Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 5, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Г.Я. Попов

НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ ВОЗЛЕ СФЕРИЧЕСКОГО РАЗРЕЗА

При помощи изложенного ранее [1] подхода неосесимметричная задача о концентрации напряжений в неограниченной упругой среде возле сферического разреза сводится к трем одномерным раздельно решаемым интегральным уравнениям. Получено их точное решение в классе функций с неинтегрируемыми особенностями и на этой основе, как и ранее [1], указаны простые формулы для коэффициентов интенсивности напряжений. Известны результаты исследования осесимметричного варианта этой задачи [2–5].

1. Модификация представления Треффтца. Имеется в виду представление [6]

$$v = \psi + (r^2 - R^2)\operatorname{grad}\psi_0 \tag{1.1}$$

Здесь $v = 2Gu$, u вектор смещения, а ψ – гармонический вектор, с компонентами $u_j(x_1, x_2, x_3)$, $\psi_j(x_1, x_2, x_3)$ $(j = 1, 2, 3)$ соответственно, ψ_0 – гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению

$$r\frac{\partial\psi_0}{\partial r} + \nu\psi_0 = -\frac{\operatorname{div}\psi}{2\kappa}, \quad \nu = \frac{1-2\mu}{\kappa}$$
$$(\kappa = 3 - 4\mu,\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) \tag{1.2}$$

где μ – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига.

Располагая формулами (1.1) для компонентов вектора смещений в декартовой системе координат, можем по известным формулам найти компоненты вектора смещений в сферической системе координат, а по ним, пользуясь соотношениями Коши и законами Гука, – напряжения σ_r, $\tau_{r\theta}$, $\tau_{r\varphi}$. Однако эти формулы окажутся достаточно сложными. Поэтому, как и ранее [1], получим для указанных напряжений формулы такой же структуры, что и (1.1). С этой целью получим [7] формулу для компонентов вектора напряжений $p_{\nu j}$ $(j = 1, 2, 3)$ по сечению с нормалью ν. Эта формула, если учесть (1.1), соотношения Коши и закон Гука, а также (1.2) и равенство $\operatorname{div}v = \operatorname{div}\psi + 2r\partial\psi_0/\partial r$ может быть представлена в виде

$$rp_{\nu j} = H_j(x_1, x_2, x_3) + (r^2 - R^2)r\frac{\partial\psi_0(x_1, x_2, x_3)}{\partial r\partial x_j}$$
$$H_j = -2\mu x_j\psi_0 + r^2\frac{\partial\psi_0}{\partial x_j} + x_j r(1-2\mu)\frac{\partial\psi_0}{\partial r} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} x_k\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi_k}{\partial x_j}\right), \quad j = 1, 2, 3 \tag{1.3}$$

Можно показать [7], что $\Delta H_j = 0$.

Располагая формулой для $p_{\nu j}$ найдем

$$\sigma_r = p_{\nu 1}\cos\varphi\sin\theta + p_{\nu 2}\sin\varphi\sin\theta + p_{\nu 3}\cos\theta$$
$$\tau_{r\theta} = p_{\nu 1}\cos\varphi\cos\theta + p_{\nu 2}\sin\varphi\cos\theta - p_{\nu 3}\sin\theta$$
$$\tau_{r\varphi} = -p_{\nu 1}\sin\varphi + p_{\nu 2}\cos\varphi$$

или после очевидных преобразований

$$
\begin{aligned}
& r\sigma_r = \psi_1^*(r,\theta,\varphi) + (r^2 - R^2) r\psi_0''(r,\theta,\varphi) \\
& r\tau_{r\theta} = \psi_2^*(r,\theta,\varphi) + (r^2 - R^2) r [r^{-1} \dot\psi_0'(r,\theta,\varphi)]' \\
& r\tau_{r\varphi} = \psi_3^*(r,\theta,\varphi) + (r^2 - R^2) r [(r\sin\theta)^{-1} \psi_0'(r,\theta,\varphi)]' \\
& \psi_1^* = H_1 \cos\varphi \sin\theta + H_2 \sin\varphi \sin\theta + H_3 \cos\theta \\
& \psi_2^* = H_1 \cos\varphi \cos\theta + H_2 \sin\varphi - H_3 \sin\theta
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

$$
\psi_3 = -H_1 \sin\varphi + H_2 \cos\varphi \tag{1.5}
$$

(штрих означает производную по переменной r, точка – по переменной θ и запятая – по переменной φ). Если теперь ввести функцию

$$
\psi_4^* = H_1 \cos\varphi + H_2 \sin\varphi
$$

и комплексную комбинацию

$$
\psi_l^* = \psi_4^* + i\psi_3^*
$$

то можно убедиться, что ψ_l^* удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$
\Delta\psi_l^* - [\psi_l^* - 2i(\psi_l^*)^{\cdot}] r^{-2} \operatorname{cosec}^2\theta = 0 \tag{1.6}
$$

Можно также показать, что функции ψ_j^* $(j = 1, 2, 3)$ выражаются через решение уравнения (1.6) по формулам

$$
\begin{aligned}
& 2\psi_1^* = (\psi_l^* + \overline{\psi_l^*}) \sin\theta + H_3 \cos\theta \\
& 2\psi_2^* = (\psi_l^* + \overline{\psi_l^*}) \cos\theta - H_3 \sin\theta \\
& 2i\psi_3^* = \psi_l^* - \overline{\psi_l^*} (\Delta H_3 = 0)
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

а определив их, найдем и гармоническую функцию ψ_0.

