

УДК 539.3

© 1992 г. С.А. Назаров, О.Р. Полякова

**ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГИХ ТЕЛ  
С ТОНКИМИ ПЕРЕМЫЧКАМИ**

Тело имеет тонкую перемычку, если граница полости в нем приближена к его внешней поверхности. Определяется асимптотика напряженно-деформированного состояния плоских и пространственных тел с перемычками; малым параметром служит толщина перемычки. Около перемычки возникает явление пограничного слоя, которое в двумерном случае описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающей явное решение. Оказывается, что напряженно-деформированное состояние существенно зависит как от величины, характеризующей степень утоньшения перемычки, так и от глобальной геометрической структуры тел. Анализ асимптотических формул показывает, что разрушение перемычки не может быть квазистатическим процессом (нарушается энергетический баланс Гриффитса). В трехмерном случае пограничный слой описывается эллиптической системой уравнений на плоскости.

**1. Постановка двумерной задачи.** Пусть  $G_0$  и  $G$  — области на плоскости, ограниченные простыми гладкими замкнутыми контурами  $\Gamma_0$  и  $\Gamma$ , причем один контур касается другого в начале координат  $0$  и  $G_0 \subset G$ . Характерный размер области  $G_0$  сведем к единичному и определим (безразмерные) декартовы координаты  $x = (x_1, x_2)$ , направив ось  $Ox_1$  по касательной к  $\Gamma_0$ , а ось  $Ox_2$  — вовнутрь  $G_0$ . Пусть  $0 < \epsilon$  — малый параметр и  $G_\epsilon = \{x: (x_1, x_2 - \epsilon) \in G_0\}$ ,  $\Gamma_\epsilon = \partial G_\epsilon$ ,  $\Omega_\epsilon = G \setminus G_\epsilon$  (см. фиг. 1). Предположим, что в малой окрестности  $V$  точки  $0$  область  $\Omega_\epsilon$  задается соотношением

$$-h_-(x_1) < x_2 < \epsilon + h_+(x_1) \tag{1.1}$$

$$h_\pm(x_1) = x_1^{2m} (a_\pm + O(x_1)), \quad x_1 \rightarrow 0 \tag{1.2}$$

В (1.1), (1.2)  $h_\pm$  — гладкие функции.  $h = h_+ + h_- > 0$ ,  $m$  — натуральное число,  $a = a_+ + a_- > 0$ .

Целью работы является исследование асимптотики при  $\epsilon \rightarrow 0$  решения задачи о плоской деформации тела  $\Omega_\epsilon$  с тонкой перемычкой

$$\mu \nabla_x \cdot \nabla_x u(\epsilon, x) + (\lambda + \mu) \nabla_x \nabla_x \cdot u(\epsilon, x) = 0, \quad x \in \Omega_\epsilon \tag{1.3}$$

$$\sigma^{(n)}(u; \epsilon, x) = p(x), \quad x \in \Gamma, \quad \sigma^{(n)}(u; \epsilon, x) = 0, \quad x \in \Gamma_\epsilon \tag{1.4}$$

Здесь  $u = (u_1, u_2)$  — вектор смещений,  $\sigma(u)$  — тензор напряжений,  $\sigma^{(n)} = \sigma n$ ,  $n = (n_1, n_2)$  — единичный вектор внешней нормали,  $p \in C^\infty(\Gamma)$  — внешняя нагрузка.

