

УДК 539.3:534.1

© 1992 г. Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, Е.В. Кириллова

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КРУГОВОГО ШТАМПА, СЦЕПЛЕННОГО С УПРУГИМ СЛОЕМ

В качестве обобщения подхода, предложенного [1] для случая гладкого контакта, предлагается метод решения динамических контактных задач для кругового штампа, сцепленного с упругим слоем. При этом возникает бесконечная система линейных алгебраических уравнений, которая на основании учета асимптотического поведения неизвестных сводится к асимптотически эквивалентной конечной системе. Отметим, что в рамках данного подхода устанавливаются простые соотношения между неизвестными, соответствующими касательным и нормальным компонентам, и тем самым размерность системы уменьшается вдвое, а трудоемкость реализации метода практически та же, что и для гладкого контакта.

Результаты решения динамических контактных задач для штампов, сцепленных с упругим основанием, приводятся в случаях, когда учет сил сцепления необходим по существу, например, при анализе напряженно-деформированного состояния в клеевых и сварных соединениях или динамики жестко заделанных в грунт фундаментов и оснований. В качестве упругого основания рассматривалось, в частности, однородное полупространство [2–4] или слой [5–7] при круговой [2, 4], полосовой [5, 6] или прямоугольной [3, 7] области контакта.

Наряду с указанными выше приложениями, решение контактных задач со сцеплением необходимо для определения границ применимости результатов, полученных при ослабленных условиях контакта. Такое сопоставление результатов для диапазона частот $0 \leq \omega a/v_s \leq 3$ (a – радиус штампа, v_s – скорость S волн в среде) проведено [2] для случая круглого штампа и однородного полупространства при $\nu = 0,25$ (ν – коэффициент Пуассона).

Ниже обсуждаются результаты аналогичного сопоставления, проведенного для упругого слоя с разными значениями коэффициента Пуассона.

1. Рассматриваются установившиеся гармонические колебания круглого в плане штампа, сцепленного с поверхностью упругого слоя, нижняя грань которого жестко скреплена с недеформируемым основанием. К штампу приложена вертикальная осесимметричная нагрузка $Fe^{-i\omega t}$. В силу линейности задачи множитель $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем опущен.

Для определения вертикальных смещений штампа w , волновых полей и линий тока энергии необходимо предварительно решить контактную задачу относительно неизвестных контактных напряжений

$$q = \{\tau_{rz}, \sigma_{zz}\} = \{q_1, q_2\} \quad (\tau_{\varphi z} \equiv 0)$$

Система интегральных уравнений относительно $q(r)$, возникающая при удовлетворении условиям равенства перемещений штампа и поверхности слоя в зоне контакта, при помощи преобразования Фурье по горизонтальным координатам x, y , которое в цилиндрических координатах r, φ, z ($z = 0$ – поверхность слоя) принимает вид преобразования Фурье–Бесселя, сводится к функциональному уравнению

$$K(\alpha)Q(\alpha) = F(\alpha) + \Phi(\alpha) \tag{1.1}$$

Здесь

$$K(\alpha) = \begin{vmatrix} -iM & -i\alpha P \\ i\alpha P & R \end{vmatrix}, \quad M = \frac{M_1}{\Delta}, \quad P = \frac{P_1}{\Delta}, \quad R = \frac{R_1}{\Delta}$$

$$Q(\alpha) = 2\pi \int_0^{\infty} \left\| \begin{matrix} i J_1(\alpha r) q_1(r) \\ J_0(\alpha r) q_2(r) \end{matrix} \right\| r dr \quad (1.2)$$

$$F + \Phi = 2\pi \left(\int_0^a + \int_a^{\infty} \right) \left\| \begin{matrix} i J_1(\alpha r) u_1(r) \\ J_0(\alpha r) u_2(r) \end{matrix} \right\| r dr$$

$$u = \{u_r, u_z\} = \{u_1, u_2\}$$

(u — перемещения поверхности слоя).