Действительно, введем вектор-функции H, ψ^* с компонентами соответственно H_1, H_2, H_3 и $\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*$. Пользуясь формулой (1.3) для H_j, подсчитаем их производные по переменной x_j. В результате найдем

$$
-\operatorname{div} H = 2[r(r\psi_0')' - 2(1-2\mu) r\psi_0' - 2(1+\mu)\psi_0] \tag{1.8}
$$

С другой стороны, обратив формулы (1.5) относительно H_j, установим равенство $\operatorname{div} H = \operatorname{div}\psi^*$, которое вместе с (1.8) дает уравнение для определения ψ_0.

2. Постановка задачи и построение разрывного решения.

Будем считать, что в неограниченной упругой среде с модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона μ имеется сферический разрез радиуса R с центром сферы в начале координат $r = 0$, $\theta = 0$, $\varphi = 0$, причем разрез занимает часть сферы: $0 \leqslant \theta \leqslant \omega$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Упругая среда произвольно загружена и распределение напряжений в ней, когда разрез отсутствует, известно, т.е.

$$
\sigma_r = -q_1(r,\theta,\varphi), \quad \tau_{r\theta} = -q_2(r,\theta,\varphi), \quad \tau_{r\varphi} = -q_3(r,\theta,\varphi) \tag{2.1}
$$

Задача состоит в нахождении распределения напряжений в упругой среде при наличии разреза и, в частности, в отыскании коэффициентов интенсивности напряжений у краев разреза.

Искомое поле напряжений строим в виде

$$
\sigma_r = \sigma_r^* - q_1, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^* - q_2, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}^* - q_3 \tag{2.2}
$$

где напряжения, помеченные звездочкой, строятся по формулам (1.4) и (1.5) и должны учитывать разрывность поля смещения при переходе через разрез. Чтобы обеспечить эту разрывность, необходимо построить разрывные решения уравнения (1.6) и гармонического уравнения $\Delta H_3 = 0$ с разрывами первого рода на разрезе $r = R$ с заданными скачками искомых функций и их нормальных (к линии разрывов) производных, т.е.

$$[H_3],\ \ [H_3'],\ \ [\psi_i^*],\ \ [\psi_i^{*\prime}]$$
$$[F] = F(R-0,\theta,\varphi) - F(R+0,\theta,\varphi) \tag{2.3}$$

Для построения таких разрывных решений к указанным уравнениям применяем преобразование Фурье по полярному углу

$$H_{3n}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_3(r,\theta,\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi,\quad n = 0, \pm 1,\ \pm 2, \ldots \tag{2.4}$$

затем преобразование Лежандра по переменной θ

$$H_{3nk}(r) = \int_0^{\pi} \sin\theta\, P_k^{(n)}(\cos\tau) H_{3n}(r,\theta)d\theta \tag{2.5}$$

и, наконец, интегральное преобразование Меллина по обобщенной схеме [8]. Обращая полученные трансформанты Меллина, затем Лежандра по формуле

$$H_{3n}(r,\theta) = \sum_{k=|n|}^{\infty} H_{3nk}(r)\,\sigma_{k,|n|}P_k^{|n|}(\cos\theta)$$
$$2\sigma_{k,m} = (k-m)!\ [(k+m)!]^{-1}(2k+1) \tag{2.6}$$

для трансформант Фурье искомых разрывных решений получим

$$H_n(r,\theta) = R^2\ \{\int \sin\tau K_n^*(r,R,\theta,\tau)[H_n'(R,\tau)]d\tau - \frac{\partial}{\partial R}\int \sin\tau K_n^*(r,R,\theta,\tau)[H_n(R,\tau)]d\tau \tag{2.7}$$

и аналогичное выражение для $\psi_{in}^*(r,\theta)$, в котором K_n^* должно быть заменено на K_{n+1}^*, где

$$K_m^*(r,R,\theta,\tau) = \sum_{k=|m|}^{\infty} \sigma_{k,|m|}\Psi_k(r,R)P_k^{|m|}(\cos\theta)P_k^{|m|}(\cos\tau)$$
$$(2k+1)\Psi_k(r,R) = r^kR^{-k},\quad r < R;\ \ (2k+1)\Psi_k(r,R) = R^{k+1}r^{-k-1},\ r > R \tag{2.8}$$

Здесь и всюду далее интегрирование по τ ведется от $\tau = 0$ до $\tau = \omega$.