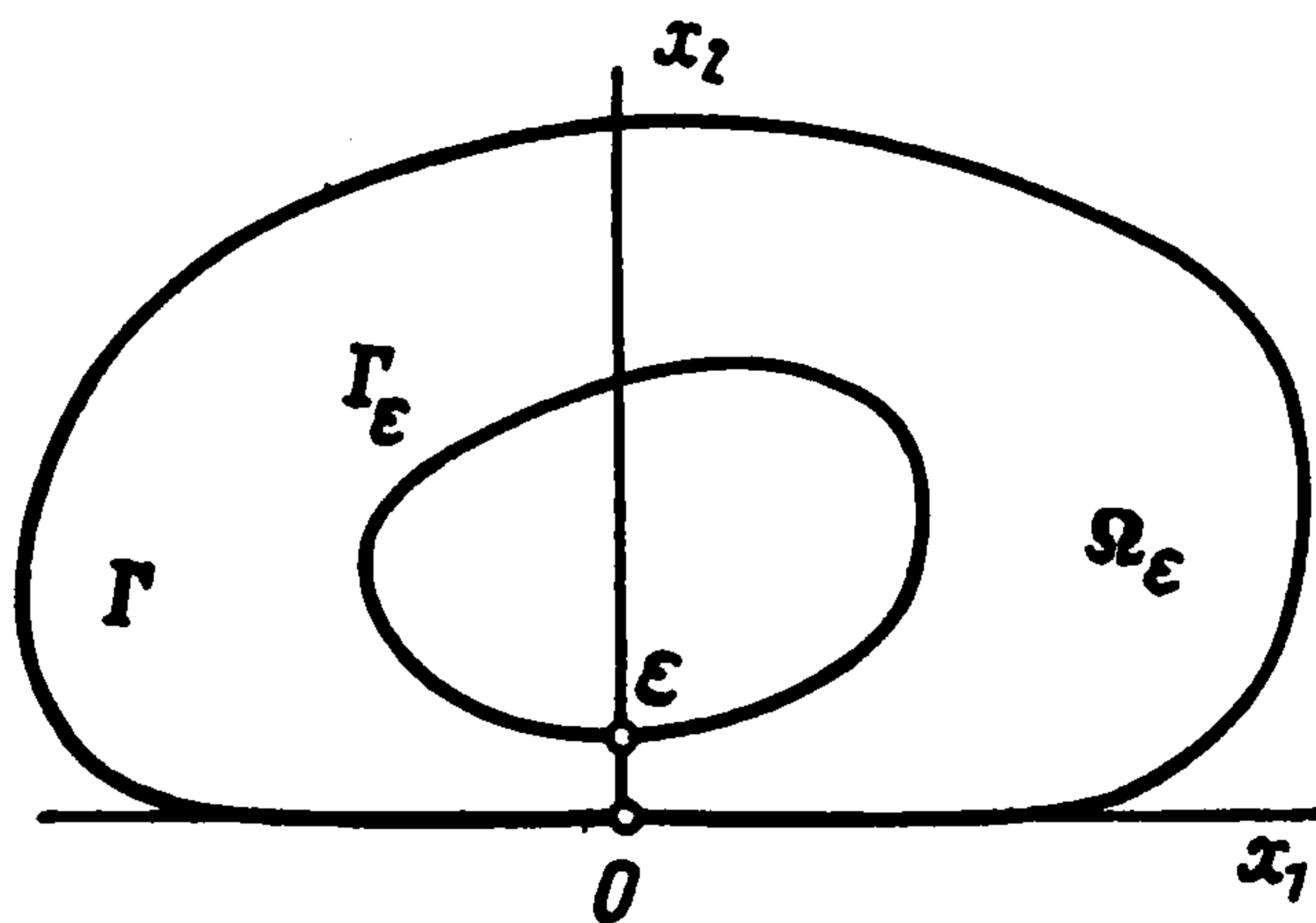
Задача о тонкой перемычке, образованной круговым отверстием, которое приближено к границе полуплоскости, изучалась в [1–3], где информация об асимптотике получалась на основе точного решения всей задачи. Далее проводится прямой асимптотический анализ, позволяющий указывать асимптотику и для неканонических областей, в которых построение явных решений затруднено. Кроме того, изучается зависимость асимптотики напряжений в перемычке от степени ее утоньшения (от показателя  $m$  в формуле (1.2)). Близкими по тематике и методам исследования являются задачи о тонкой перемычке между двумя параллельными трещинами [4, 5].

