична. Конечно, нет никаких надежд на то, что шероховатость поверхности реального тела будет описываться канторовым множеством. В данной работе такая модель выбрана для того, чтобы иметь возможность провести точный аналитический анализ решений контактных задач. Однако может случиться, что описанная модель поверхности все же не столь далека от действительности, так как результаты изучения фактической площади контакта полированных (шлифованных) металлических поверхностей показывают, что на поверхности металла множество параллельных царапин разной глубины с резкими зазубренными краями [1, 3, 29].

Рассматривая фрактальную модель поверхности, предполагаем, что царапины самоаффинны. Исследуем представленную модель поверхности с точки зрения фрактальной геометрии.



Фиг. 3



Фиг. 4

Сначала определим размерность  $D_C$  плоского канторова множества (фиг. 3). В сечении  $n$ -го поколения этого множества будет  $N = 2^n$  сегментов, длина каждого из которых равна  $l_n = (2a)^{-n} L_0$ , где  $L_0$  — длина нулевого поколения. Если покрыть сечение множества  $N$  сегментами длины  $\delta = l_n$ , то покроются все точки сечения.

Из (1.2) получаем размерность сечения канторова множества

$$D_C = \ln N(\delta) / \ln(1/\delta) = \ln 2 / \ln 2a$$

Если канторову поверхность погрузить в полупространство, то получим "отпечаток", который также является фракталом. Так как отпечаток получается в результате прямого произведения канторова множества  $C$  и прямой  $L$ , то

$$N_{C \otimes L} = \delta^{-D_C} \delta^{-1}$$

Отсюда получаем размерность отпечатка  $D_0 = 1 + D_C$ .

Выясним, при каких условиях является фракталом сама построенная поверхность (см. фиг. 3). Длина контура после  $n$  итераций равна

$$L_{(n)} = L_0 + 2h(q^{n+1} - 1)/(q - 1), \quad q = 2/b$$

где  $L_0$  — ширина тела,  $h$  — глубина наибольшей впадины на его поверхности.

Очевидно, что при  $q < 1$  длина контура конечна ( $L_{(n)}$  стремится к конечному пределу при возрастании  $n$ ). Следовательно, только при  $b \leq 2$  ( $q \geq 1$ ) контур поверхности тела будет фракталом.

Определим размерность этого фрактала  $D_F$ .

При  $b < 2$  и достаточно больших  $n$  имеем  $L_{(n)} \sim 2hq^{n+1}/(q - 1)$ . Следовательно,

$$L_{(n+1)}(l_{n+1}) \approx qL_{(n)}(l_n), \quad l_{n+1} = l_n/(2a) \quad (2.1)$$

где  $l_n$  — масштаб измерения.

Из (1.2) и (2.1) следует, что

$$D_F = 1 + \frac{\ln 2}{\ln 2a} - \frac{\ln b}{\ln 2a} = 1 + D_C - \frac{\ln b}{\ln 2a} \leq 2 \quad (2.2)$$

Размерность  $D_S$  всей фрактальной поверхности будет, как уже говорилось в разд. 1, равна  $D_S = 1 + D_F$ . Полученный результат вполне согласуется с определением фрактальной размерности самоаффинного фрактала, приведенном разд. 1.

Чтобы показать это, нужно вычислить показатель  $H$ , отвечающий рассматриваемой модели. Конечно, для регулярного фрактала эта величина носит весьма условный характер, но при некоторых допущениях ее нетрудно получить.

Рассмотрим профиль поверхности (фиг. 3) как график некоторой ступенчатой функции  $y = y(x)$ . Можно убедиться, что при скейлинге  $\Delta x \rightarrow (2a)^{-1} \Delta x$ , соответствующему шагу итерационного построения поверхности, флуктуации  $\Delta y$  функции  $y$  ведут себя как  $\Delta y \rightarrow (ab)^{-1} \Delta y$ . Действительно, на  $n$ -м шаге итерации  $\Delta y_n \sim y_n p(y_n)$ , где  $p(y_n)$  – вероятность реализации значения  $y_n$ ,  $y_n = h/b^n$ ,  $p(y_n) = (1 - a^{-1}) a^{-n}$ .