Видно, что для определения трансформант Фурье искомых напряжений σ_r^*, $\tau_{r\theta}^*$, $\tau_{r\varphi}^*$ по формулам (1.4) и (1.5), записанным в трансформантах Фурье, необходимо найти трансформанты скачков функций ψ_i^*, H_3 и их производных. Эти скачки получим из условия отсутствия напряжений (2.2) на берегах разреза $r = R \mp 0$, т.е.

$$\sigma_r^*|_{r=R\mp 0} = q_1,\quad \tau_{r\theta}^*|_{r=R\mp 0} = q_2,\quad \tau_{r\varphi}^*|_{r=R\mp 0} = q_3$$

которое в трансформантах запишется так:

$$\sigma_{rn}^*(R\mp 0,\theta) = q_{1n}(\theta),\quad \tau_{\theta n}^*(R\mp 0,\theta) = q_{2n}(\theta),$$
$$\tau_{\varphi n}'(R\mp 0,\theta) = q_{3n}(\theta),\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \omega,\quad n = 0, \pm 1,\ \pm 2, \ldots \tag{2.9}$$

На основании формул (1.4) отсюда непосредстьенно следует, что $[\psi_{jn}^*(R,\theta)] = 0$ ($j = 1, 2, 3$), и потому в силу формул (1.5)

$$[H_n(R,\theta)] = 0,\quad [\psi_{in}^*(R,\theta)] = 0 \tag{2.10}$$

Следовательно, формула (2.7) и аналогичная ей формула для $\psi^*_{in}(r, \theta)$ существенно упрощаются и принимают

$$H_n(r, \theta) = R^2 \int \sin\tau K^*_n(r, R, \theta, \tau)[H'_n(R, \tau)]\,d\tau$$
$$\psi^*_{in}(r, \theta) = R^2 \int \sin\tau K^*_{n+1}(r, R, \theta, \tau)[\psi^{*\prime}_{in}(R, \tau)]\,d\tau \qquad (2.11)$$

3. Сведение поставленной задачи к интегральному уравнению. Из изложенного в разделе 2 видим, что для нахождения функций H_3 и ψ^*_i, а по ним согласно формулам (1.7) и ψ^*_j $(j = 1, 2, 3)$ достаточно найти скачки $[H'_n(R, \tau)]$ и $[\psi^{*\prime}_{in}(R, \tau)]$. Для их определения следует реализовать условия (2.9), что приводит на основании (1.4) и (2.10) к равенствам

$$\psi^*_{in}(R-0, \theta) = q_{jn}(\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \omega, \quad j = 1, 2, 3, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad (3.1)$$

Удобно отдельно рассмотреть случай положительных значений параметра $n = m$, $m > 0$ и отрицательных $n = -m$, $m > 0$ и ввести следующие обозначения для неизвестных скачков:

$$[\psi^{*\prime}_{in}(R, \tau)]_{n=m} = \chi^+_{m+1}(\tau), \quad [H'_n(R, \tau)]_{n=m} = \chi^0_m(\tau)$$
$$[\psi^{*\prime}_{in}(R, \tau)]_{n=-m} = \chi^-_{m-1}(\tau), \quad [H'_n(R, \tau)]_{n=-m} = \chi^*_m(\tau), \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.2)$$

Воспользовавшись далее формулами (1.7), (2.11) и выполнив очевидные линейные комбинации с полученными уравнениями, придем к равенствам

$$I^+_{m+1} \equiv \int \sin\tau S_{m+1}(\theta, \tau)\chi^+_{m+1}(\tau)d\tau = U_m(\theta) + iq_{3,m}(\theta), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$
$$I^-_{m-1} \equiv \int \sin\tau S_{m-1}(\theta, \tau)\chi^-_{m-1}(\tau)d\tau = U_{-m}(\theta) + iq_{3,-m}(\theta), \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.3)$$
$$I^0_m \equiv \int \sin\tau S_m(\theta, \tau)\chi^0_m(\tau)d\tau = V_m(\theta), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$
$$I^*_m \equiv \int \sin\tau S_m(\theta, \tau)\chi^*_m(\tau)d\tau = V_{-m}(\theta), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь

$$U_n(\theta) = \sin\theta\, q_{1,n}(\theta) + \cos\theta\, q_{2,n}(\theta)$$
$$V_n(\theta) = \cos\theta\, q_{1,n}(\theta) - \sin\theta\, q_{2,n}(\theta) \qquad (3.4)$$

$$S_m(\theta, \tau) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\sigma_{k,m}}{2k+1} P^m_k(\cos\theta)P^m_k(\cos\tau), \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.5)$$