Из условия $u|_{r < a} = \{0, w\}$ следует

$$F(\alpha) = w F_1(\alpha), \quad F_1(\alpha) = \{0, 2\pi a J_1(a\alpha)/\alpha\}$$

Для рассматриваемого слоя единичной толщины

$$M_1(\alpha) = i\sigma_2(\gamma - \alpha^2)[\alpha^2 d_{12} - \sigma_1 \sigma_2 d_{21}]/2$$

$$P_1(\alpha) = \sigma_1 \sigma_2(\gamma + \alpha^2) + (\gamma \alpha^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) s_{12} - \sigma_1 \sigma_2(\gamma + \alpha^2) c_{12}$$

$$R_1(\alpha) = \sigma_1(\gamma - \alpha^2)[\alpha^2 d_{21} - \sigma_1 \sigma_2 d_{12}]$$

$$\Delta(\alpha) = (2\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 \gamma + \alpha^2 [\gamma^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2] s_{12} - [\gamma^2 + \alpha^4] \sigma_1 \sigma_2 c_{12}) \mu$$

$$d_{ij} = sh \sigma_i ch \sigma_j, \quad s_{12} = sh \sigma_1 sh \sigma_2, \quad c_{12} = ch \sigma_1 ch \sigma_2$$

$$\sigma_n = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_n^2}, \quad n = 1, 2; \quad \gamma = \alpha^2 - \frac{\kappa_2^2}{2}, \quad \kappa_1 = \frac{\omega}{v_p}, \quad \kappa_2 = \frac{\omega}{v_s}$$

(v_p, v_s — скорость P - и S -волн в слое).

Общая схема сведения задачи к бесконечной системе остается той же, что и развитая ранее [1] для гладкого контакта. В рассматриваемом случае контакта со сцеплением имеем

$$\Phi(\alpha) = 2\pi a \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \begin{matrix} i t_{1,k} B_{1,k}(\alpha) \\ t_{2,k} B_{0,k}(\alpha) \end{matrix} \right\| (\alpha^2 - \xi_k^2)^{-1}$$

$$B_{1,k}(\alpha) = \alpha J_0(a\alpha) H_1^{(1)}(\xi_k a) - \xi_k J_1(a\alpha) H_0^{(1)}(a\xi_k)$$

$$B_{0,k}(\alpha) = \xi_k J_0(a\alpha) H_1^{(1)}(\xi_k a) - \alpha J_1(a\alpha) H_0^{(1)}(a\xi_k)$$

$$2t_{1,k} = -i\xi_k (M_{1,k} Q_{1,k} + \xi_k P_{1,k} Q_{3,k})/\Delta'(\xi_k)$$

$$2t_{2,k} = i\xi_k (i\xi_k P_{1,k} Q_{1,k} + R_{1,k} Q_{3,k})/\Delta'(\xi_k)$$

$$M_{1,k} = M_1(\xi_k), \quad P_{1,k} = P_1(\xi_k) \text{ и т.д.}$$

ξ_k — полюсы элементов $K(\alpha)$ (нули $\Delta(\alpha)$), расположенные в комплексной плоскости α выше контура σ , обходящего вещественные ξ_k в соответствии с принципом предельного поглощения [8].

Из уравнения (1.1) следует, что

$$Q(\xi) = K^{-1}(F + \Phi) = L(\xi)(F(\xi) + \Phi(\xi))/\Delta_2(\xi)$$

$$L = \left\| \begin{matrix} -iR_1 & \alpha P_1 \\ -\alpha P_1 & -M_1 \end{matrix} \right\|, \quad \Delta_2 = 2\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 (1 - c_{12}) + (\alpha^4 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) s_{12}$$

Функция $Q(\alpha)$, являясь по построению целой, не имеет полюсов, следовательно, должны выполняться условия устранения особенностей:

$$L(\xi_k) \operatorname{res}(F(\alpha) + \Phi(\alpha))|_{\alpha = \xi_k} = 0 \quad (1.3)$$

$$L(z_l)(F(z_l) + \Phi(z_l)) = 0; \quad l, k = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Здесь z_l — нули $\Delta_2(\alpha)$, для определенности также расположенные выше контура σ . Кроме того, должны выполняться аналогичные условия при $\alpha = -\zeta_k$ и $\alpha = -z_l$, но в силу четности они сводятся к (1.3), (1.4).

Из соотношения $\det L = -i\Delta\Delta_2$ следует, что строки матриц $L(\zeta_k)$, $L(z_l)$ линейно зависимы и при каждом l, k условия (1.3), (1.4) дают по одному независимому уравнению относительно неизвестных $t_{1,k}$, $t_{2,k}$, входящих в $\Phi(\alpha)$.