Полагая  $\Delta y \sim \Delta x^H$  находим  $(2a)^H = ab$ . Отсюда

$$H = \ln(ab) / \ln(2a) \quad (2.3)$$

В соответствии с определениями разд. 1 фрактальная размерность  $D = 2 - H$ , что при учете (2.3) полностью совпадает с (2.2).

**3. Вдавливание плоского фрактального штампа.** Рассмотрим вдавливание плоского на макроуровне штампа ширины  $L_0$  с построенной выше канторовой поверхностью в гладкое полупространство, как это показано на фиг. 4. Рассмотрим сначала пластическую задачу, используя для полупространства модель жесткопластического тела с пределом пластичности при сдвиге  $\tau_Y$ .

При решении задачи о вдавливании фрактального штампа будем широко использовать решение Хилла для штампа с плоским основанием [30]. Предельная нагрузка на единицу длины штампа равна  $P_* = \tau_Y L_0 (2 + \pi)$ . Предположим, что каждый выступ поколения  $n$  фрактального штампа работает как плоский штамп Хилла. Для того чтобы исключить влияние выступов одного поколения друг на друга, нужно считать, что  $a > 3/2$ .

Пусть  $P_{n+1}$  – предельная нагрузка для выступов  $(n+1)$ -го поколения. Будем считать, что при ее достижении штамп вдавливается в полуплоскость на величину  $\Delta \alpha_{n+1}$ , равную разности высот выступов  $n$ -го и  $(n+1)$ -го поколений.

Принятых предположений достаточно для определения зависимости предельной нагрузки  $P$  от глубины вдавливания  $\alpha$ .

Воспользуемся тем, что при увеличении предельной нагрузки с  $P_{n+1}$  до  $P_n$  штамп вдавливается на величину  $\Delta \alpha_{n+1}$ . Получим

$$\begin{aligned} \Delta P_{n+1} = P_n - P_{n+1} &= \tau_Y (2 + \pi) (L_n - L_{n+1}), \quad L_n = a^{-n} L_0 \\ \Delta \alpha_{n+1} = \alpha_n - \alpha_{n+1} &= bh b^{-(n+1)} (b - 1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{\Delta P_{n+1}}{\Delta \alpha_{n+1}} = \tau_Y (2 + \pi) \frac{a - 1}{b - 1} \frac{L_0}{bh} \left( \frac{b}{a} \right)^{n+1}$$

Учитывая, что  $\alpha_n = bh b^{-n}$ , из (3.1) получим в пределе при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{dP}{d\alpha} = \tau_Y (2 + \pi) \frac{a - 1}{b - 1} \frac{L_0}{bh} \left( \frac{\alpha}{bh} \right)^{\chi - 1}, \quad \chi = \frac{\ln a}{\ln b}$$

Следовательно, зависимость силы  $P$  от сближения  $\alpha$  штампа со средой имеет вид

$$P = P_* \frac{a - 1}{b - 1} \chi^{-1} \left( \frac{\alpha}{bh} \right)^{\gamma_1}, \quad \gamma_1 = \chi = \frac{1 - D_C}{1 + D_C - D_F} \quad (3.2)$$

При пластическом вдавливании шероховатых тел показатель степени  $\gamma_1 < 1$  [1]. В данном случае это условие будет выполнено, если

$$3/2 \leq a < b \leq 2$$

Рассмотрим теперь задачу о вдавливании фрактального штампа в упругой постановке. Асимптотическими методами было показано [31], что в случае, когда упругое полупространство покрыто тонким упругим слоем (работающим по типу пластинки Кирхгофа–Лява), жесткость которого соизмерима или меньше жесткости полупространства, тонкое покрытие в ряде задач может работать подобно слою винклеровских пружин, т.е. упругое основание работает как набор вертикальных непрерывно расположенных упругих стержней (пружины) [3, 32].