Если учесть вторую формулу из (3.4), то можно убедиться, что решения третьего и четвертого уравнения из (3.3) связаны зависимостью $\overline{\chi^*_m(\tau)} = \chi^0_m(\tau)$. Обращая трансформанты Фурье (2.11) и принимая во внимание соотношения (3.2) и (2.8), находим

$$H(R-0, \theta, \varphi) = R\{I^0_0 + 2\operatorname{Re}\sum_{m=1}^{\infty} I^0_m e^{im\varphi}\}$$

$$\psi^*_i(R-0, \theta, \varphi) = R\left\{\sum_{m=0}^{\infty} I^+_{m+1}e^{im\varphi} + \sum_{m=1}^{\infty} I^-_{m-1}e^{-im\varphi}\right\} \qquad (3.6)$$

Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений необходимо знать распределение напряжений на продолжении сферического разреза, т.е. $\sigma_r(R, \theta, \varphi)$, $\tau_{r\theta}(R, \theta, \varphi)$, $\tau_{r\varphi}(R, \theta, \varphi)$ при $\theta > \omega$. Согласно (1.4), например $\sigma_r(R, \theta, \varphi) = R^{-1}\psi^*_1(R-0, \theta, \varphi)$, и на основании соотношений (1.7), (3.6) имеем

$$\sigma_r(R,\theta,\varphi) = \cos\theta I_0^0 + \mathrm{Re}\left\{2\cos\theta \sum_{m=1}^{\infty} e^{im\varphi} I_m^0 + \right.$$

$$\left. + \sin\theta \left[\sum_{m=0}^{\infty} e^{im\varphi} I_{m+1}^{+} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{im\varphi} I_{m+1}^{+} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-im\varphi} I_{m-1}^{-} \right]\right\}, \quad \theta > \omega \tag{3.7}$$

Если будут решены интегральные уравнения (3.3), то при помощи этой формулы можно подсчитать коэффициент интенсивной нормальных напряжений. Чтобы решить указанные уравнения, достаточно построить решения такого уравнения:

$$\int \sin\tau S_m(\theta,\tau)\chi_m(\tau)d\tau = f_m(\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \omega \tag{3.8}$$

4. Решение интегрального уравнения задачи в классе интегрируемых функций. Попытаемся просуммировать ряд (3.5), определяющий ядро интегрального уравнения (3.8), для чего установим связь между присоединенными функциями Лежандра $P_k^m(x)$ и многочленами Якоби $P_k^{\alpha,\beta}(x)$. На основании формулы 8.704 [9] имеем

$$P_k^m(x) = \frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-k,\ k+1;\ 1-m;\ \frac{1-x}{2}\right) \tag{4.1}$$

Сопоставляя эту формулу с формулой 8.902(1) [9] и полагая $x = \cos\theta$, получаем нужную связь

$$P_k^{-m,m}(\cos\theta) = [\Gamma(k+1-m)/k!]\ \mathrm{tg}^m \tfrac{1}{2}\theta\, P_k^m(\cos\theta) \tag{4.2}$$

Если теперь в формулу 5.14.4(1) [10] положить $\alpha = -m$, $\beta = m$, $t = 1$, $x = \cos\theta$, $y = \cos\tau$ и учеть выражение (3.5), (4.2), а затем воспользоваться известным рядовым представлением функции Аппеля F_4 с целью исключить там множитель $\Gamma(1-m)$, то получим

$$S_m(\theta,\tau) = \frac{(\frac{1}{2})_m \sin^{2m}\frac{1}{2}\theta \sin^{2m}\frac{1}{2}\tau}{m!\,2\mathrm{tg}^m\frac{1}{2}\theta\, \mathrm{tg}^m\frac{1}{2}\tau} \times$$

$$\times F_4(\tfrac{1}{2}+m,\ 1+m;\ 1+m,\ 1+m;\ \sin^2\tfrac{1}{2}\theta\sin^2\tfrac{1}{2}\tau,\ \cos^2\tfrac{1}{2}\theta\cos^2\tfrac{1}{2}\tau) \tag{4.3}$$

В известной формуле приведения ([11], с. 231) примем $\alpha = \frac{1}{2}+m$, $\beta = \frac{1}{2}+m$ и $x = -\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta$, $y = -\mathrm{ctg}^2\frac{1}{2}\tau$ в случае $\theta < \tau$ и $x = -\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\tau$, $y = -\mathrm{ctg}^2\frac{1}{2}\theta$ в случае $\tau < \theta$. Тогда последний сомножитель с формуле (4.3) можно представить в виде

$$\frac{F(\frac{1}{2}+m,\ \frac{1}{2};\ 1+m;\ \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\theta\,\mathrm{ctg}^2\frac{1}{2}\tau)}{(\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\tau)^{2m+1}}, \quad \theta < \tau$$

При $\theta > \tau$ в этом выражении надо поменять местами переменные θ и τ.

Рассмотрим разрывный интервал Вебера – Сонина

$$W_m(\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\theta,\ \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\tau) = \int_0^{\infty} J_m(s\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\theta)J_m(s\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\tau)ds =$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})_m \mathrm{tg}^m\frac{1}{2}\theta}{m!\,\mathrm{tg}^{m+1}\frac{1}{2}\tau} F\left(m+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\ m+1;\ \frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\theta}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\tau}\right), \quad \theta < \tau \tag{4.4}$$

Здесь использована формула 6.574(1) [9].