Уравнения (1.3) сводятся к виду

$$R_{1,k} t_{1,k} + \zeta_k P_{1,k} t_{2,k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

что позволяет, как и в случае гладкого контакта, ограничиться одним набором неизвестных $t = \{t_{2,1}, t_{2,2}, \dots\}$, выразив $t_{1,k}$ через $t_{2,k}$. Неизвестные t определяются из бесконечной системы, порождаемой условиями (1.4):

$$As = f, \quad A = \|a_{lk}\|_{l,k=1}^{\infty}, \quad s = \{s_1, s_2, \dots\}, \quad f = \{f_1, f_2, \dots\} \quad (1.6)$$

$$a_{lk} = \frac{1}{z_l^2 - \zeta_k^2} \left[-B_{1,k}(z_l) \frac{c_k}{d_l} + B_{0,k}(z_l) \right] (J_1(az_l) H_1^{(1)}(a\zeta_k))^{-1}$$

$$f_l = -\frac{1}{z_l}, \quad t_{2,k} = \frac{s_k}{H_1^{(1)}(a\zeta_k)}, \quad c_k = \frac{\zeta_k P_{1,k}}{R_{1,k}}, \quad d_l = \frac{z_l P_1(z_l)}{R_1(z_l)}$$

В случае гладкого контакта [1], регуляризация системы проводилась путем выделения и обращения ее главной части. Недостатками такого способа регуляризации являются медленная сходимость результатов в окрестности точек выхода вещественных ветвей кривых $z_l(\omega)$ и большие затраты машинного времени на обращение и перемножение матриц. Этим недостаткам лишен подход, основанный на учете асимптотического поведения неизвестных $t_{2,k}$ при $k \rightarrow \infty$.

Известное поведение контактных напряжений в окрестности границы штампа

$$q(r) \sim q_0^+(a-r)^{-1/2+i\gamma} + q_0^-(a-r)^{-1/2-i\gamma}, \quad r \rightarrow a$$

$$q_0^{\pm} = \{q_{0,1}^{\pm}, q_{0,2}^{\pm}\}, \quad \gamma = \operatorname{arcth} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

позволяет, исходя из интегрального представления (1.2), выписать асимптотику $Q(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и, как следствие, асимптотику неизвестных при $k \rightarrow \infty$:

$$t_{2,k} \sim 1/2 i \zeta_k (N_{1,k}^+ q_{0,1}^+ + N_{2,k}^+ q_{0,2}^+ + N_{1,k}^- q_{0,1}^- + N_{2,k}^- q_{0,2}^-) / \Delta'(\zeta_k) = p_k \quad (1.7)$$