Итак, будем рассматривать вдавливание фрактального штампа в винклеровское основание глубиной  $\eta$ . Рассуждая аналогично предыдущему случаю, имеем ( $E$  – модуль упругости основания)

$$\begin{aligned} \Delta P_{n+1} &= P_n - P_{n+1} = L_n \Delta \alpha_{n+1}, \\ \Delta P_{n+1} / \Delta \alpha_{n+1} &= E \eta^{-1} L_0 a^{-n}, \quad \eta = bh \end{aligned} \quad (3.3)$$

в пределе при  $n \rightarrow \infty$  из (3.3) получим после интегрирования

$$P = \frac{EhL_0}{\eta(1+\chi)} \left( \frac{\alpha}{h} \right)^{\gamma_2}, \quad \gamma_2 = \frac{2 - D_F}{1 + D_C - D_F} > 1 \quad (3.4)$$

Отметим, что нелинейная зависимость (3.4) найдена без предположения о нелинейной податливости основания, а только с использованием предположения о фрактальности шероховатости штампа.

Таким образом, при вдавливании шероховатых штампов с фрактальной поверхностью получены асимптотические степенные законы (3.2) и (3.4) для зависимости нагрузки от глубины вдавливания. Показатели  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в этих законах явно зависят от фрактальных размерностей "отпечатка" и контура штампа. При этом для начального ("упругого") сближения показатель  $\gamma_2$  лежит в интервале  $1 < \gamma_2 < 2$ , а при пластическом сближении  $0 < \gamma_1 < 1$ . Такая смена изгиба кривой согласуется с имеющимися экспериментальными данными (см., например, данные по экспериментам на свинце [1] и на стали (последние приведены в работе, цитированной в сноске на стр. 786).

**4. Вдавливание выпуклого фрактального штампа.** Рассмотрим случай плоской деформации. Будем считать, что теперь фрактальная шероховатость наложена не на плоский штамп, а на выпуклый  $z = f(x)$ , где  $f$  – функция профиля. Пусть  $\alpha$  – внедрение носовой точки штампа. Не снижая общности, можно считать, что профиль штампа симметричен относительно оси  $z$ .

В рассмотренных выше двух моделях основания как упругом, так и пластическом контактное давление в любой точке под штампом зависит только от ее перемещения. Сила контактного взаимодействия (в силу симметрии формы) определяется по формуле

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{l_*} p(x) dx, \quad f(l_*) \equiv \alpha \\ p(x) &= c_i [\alpha - f(x)]^{\gamma_i}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где в соответствии с формулами (3.2) и (3.4) имеем

$$c_1 = \tau_Y (2 + \pi) \frac{a - 1}{b - 1} \chi^{-1} (bh)^{\gamma_1}, \quad c_2 = Eh^{1-\gamma_2} \eta^{-1} (1 + \chi)^{-1}$$

в случае пластического ( $i = 1$ ) и упругого ( $i = 2$ ) основания.

Пусть  $f = Ax^m$ ,  $A > 0$ ,  $m > 1$ . Тогда из (4.1) имеем

$$P = c_i \int_0^{l_*} [\alpha - Ax^m]^{\gamma_i} dx = c_i \alpha^{\gamma_i + 1/m} A^{-1/m} \int_0^1 [1 - A \xi^m]^{\gamma_i} d\xi = O(\alpha^{\gamma_i + 1/m})$$

Для вдавливаемого в винклеровскую среду выпуклого шероховатого штампа (с макропрофилем  $z = A\rho^m$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) можно показать, что

$$P \sim \alpha^{\gamma_3 + 2/m}$$

Для нешероховатого штампа имеем  $D_F = 2$ ,  $D_0 = 2$ ,  $\gamma_3 = 1$ . Отсюда получаем, что  $P \sim \alpha^{1+2/m}$ , в полном соответствии с известными результатами [3].