Чтобы получить представление интеграла при $\theta > \tau$, следует воспользоваться формулой 6.574(3) [9]. Сопоставив формулу (4.4) с предыдущей, получим

$$S_m(\theta,\ \tau) = \tfrac{1}{2}\sec\tfrac{1}{2}\theta\sec\tfrac{1}{2}\tau W_m(\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\theta, \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\tau), \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.5}$$

Учитывая последнее, интегральное уравнение (3.8) при помощи замен

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta = r, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\tau = \rho, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega = a$$

$$2(1+\rho^2)^{-3/2}\chi_m(2\operatorname{arctg}\rho) = X_m(\rho) \tag{4.6}$$

$$(1+r^2)^{-1/2} f_m(2\operatorname{arctg} r) = F_m(r)$$

приведем к интегральному уравнению

$$\int_0^1 W_m(x,y)\,y\,X_m(ay)\,dy = \frac{1}{a}F_m(ax), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.7}$$

Последнее допускает точное решение либо в виде квадратур, либо в виде ряда по многочленам Якоби [8]. Для целей данной работы предпочтительнее решение в виде ряда, которое можно получить методом ортогональных многочленов [8] в таком виде:

$$X_m^0(ay) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{mk}\frac{y^m}{\sqrt{1-y^2}}P_k^{m,\,-1/2}(1-2y^2)$$

$$\chi_{mk} = \frac{4(k)!(m+\tfrac{1}{2}+2k)}{a\Gamma^2(k+\tfrac{1}{2})}\int_0^1 \frac{F_m(ax)x^{m+1}P_k^{m,\,-1/2}(1-2x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.8}$$

Подставив построенные решения в (3.9) найдем коэффициент интенсивности путем предельного перехода

$$N_1(\varphi) = \lim_{\theta\to\omega+0}\sigma_r(R,\theta,\varphi)\sqrt{\theta-\omega} \tag{4.9}$$

Однако выполняя выкладки, аналогичные проделанным ранее в [5],придем к выводу, что при любом загружении упругой среды $N_1(\varphi) = 0$. Это и показывает, что полученное решение (4.8) уравнения (3.10) или (4.7) в классе интегрируемых функций не позволяют указать истинное распределение напряжений (3.7) при $\theta > \omega$. Поэтому так же, как это делалось ранее [5], необходимо расширить класс искомых решений, включив в него решения с неинтегрируемыми особенностями при $\theta = \omega$.

5. Построение решения неинтегрального уравнения в классе неинтегрируемых функций и вычисление коэффициента интенсивности напряжений. Будем строить решение интегрального уравнения (4.7) в виде

$$X_m(ay) = X_m^0(ay) + C_m\frac{y^m}{(1-y^2)^{3/2}} \tag{5.1}$$

Руководствуясь теми же соображениями, что и ранее [5], найдем коэффициенты C_m, которые в рассматриваемом случае будут иметь вид

$$C_m = \frac{\chi_{m0}}{2m+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{F_m(ax)x^{m+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5.2}$$

Решение интегрального уравнения (4.7), даваемого формулами (5.1) и (4.9), подставленные в (3.7) с учетом замен (4.6) уже будет давать правильное распределение напряжений (3.7) при $\theta > \omega$. При этом следует учесть, что корневую бесконечность в напряжении (3.7) будет давать только второе слагаемое в (5.1). Чтобы реализовать предельный переход (4.9) следует воспользоваться соотношением

$$\int \frac{\sin\tau S_l(\theta,\tau)\operatorname{tg}^l\tfrac{1}{2}\tau\,d\tau}{2\cos^3\tfrac{1}{2}\tau R^3(\omega,\tau)} = \frac{\operatorname{tg}^{2l-1}\tfrac{1}{2}\omega\operatorname{tg}^{-l}\tfrac{1}{2}\theta}{\cos\tfrac{1}{2}\theta R(\theta,\omega)},$$

$$\theta > \omega, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \quad R(\omega,\tau) = \sqrt{\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\omega - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\tau} \tag{5.3}$$

вытекающем из соотношения (4.3) работы [5] с учетом замен переменных (4.6). В результате указанного предельного перехода будем иметь

$$N_1(\varphi) = -\operatorname{tg}^{3/2} ½\,\omega \{ \cos\omega\, \chi^0_{00} + \operatorname{Re}\,[2\cos\omega \sum_{m=1}^{\infty} \frac{l^{im\varphi}\,\chi^0_{m0}}{2m+1} +$$

$$+ \sin\omega\, (\sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{i(l-1)\varphi}}{2l+1}\,\chi^+_{l0} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-i(l+1)\varphi}}{2l+1}\,\chi^-_{l0})]\} \tag{5.4}$$