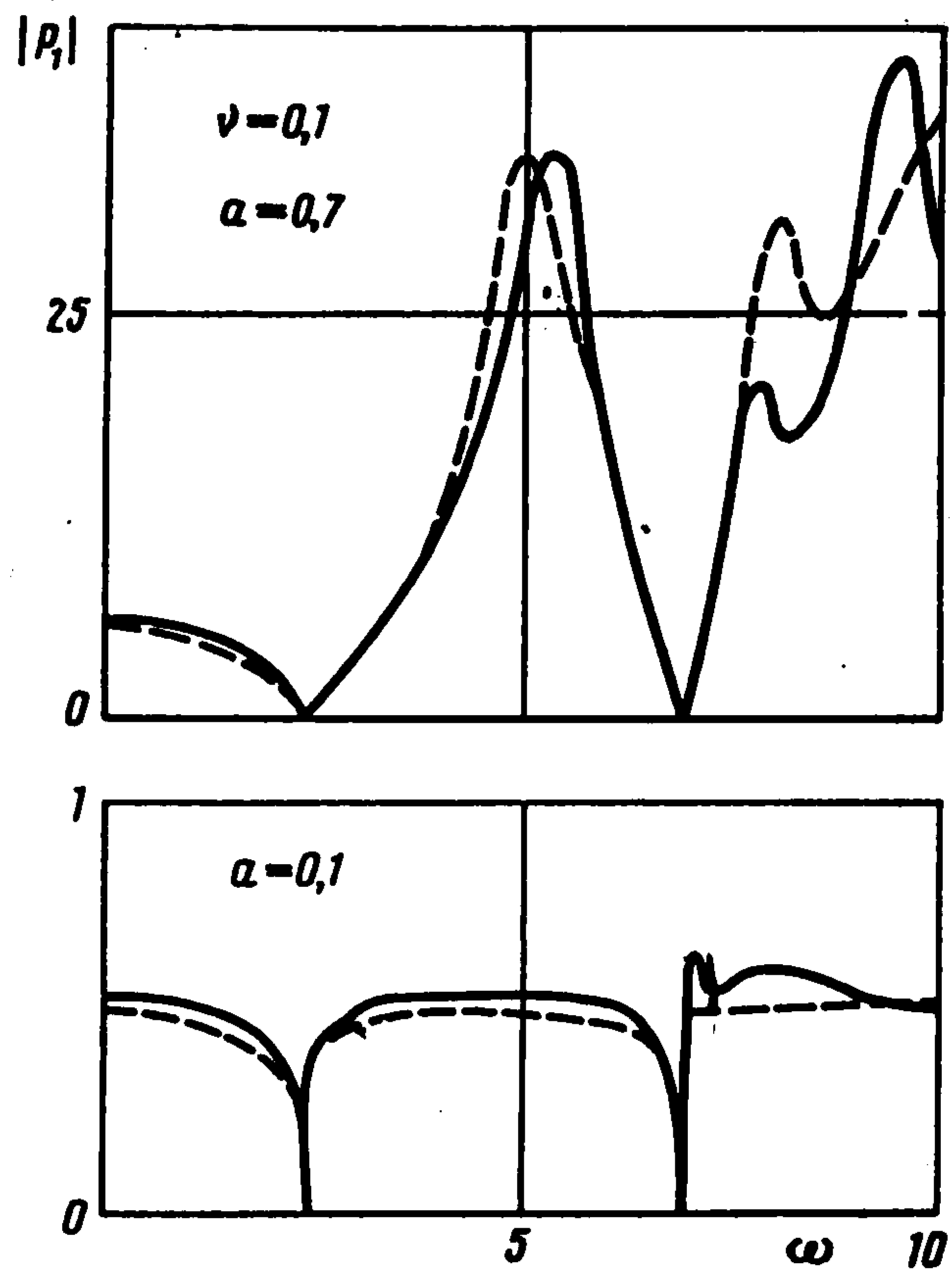
$$N_{1,k}^{\pm} = -\pi a \zeta_k P_1(\zeta_k) (2a/\zeta_k)^{1/2 \pm i\gamma} \Gamma(1/2 \pm i\gamma) J_{3/2 \pm i\gamma}(a\zeta_k)$$

$$N_{2,k}^{\pm} = \pi R_1(\zeta_k) (2a/\zeta_k)^{1/2 \pm i\gamma} \Gamma(1/2 \pm i\gamma) J_{1/2 \pm i\gamma}(a\zeta_k), \quad k \rightarrow \infty$$