В пределе при  $\epsilon \rightarrow 0$  берега перемычки смыкаются, так что двусвязная область  $\Omega_\epsilon$  переходит в односвязную область  $\Omega_0$ , граница которой содержит особую точку  $0$ , вершину двух пиков. Вне окрестности перемычки асимптотика решения задачи (1.3),

(1.4) описывается решениями предельных задач в области  $\Omega_0$ . В перемычке возникает явление пограничного слоя. Этот пограничный слой отыскивается в разд. 2 при помощи алгоритма построения асимптотики решения задач в тонких областях [6–9] и использует "быстрые" переменные

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = \epsilon^{-\gamma} x_1, \quad \xi_2 = \epsilon^{-1} x_2, \quad \gamma = (2m)^{-1} \quad (1.5)$$

Подобная же процедура приводит и к асимптотическим разложениям предельной задачи вблизи особой точки 0 (см. разд. 3; обоснование полученного формального разложения содержится в [10, 11]). Для определения глобальной асимптотики в разд. 4 применяется метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [12, 13] и др.).



Фиг. 1

Следствия и обобщения полученных формул можно найти в разд. 5, 6. Наконец, в разд. 7 обсуждается аналогичная трехмерная задача.

2. Асимптотика решения задачи в тонкой перемычке. После перехода к переменным (1.5) оператор Лапе  $L(\nabla_x)$  из (1.3) запишется так:

$$L(\epsilon^{-\gamma} \partial_1, \epsilon^{-1} \partial_2) = \epsilon^{-2} \{ M^{(0)} \partial_2^2 + \epsilon^\alpha (M^{(11)} + M^{(12)}) \partial_1 \partial_2 + \epsilon^{2\alpha} M^{(2)} \partial_1^2 \} \quad (2.1)$$

$$M^{(0)} = \text{diag} \{ \mu, 2\mu + \lambda \}, \quad M^{(2)} = \text{diag} \{ 2\mu + \lambda, \mu \}$$

$$M_{12}^{(11)} = M_{21}^{(12)} = \mu, \quad M_{21}^{(11)} = M_{12}^{(12)} = \lambda$$

$$M_{ii}^{(11)} = M_{ii}^{(12)} = 0, \quad i = 1, 2; \quad \alpha = 1 - \gamma, \quad \partial_i = \partial / \partial \xi_i$$

Оператор из фигурных скобок в (2.1) содержит малый параметр при некоторых из старших производных. Поэтому естественно воспользоваться алгоритмом [6–9]. Сначала приведем аналогичное (2.1) разложение дифференциального оператора  $B^\pm(x, \nabla_x)$  из краевых условий (1.4). Согласно (1.1) уравнение границы в координатах  $\xi$  имеет вид

$$\xi_2 = \pm H_\pm(\epsilon, \xi_1) \quad (2.2)$$

$$H_+(\epsilon, \xi_1) = 1 + \epsilon^{-1} h_+(\epsilon^\gamma \xi_1), \quad H_-(\epsilon, \xi_1) = \epsilon^{-1} h_-(\epsilon^\gamma \xi_1).$$

Подчеркнем, что функция  $H_\pm$  ограничена в зоне  $|\xi_1| < \text{const}$ , где сейчас и исследуется асимптотика решения. Векторы внешней нормали  $n_\pm(\epsilon, \xi_1)$  к кривым (2.2) задаются формулами

$$n_\pm(\epsilon, \xi_1) = N_\pm(\epsilon, \xi_1)^{-1} (-H'_\pm(\epsilon, \xi_1), \pm 1)$$

$$N_\pm(\epsilon, \xi_1) = [1 + (H'_\pm(\epsilon, \xi_1))^2]^{1/2}; \quad H'_\pm(\epsilon, \xi_1) = \partial_1 H_\pm(\epsilon, \xi_1).$$

Следовательно

$$N_{\pm}(\epsilon, \xi_1) B^{\pm}(\epsilon^{\gamma} \xi_1, \epsilon^{-\gamma} \partial_1, \epsilon^{-1} \partial_2) = \epsilon^{-1} \{ \pm M^{(0)} \partial_2 + \epsilon^{\alpha} (\pm M^{(11)} \partial_1 - H'_{\pm} M^{(12)} \partial_2) - \epsilon^{2\alpha} H'_{\pm} M^{(2)} \partial_1 \}. \quad (2.3)$$

Асимптотику решения ищем в виде ряда

$$u(\epsilon, x) \sim \epsilon^{\tau} \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^{\alpha j} (u^j(\xi_1) + U^j(\xi_1, \xi_2)), \quad u^j = (v^j, w^j). \quad (2.4)$$