Таким образом, на конкретном примере показано, что фрактальная шероховатость поверхности контактирующих тел приводит к хорошо известным степенным зависимостям вида  $P \sim \alpha^\gamma$ .

Показатель степени  $\gamma$  оказывается тесным образом связанным с фрактальными параметрами контактирующей пары: фрактальными размерностями шероховатой поверхности и отпечатка. Учитывая присущую фрактальным объектам универсальность [7, 14], можно предположить, что и в общем случае показатель  $\gamma$  определяется лишь макрохарактеристиками фрактальной поверхности (такими как размерность), а детали строения фрактала несущественны. В этом смысле можно говорить об универсальности показателя  $\gamma$ . Напротив, предэкспоненциальный множитель  $A_0$  в степенной зависимости  $P \sim A_0 \alpha^\gamma$  должен включать в себя информацию о деталях строения поверхности и поэтому будет зависеть от конкретного вида поверхности контактирующих тел.

**5. Пространственная задача.** Приведенные выше результаты обобщаются на трехмерный случай. Начнем с построения регулярной самоаффинной шероховатой поверхности. По аналогии с изложенным в предыдущих разделах построим модель такой поверхности на основе канторова множества [28, 33]. Для наглядности рассмотрим плоский квадратный в плане штамп размера  $L \times L$ . На первом этапе построение канторовой шероховатости из поверхности штампа вырезается крест (толщины  $h$ ), разделяющий поверхность на четыре конгруэнтных квадрата  $(L/a) \times (L/a)$ . Затем из каждого из оставшихся квадратов опять вырезается крест (толщины  $h/b$ ), оставляющий четыре квадрата  $(L/a^2) \times (L/a^2)$ , и этот процесс повторяется до бесконечности.

В результате получим самоаффинную фрактальную поверхность размерности

$$D = 3 - H, \quad H = \ln(ba^2)/\ln(2a)$$

Отпечаток штампа на плоскости представляет собой двумерную канторову "пыль" — регулярный фрактал размерности  $D_0 = \ln 4/\ln(2a)$ .

Рассматривая аналогично изложенному в разд. 3 вдавливание жесткого фрактального штампа с самоаффинной шероховатой поверхностью в упругое (винклеровское) полупространство, как и в плоском случае, получим уравнение

$$\Delta P_{n+1} = ES_n \Delta \alpha_{n+1}, \quad S_n = S_0/a^{2n}, \quad S_0 = L^2$$

где  $S_n$  — площадь штампа на  $n$ -м шаге итерации.

Переходя к пределу  $n \rightarrow \infty$  и интегрируя, имеем

$$P \sim \left(\frac{\alpha}{h}\right)^{\gamma_3}, \quad \gamma_3 = \frac{\ln ba^2}{\ln b} = \frac{3 - D_F}{1 - D_F + D_0} \geq 1$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Демкин Н.Б. Фактическая площадь касания твердых поверхностей. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 111 с.
2. Bowden F.P., Tabor D. Friction and Lubrication of Solids. London: Oxford Univ. Press, 1950. V. 1. 337 p.; 1964. V. 2. 544 p.; Боуден Ф.П., Тейбор Д. Трение и смазка твердых тел. М.: Машиностроение, 1968. 542 с.
3. Johnson K.L. Contact Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1985. 452 p.; Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
4. Свириденко А.И., Чижик С.А., Петроковец М.И. Механика дискретного фрикционного контакта. Минск: Наука і техника, 1990. 272 с.
5. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 253 с.
6. Бородич Ф.М. О задаче контакта двух предварительно искаженных полупространств//ПМТФ. 1984. No. 2. С. 160–162.
7. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. San-Francisco: Freeman, 1982. 461 p.
8. Pfeifer P. Fractal dimension as working tool for surface-roughness problems//Appl. Surf. Sci. 1984. V. 18. No. 1/2. P. 146–164.