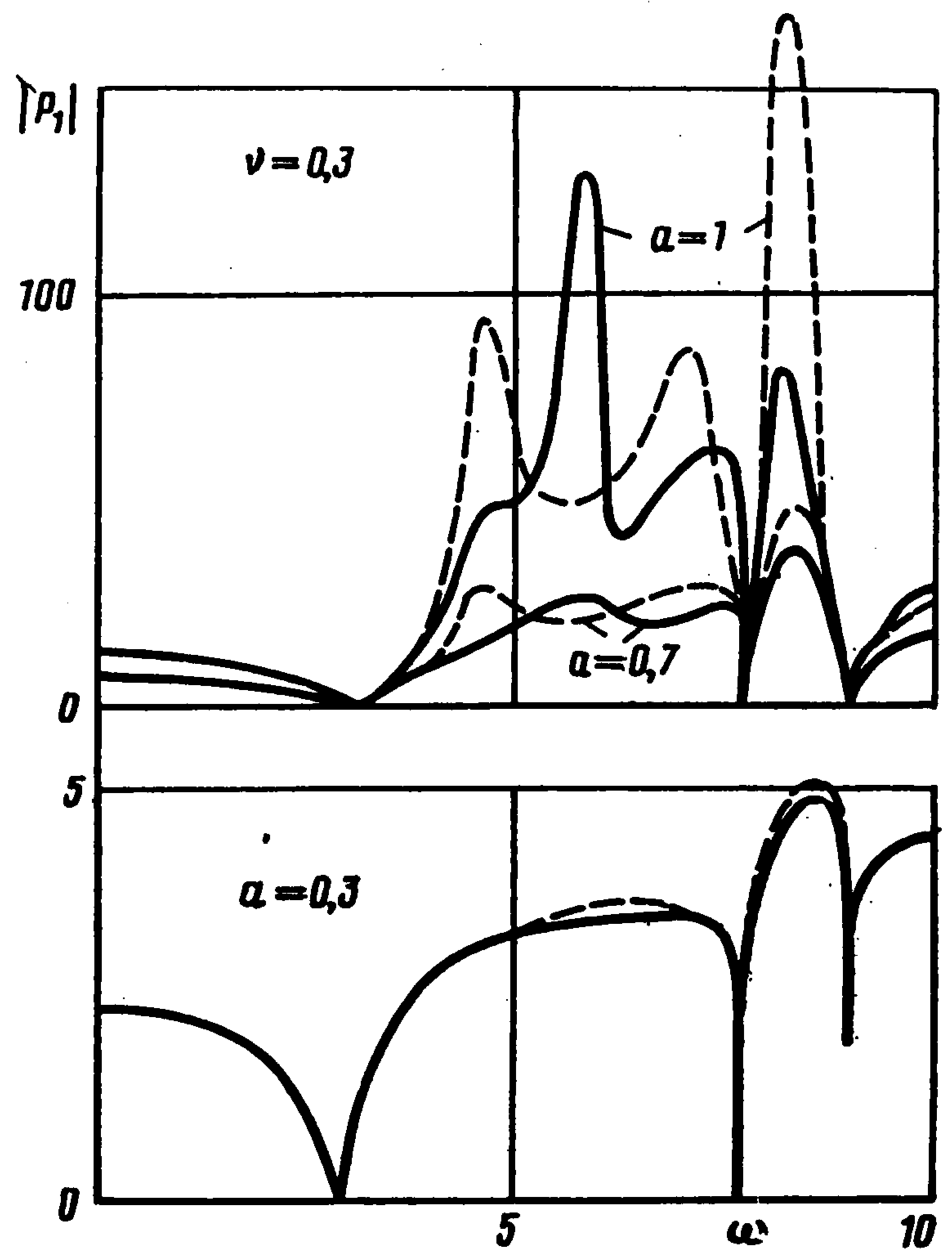
Подставив, начиная с некоторого номера $k = N + 1$, в систему (1.4) в качестве неизвестных $t_{2,k}$ их асимптотическое представление (1.7), приходим к асимптотически эквивалентной конечной системе размерности $N + 4$, решение которой стабилизируется с увеличением N .

Использование асимптотики (1.7) позволяет определить не только контактные напряжения q и контактную жесткость $P_1 = w^{-1} / \iint_{\Omega} q_2 d\Omega$, но и коэффициенты интенсивности напряжений q_0^1 в окрестности кромки штампа