Согласно (5.2), (4.6), (3.3), (3.4) имеют место формулы

$$\chi^0_{m0} = \frac{2m+1}{\pi \operatorname{tg}½\omega} \int_0^{\omega} \frac{V_m(\theta) C^{m+1}(\theta) d\theta}{\cos ½\theta\, R(\omega, \theta)}; \qquad C(\theta) = \frac{\operatorname{tg}½\theta}{\operatorname{tg}½\omega}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\chi^+_{l0} = \frac{2l+1}{\pi \operatorname{tg}½\omega} \int_0^{\omega} \frac{U_{l-1}(\theta) + iq_{3,l-1}(\theta)}{\cos ½\theta\, R(\omega, \theta)}\, C^{l+1}(\theta) d\theta, \quad l = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.5}$$

$$\chi^-_{l0} = \frac{2l+1}{\pi \operatorname{tg}½\omega} \int_0^{\omega} \frac{U_{-(l+1)}(\theta) + iq_{3,-(l+1)}(\theta)}{\cos ½\theta\, R(\omega, \theta)}\, C^{l+1}(\theta) d\theta, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Преобразуем полученную формулу (5.4) к более удобному виду. Представляя (5.5) в (5.4) и расписывая содержащуюся в (5.4) действительную часть комплексного выражения в виде суммы сопряженных, получим

$$N_1(\varphi) = -\frac{\operatorname{tg}^{1/2} ½\omega}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{\Omega(\theta, \varphi) d\theta}{\cos ½\theta\, R(\omega, \theta)},$$

$$\Omega(\theta, \varphi) = \cos\omega\, C(\theta) \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{im\varphi} V_m(\theta) C^m(\theta) +$$

$$+ ½\sin\omega\, \{ C^2(\theta) [U_0(\theta) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} U_m(\theta) C^{|m|}(\theta) + \tag{5.6}$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} U_m(\theta) C^{|m|}(\theta) - U_0(\theta) \}$$

Воспользовавшись теоремой о свертке для конечного преобразования Фурье (например, [8], с. 316) и формулой 1.447(3) [9], с учетом (3.4) получим

$$N_1(\varphi) = -\frac{\operatorname{tg}^{1/2} ½\omega}{2\pi^2} \int_0^{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{C(\theta)[1 - C^2(\theta)][\cos\omega\, V(\theta, \psi) + \sin\omega\, U(\theta, \psi) \cos(\varphi - \psi)] d\theta d\psi}{\cos ½\theta\, R(\omega, \theta)\, \mathcal{C}(\theta, \varphi - \psi)} \tag{5.7}$$

где

$$U(\theta, \psi) = \sin\theta\, q_1(\theta, \psi) + \cos\theta\, q_2(\theta, \psi)$$
$$V(\theta, \psi) = \cos\theta\, q_1(\theta, \psi) - \sin\theta\, q_2(\theta, \psi) \tag{5.8}$$
$$\mathcal{C}(\theta, \Phi) = 1 - 2C(\theta)\cos\Phi + C^2(\theta)$$

Получим еще формулы для коэффициентов интенсивности касательных напряжений

$$N_2(\varphi) = \lim_{\theta \to \omega + 0} \tau_{r\theta}(R, \theta, \varphi)\sqrt{\theta - \omega}$$
$$N_3(\varphi) = \lim_{\theta \to \omega + 0} \tau_{r\varphi}(R, \theta, \varphi)\sqrt{\theta - \omega} \tag{5.9}$$

Согласно (1.4) содержащиеся здесь напряжения на продолжении трещины будут выражаться так:

$$\tau_{r\theta}(R,\theta,\varphi)=R^{-1}\psi_2^*(R-0,\ \theta,\ \varphi)$$
$$\tau_{r\theta}(R,\theta,\varphi)=R^{-1}\psi_3^*(R-0,\theta,\varphi),\quad \theta>\omega \tag{5.10}$$

Использование формул (1.7), (3.6) и выполнение выкладок, аналогичных проделанным при получении (5.7), приводят к следующему результату:

$$N_2(\varphi)=-\frac{\operatorname{tg}^{1/2}\frac{1}{2}\omega}{2\pi^2}\int_0^{\omega}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{C(\theta)[1-C^2(\theta)]\,[\cos\omega U(\theta,\psi)\cos(\varphi-\psi)-\sin\omega V(\theta,\psi)]d\theta d\psi}{\cos\frac{1}{2}\theta R(\omega,\theta)\ C(\theta,\varphi-\psi)}$$

$$N_3(\varphi)=-\frac{\operatorname{tg}^{1/2}\frac{1}{2}\omega}{2\pi^2}\int_0^{\omega}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{C(\theta)[1-C^2(\theta)]\cos(\varphi-\psi)q_3(\theta,\psi)d\theta d\psi}{\cos\frac{1}{2}\theta R(\omega,\theta)C(\theta,\ \varphi-\psi)} \tag{5.11}$$

6. Некоторые частные случаи загружения упругой среды. Начнем со случая всестороннего растяжения упругой среды на бесконечности равномерной нагрузки интенсивности p. В этом случае

$$q_1(\theta,\varphi)=-p,\quad q_2(\theta,\varphi)=0,\quad q_3(\theta,\varphi)=0$$