9. *Ling F.F.* Fractals, engineering surfaces and tribology//Wear. 1990. V. 136. No. 1. P. 141–156.
10. *Gagnepain J.J., Roques-Carnes C.* Fractal approach to two-dimensional and three-dimensional surface roughness//Wear. 1986. V. 109. May–June, P. 119–126.
11. *Mandelbrot B.B., Passoja D.E., Paullay A.J.* Fractal character of fracture surfaces of metals//Nature. 1984. V. 308. No. 5961. P. 721–722.
12. *Sayles R.S., Thomas T.R.* Surface topography as a non-stationary random process//Nature. 1978. V. 271. No 5641. P. 431–434.
13. *Dubuc B., Zucker S.W., Tricot C., Quiniou J.F., Wehbi D.* Evaluating the fractal dimension of surfaces//Proc. Roy. Soc. London. A. 1989. V. 425. No. 1868. P. 113–127.
14. *Feder J.* Fractals N.-Y., London: Plenum Press, 1989. 283 p.
15. *Archard J.F.* Elastic deformation and the laws of friction//Proc. Royal Soc. Ser. A. 1957. V. 243. No. 1233. P. 190–205.
16. *Бородич Ф.М.* Контактные задачи типа Герца для анизотропной физически нелинейной упругой среды//Пробл. прочности. 1989. № 12. С. 47–53.
17. *Ling F.F.* The possible role of fractal geometry in tribology//Tribology Trans 1989. V. 32. No. 4. P. 497–505.
18. *Majumdar A., Bhushan B.* Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces//Trans. ASME. J. Tribology. 1990, V. 112. No. 2. P. 205–216.
19. *Бородич Ф.М.* О деформативных свойствах многослойных металлических пакетов//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 105–112.
20. *Баренблатт Г.И., Ботвина Л.Р.* Автомодельность усталостного разрушения//Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 161–165.
21. *Мосолов А.Б., Динариев О.Ю.* Автомодельность и фрактальная геометрия разрушения//Пробл. прочности. 1988. № 1. С. 3–7.
22. *Gist G.A.* Ultrasonic attenuation and fractal surfaces in porous media//Phys. Rev. B. 1989. V. 39, No. 10. P. 7295–7298.
23. *Avnir D., Farin D., Pfeifer P.* Chemistry in noninteger dimensions between two and three. II. Fractal surfaces of adsorbents//J. Chem. Phys. 1983. V. 79. No. 7. P. 3566–3571.
24. *Hohr A., Neumann H.-B., Schmidt P.W., Pfeifer P., Avnir D.* Fractal surface and cluster structure of controlled-pore glasses and Vycor porous glass as revealed by small-angle x-ray and neutron scattering//Phys. Rev. B. 1988. V. 38 No. 2. P. 1462–1467.
25. *Falconer K.J.* Geometry of fractal sets. Cambridge: Univ. Press, 1985. 162 p.
26. *The Science of Fractal Images*/Ed. H.-O. Peitgen, D. Saupe. N.-Y.: Springer, 1988. 312 p.
27. *Мандельброт Б.* Самоаффинные фрактальные множества. Ч. I–III./Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 9–47.
28. *Лиу С., Каплан Т., Грей П.* Отклик шероховатых поверхностей на переменном токе/Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 543–552.
29. *Бородич Ф.М., Мосолов А.Б.* Фрактальный контакт твердых тел.//Журн. техн. физики. 1991. Т. 61. Вып. 9. С. 50–54.
30. *Hill R.* Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950. 356 p.; *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
31. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
32. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
33. *Giugliarelli G., Martin A., Stella A.L.* Spectral properties of fractal surfaces//Europhys. Letters. 1990. V. 11. No. 2. P. 101–106.

Москва

Поступила в редакцию  
28.X.1991