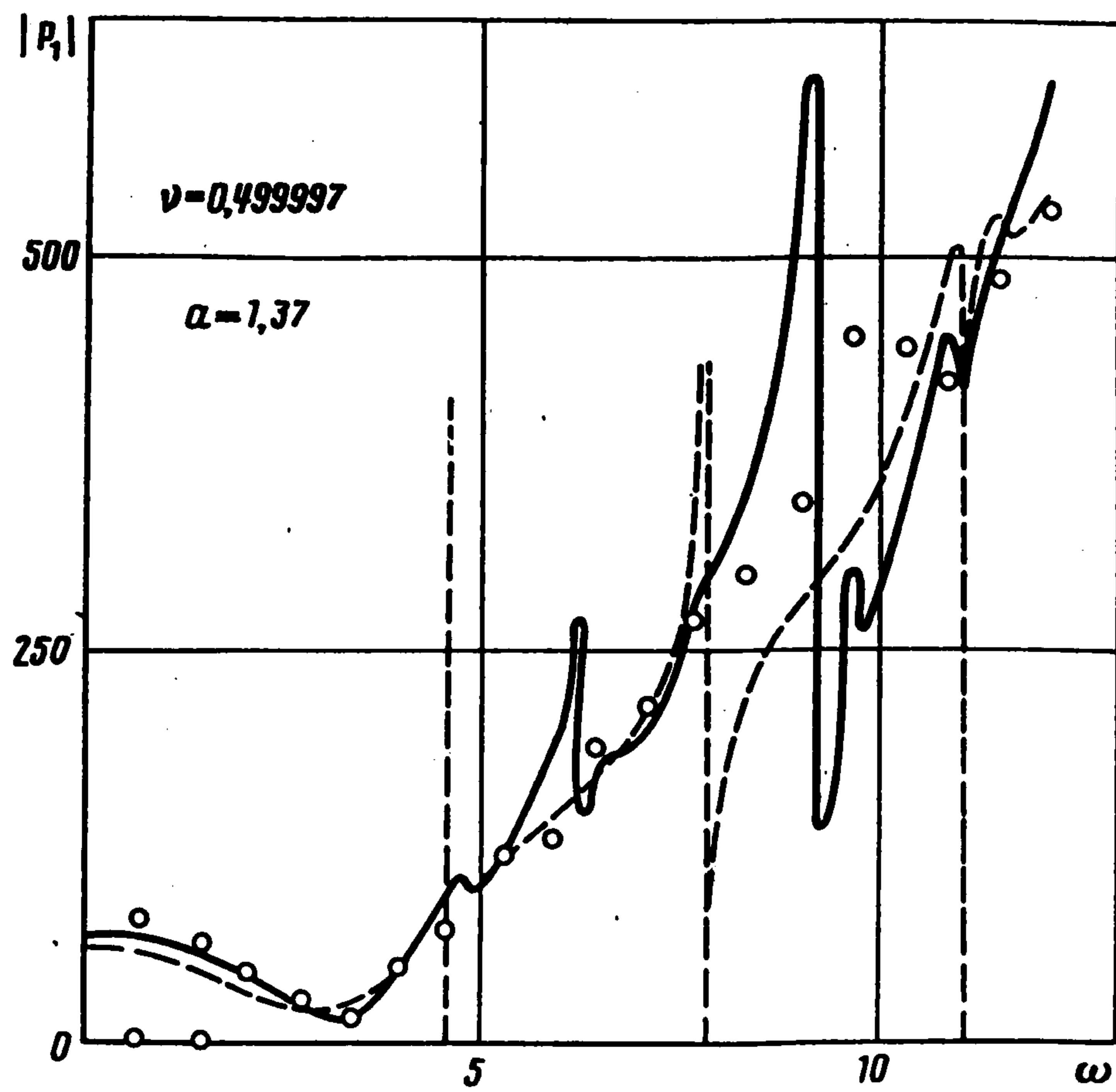
$$q(r) = \pi i a \sum_{l=1}^{\infty} \left\| \begin{array}{l} -iJ_1(z_l r) [-iR_l S_1(z_l) + z_l P_l S_2(z_l)] \\ J_0(z_l r) [-z_l P_l S_1(z_l) - M_l S_2(z_l)] \end{array} \right\|_{z_l} - \left\| \begin{array}{l} 0 \\ 2 \frac{M_1(0)}{\Delta_2(0)} \end{array} \right\|$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$$P_1 = \frac{\Delta(0)}{R_1(0)} \left[\pi a^2 - 2\pi a \left(\sum_{k=1}^N \frac{s_k}{\xi_k} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{i}{2\Delta'(\xi_k)} (N_{1,k}^+ q_{0,1}^+ + N_{2,k}^+ q_{0,2}^+ + N_{1,k}^- q_{0,1}^- + N_{2,k}^- q_{0,2}^-) \right) \right] \\ q_0^+ = \{t_{2,N+1}, t_{2,N+3}\}, \quad q_0^- = \{t_{2,N+2}, t_{2,N+1}\}$$