и потому, согласно (5.8)

$$U(\theta,\varphi)=-p\sin\theta,\quad V(\theta,\varphi)=-p\cos\theta \tag{6.1}$$

Следовательно в разбиваемом случае $N_3(\varphi)=0$, а для $N_1(\varphi)=N_1$, $N_2(\varphi)=N_2$ согласно (5.7), (5.11) и с учетом формул 3.613 [9] получим выражения

$$N_1=\frac{1}{\pi\operatorname{tg}^{1/2}\frac{1}{2}\omega}\left[\cos\omega J^*(\omega)+\frac{2\sin\omega J(\omega)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega}\right] \tag{6.2}$$

$$N_2=\frac{1}{\pi\operatorname{tg}^{1/2}\frac{1}{2}\omega}\left[\frac{2\cos\omega J(\omega)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega}-\sin\omega J^*(\omega)\right]$$

где

$$J(\omega)=\int\frac{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta\,d\theta}{R(\omega,\ \theta)},\quad J^*(\omega)=\int\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\cos\theta\,d\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta R(\omega,\theta)} \tag{6.3}$$

причем последний интеграл с использованием равенства $\cos\theta=\cos^2\frac{1}{2}\theta-\sin^2\frac{1}{2}\theta$ пр приводится к виду

$$J^*(\omega)=\int\frac{\sin\frac{1}{2}\theta\,d\theta}{R(\omega,\theta)}-J(\omega)$$

Фигурирующие здесь интегралы заменой $\theta=2\operatorname{arctg}x$ приводятся к табличным. В результате получаем

$$J(\omega)=\omega-\sin\omega,\quad J^*(\omega)=2\sin\omega-\omega \tag{6.4}$$

и, следовательно, вместо (6.2) будем иметь выражения

$$N_1=\frac{p[\omega\cos\omega+2(\omega-\sin\omega)]}{\pi\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega}$$

$$N_2=\frac{2}{\pi}\frac{p\cos\frac{1}{2}\omega}{\operatorname{tg}^{3/2}\frac{1}{2}\omega}(\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega-2\sin\tfrac{1}{2}\omega)$$

Рассмотрим еще случай осевого растяжения на бесконечности по направлению ν равномерной нагрузкой интенсивности p. Введем следующие обозначения для направляющих косинусов:

$$\cos(\nu,x)=l_p,\ \cos(\nu,y)=m_p,\quad \cos(\nu,z)=n_p \tag{6.5}$$

Используя известные формулы преобразования компонентов тензора напряжений при повороте осей координат устанавливаем, что в разбиваемом случае

$$q_1(\theta,\varphi) = -p[\sin^2\theta(l_p^2\cos\varphi + m_p^2\sin^2\varphi + l_p m_p \sin 2\varphi) + n_p \sin 2\theta\,(l_p\cos\varphi + m_p\sin\varphi)]$$

$$2q_2(\theta,\varphi) = -p[\sin 2\theta(l_p^2\cos^2\varphi + m_p^2\sin^2\varphi - n^2{}_p + l_p m_p\sin 2\varphi) + 2l_p n_p\cos 2\theta\cos\varphi +$$
$$+ 2m_p n_p(\cos^2\theta\cos\varphi - \sin^2\theta\sin\varphi)]$$

$$2q_3(\theta,\varphi) = -p[\sin 2\varphi(m_p^2\sin\theta - l_p^2\cos\theta) + l_p m_p\sin\theta\cos 2\varphi + n_p\cos\theta\,(m_p - l_p\sin\varphi)] \qquad (6.6)$$

При этом согласно (5.8)

$$U(\theta,\varphi) = -p[\tfrac{1}{2}(l_p^2 + m^2{}_p)\sin\theta - n_p^2\sin\theta\cos^2\theta + \tfrac{1}{2}(l_p^2 - m_p^2)\sin\theta\cos 2\varphi + l_p m_p\sin\theta\sin 2\varphi +$$
$$+ n_p(l_p\cos\theta + m_p\cos^3\theta) + n_p m_p\sin^2\theta\cos\theta\sin\varphi],$$

$$V(\theta,\varphi) = -p[n_p^2\sin^2\theta\cos\theta + n_p\sin\theta(l_p - m_p\cos^2\theta)\cos\varphi + n_p m_p\sin\theta\cos^2\theta\sin\theta] \qquad (6.7)$$