Здесь

$$R_l = \frac{R_1(z_l)}{\Delta_2'(z_l)}, \quad P_l = \frac{P_1(z_l)}{\Delta_2'(z_l)}, \quad M_l = \frac{M_1(z_l)}{\Delta_2'(z_l)} \\ S_1(z_l) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{z_l^2 - \xi_k^2} (-ic_k B_{1,k}^*(z_l) t_{2,k}) + \\ + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{z_l^2 - \xi_k^2} (-ic_k B_{1,k}^*(z_l)) p_k \\ S_2(z_l) = \frac{H_1^{(1)}(az_l)}{z_l} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{z_l^2 - \xi_k^2} B_{0,k}^*(z_l) t_{2,k} + \\ + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{z_l^2 - \xi_k^2} B_{0,k}^*(z_l) p_k \\ B_{1,k}^*(z_l) = [z_l H_0^{(1)}(z_l a) H_1^{(1)}(\xi_k a) - \xi_k H_1^{(1)}(z_l a) H_0^{(1)}(\xi_k a)] \\ B_{0,k}^*(z_l) = [\xi_k H_0^{(1)}(z_l a) H_1^{(1)}(\xi_k a) - z_l H_1^{(1)}(z_l a) H_0^{(1)}(\xi_k a)]$$

Данный метод можно использовать и в случае неосесимметричных колебаний штампа или деформируемого поверхностного объекта. Если перемещения в области контакта зависят от угловой координаты, то вместо функционального уравнения (1.1) возникает счетный набор уравнений, которые сводятся к системам вида (1.6), с той же матрицей A , отличающимся только правыми частями.

2. Для анализа степени влияния сцепления в зоне контакта на динамическую контактную жесткость P_1 проведено сопоставление с результатами, полученными для гладкого контакта при $\nu = 0,1; 0,3; 0,499997$ и $a \in [0,5]$ (здесь, как и в предыдущих работах, толщина слоя h , скорость S волн v_s и плотность ρ предполагаются единичными, т.е. все размерные величины приводятся в единицах, выраженных через эти три характерные). Установлено, что при $0 \leq \omega \leq 3$ результаты практически совпадают для всех ν , при $\omega > 3$ совпадение сохраняется при малых a , а с ростом a наблюдается расхождение результатов, для $\nu = 0,1$ результаты мало различаются почти для всех рассмотренных ω и a .

На фиг. 1–3 приводятся графики зависимости амплитуды P_1 от ω , иллюстрирующие указанные закономерности¹.

Результаты для гладкого контакта даны штриховой линией; там, где результаты в масштабе чертежа совпадают, приводится только одна сплошная линия для контакта со сцеплением. Светлыми точками на фиг. 3 нанесены экспериментальные данные, полученные Е.М. Тиманиным для слоя желатина ($\nu = 0,499997$), моделирующего упругие свойства живой ткани.

¹ Более полный набор графиков для всех рассмотренных случаев, включающий также вид вещественных и комплексных ветвей дисперсионных кривых (зависимости $z_l(\omega)$, $\xi_k(\omega)$) содержится в работе *Е.В. Глушкова, Н.В. Глушковой, Е.В. Кирилловой*. Расчет динамической контактной жесткости упругого слоя при контакте со сцеплением / Кубан. гос. ун-т. Краснодар. Деп. в ВИНТИ 20.12.91, № 4726–В91, 36 с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. К определению динамической контактной жесткости упругого слоя // ПММ. 1990. Т. 54. № 3. С. 474–479.
2. Zeng X., Cakmak A.S. Dynamic structure-soil interaction under the action of vertical ground motion. Pt. I. the axisymmetric problem // Soil Dyn. Earthquake Eng. 1984. V. 3. № 4. P. 200–210.
3. Triantafyllidis Th. Dynamic stiffness of rigid rectangular foundations on the half-space // Earthquake Eng. and Struct. Dyn. 1986. V. 14. № 3. P. 391–411.
4. Triantafyllidis Th. Diffraction effects between foundations due to incident Rayleigh waves // Earthquake Eng. and Struct. Dyn. 1989. V. 18. № 6. P. 815–835.
5. Oien M.A. Steady motion of a rigid strip bended to an elastic half-space // Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E 1971. V. 38. № 2. P. 328–334.
6. Ильичев В.А., Калашников В.А. Определение параметров колебаний большемерных фундаментов на вязкоупругом основании // Тез. докл. 7-й Всесоюзн. конф. "Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений". Днепропетровск: М., 1989. С. 15–16.
7. Тяпин А.Г. Влияние глубины заложения фундамента на реакцию сооружений при сейсмических воздействиях // Строительная механика и расчет сооружений. 1990. № 4. С. 32–37.
8. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.

Краснодар

Поступила в редакцию
27.VI.1991