Подставим эти выражения в формулу (5.7). Последующее использование интегралов 3.613 [9] приводит к однократной квадратуре для коэффициента интенсивности $N_1(\varphi)$, причем интегралы имеют такую же структуру, что и (6.3), и той же заменой приводятся к табличным [9], т.е. можно получить:

$$2\pi p^{-1}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\omega N_1(\varphi) = 2n_p^2 J_1(\omega)\cos\omega + \sin\omega\,\mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}\omega[2(l_p^2 + m_p^2 - n_p^2)J(\omega) +$$
$$+ n_p^2 J_3(\omega)] + n_p m_p\,\mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}\omega[2J(\omega) - J_3(\omega)]\cos\omega\sin\varphi + n_p m_p\sin\omega\,[J_1(\omega) +$$
$$+ \mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}\omega\, J_3(\omega)](\sin\varphi - \cos\varphi) + \{2n_p\cos\omega\,\mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}\omega\,[2(l_p - m_p)J(\omega) +$$
$$+ m_p J_3(\omega)] + n_p(l_p + m_p)\sin\omega[J^*(\omega) + \mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}\omega J_1^*(\omega)]\}\cos\varphi + [J(\omega) + \mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}\omega J_4(\omega)]\times$$
$$\times \sin\omega\,\mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}\omega[(l_p^2 - m_p^2)\cos 2\varphi + 2l_p m_p\sin 2\varphi] \qquad (6.8)$$

Интегралы $J(\omega)$ и $J^*(\omega)$ даются формулами (6.4), а для остальных справедливы равенства:

$$J_1(\omega) = \int\sin^2\tau\, Q_\omega^{(1)}(\tau)\,d\tau = 8\,\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}\omega\,[\cos\omega(\cos^4\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{2}{3}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega + \cos^2\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{5}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega) +$$
$$+ (\sin^2\tfrac{1}{2}\omega - \cos\omega)(\tfrac{1}{3}\cos^2\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{5}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{5}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega]$$

$$Q_\omega^{(k)}(\tau) = \mathrm{tg}^k\tfrac{1}{2}\tau\cos\tau\sec\tfrac{1}{2}\tau R^{-1}(\omega,\tau), \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

$$J_1^*(\omega) = \int Q_\omega^{(3)}(\tau)\,d\tau = 2\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\omega(\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\omega\cos\omega + \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\omega - 2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{2}\omega(\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\omega - 5)$$

$$J_3(\omega) = \tfrac{1}{2}\int\sin^2\tau\,\mathrm{tg}\tau\, Q_\omega^{(2)}(\tau)\,d\tau = 16\,\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\tfrac{1}{2}\omega(\cos^4\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{2}{3}\cos^2\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{5}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega -$$
$$- \cos^2\tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{2}{5}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{5})$$

$$J_4(\omega) = \tfrac{1}{2}\int\mathrm{tg}\tau\, Q_\omega^{(4)}(\tau)\,d\tau = 2\,[\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\omega(\sin^2\tfrac{1}{2}\omega - 2\cos^2\tfrac{1}{2}\omega + \omega\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{2} + \cos^{-2}\tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{3}{4}\omega]$$

$$J_5(\omega) = \tfrac{1}{2}\int\sin\tau\sin 2\tau\, Q_\omega^{(3)}(\tau)\,d\tau = 8\,\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}\omega\{\cos\omega(\cos^4\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{2}{3}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\cos^2\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{5}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega) +$$
$$+ \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\omega[(\sin^2\tfrac{1}{2}\omega - 2\cos\omega)(\tfrac{1}{3}\cos^2\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{5}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{5}(2\cos\omega - 1)]\} +$$
$$+ \tfrac{23}{15}\,\mathrm{tg}^5\tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{7}{3}\,\mathrm{tg}^3\tfrac{1}{2}\omega\sin^{-2}\tfrac{1}{2}\omega + \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\omega\sin^{-4}\tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}\omega$$

Таким образом, при заданном загружении коэффициент интенсивности нормальных напряжений тоже выражается через элементарные функции. Это справедливо и для коэффициентов интенсивности касательных напряжений (5.9). Действительно, подставив (6.7) в (5.11), получим для них формулы, аналогичные (6.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г.Я.* Об одном новом подходе к задачам о концентрации упругих напряжений возле трещин // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 148–156.
2. *Бойко Л.Т., Зюзин В.А., Моссаковский В.И.* Сферический разрез в упругом пространстве // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181. № 6. С. 1357–1360.
3. *Капшивый А.А., Ногин Н.В.* К решению основных задач осесимметричной теории упругости для пространства со сферическим разрезом // Математическая физика. Киев: Наук. думка. 1971. Вып. 9. С. 38–47.
4. *Прохорова Н.Л., Соловьев Ю.И.* Осесимметричная задача для упругого полупространства со сферическим разрезом // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 692–698.
5. *Мартыненко М.А., Улитко А.Ф.* Напряженное состояние вблизи вершины сферического разреза в неограниченной упругой среде // Прикл. механика. 1978. Т. 14. № 9. С. 15–23.

6. *Треффтц Е.* Математическая теория упругости. М.; Л., Гостехиздат, 1934. 172 с.
7. *Чичинадзе Р.К.* О краевых задачах теории упругости для шара // Тр. Тбил. мат. ин-та, 1990. Т. 96. С. 97–122.
8. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
10. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.М.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция, функция Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.

Одесса

Поступила в редакцию
24. VI. 1991