Показатель  $\tau$  из (2.4) подбирается далее. Подставим ряды (2.1), (2.3), (2.4) в уравнения (1.3), (1.4), суженные на окрестность точки  $O$ , и соберем коэффициенты при одинаковых степенях  $\epsilon$  (для упрощения вычислений удобно не учитывать зависимость функций  $H_{\pm}$  от параметра  $\epsilon$ ). В результате получим рекуррентную последовательность обыкновенных дифференциальных (по переменной  $\xi_2 \in [-H_{-}(\epsilon, \xi_1), H_{+}(\epsilon, \xi_1)]$ ) уравнений для определения функций  $U^j$  из (2.4); вектор-функции  $u^j$  пока считаются произвольными. Условия разрешимости указанных задач для  $U^k$  доставляют систему обыкновенных дифференциальных (по  $\xi_1$ ) уравнений, которым следует подчинить  $v^j$  и  $w^j$ . В дальнейшем понадобится лишь несколько членов ряда (2.4). Поэтому приведем выражения для векторов  $U^j$  только в случае, когда отличны от нуля компоненты  $v^1 \equiv v$  и  $w^0 \equiv w$ , а остальные функции  $v^j, w^j$  аннулируются

$$\begin{aligned} U_1^0 &= U_2^0 = 0; \quad U_1^1 = -\xi_2 \partial_1 w, \quad U_2^1 = 0 \\ U_1^2 &= 0, \quad U_2^2 = \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} (\frac{1}{2} \xi_2^2 \partial_1^2 w - \xi_2 \partial_1 v) \\ U_1^3 &= (\lambda + 2\mu)^{-1} \{ (3\lambda + 4\mu) (\frac{1}{6} \xi_2^3 \partial_1^3 w - \frac{1}{2} \xi_2^2 \partial_1^2 v) + (\lambda + \mu) \xi_2 \partial_1 [-(H_+^2 + H_-^2) \partial_1^2 w + \\ &+ 2(H_+ - H_-) \partial_1 v] \}, \quad U_2^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Названные условия разрешимости возникают при определении  $U_1^3, U_2^4$  и имеют вид

$$\partial_1 \{ -\frac{1}{6} (H_+^3 + H_-^3) \partial_1^3 w + \frac{1}{4} (H_+ + H_-) \partial_1 [(H_+^2 + H_-^2) \partial_1^2 w] \} - \partial_1 \{ \frac{1}{2} (H_+ + H_-) \partial_1 (H_+ - H_-) \cdot \partial_1 v \} = F_2^0 \quad (2.6)$$

$$-\partial_1 (H_+ + H_-) \partial_1 v + \frac{1}{2} \partial_1 (H_+^2 - H_-^2) \partial_1^2 w = F_1 \quad (2.7)$$

Здесь  $F_1$  и  $F_2^0$  — некоторые функции на вещественной оси  $\mathbf{R}$ , определяемые по правой части  $p$  исходной задачи.

Система уравнений (2.6), (2.7) не является формально самосопряженной. Для того чтобы привести ее к симметричной форме, применим оператор  $\frac{1}{2} \partial_1 (H_+ - H_-)$  ко второму уравнению и сложим результат с первым. Система становится самосопряженной после замены уравнения (2.6) уравнением

$$-\frac{1}{2} \partial_1^2 (H_+^2 - H_-^2) \partial_1 v + \frac{1}{3} \partial_1^2 (H_+^3 + H_-^3) \partial_1^2 w = F_2 \quad (2.8)$$

При этом  $F_2 = F_2^0 + \frac{1}{2} \partial_1 (H_+ - H_-) F_1$ .

Итак, предельная ( $\epsilon = 0$ ) задача, отвечающая напряженно-деформированному состоянию в перемычке, описывается системой уравнений (2.7), (2.8), в которых согласно (1.2), (1.5), (2.2) следует положить

$$H_+(\xi_1) = 1 + a_+ \xi_1^{2m}, \quad H_-(\xi_1) = a_- \xi_1^{2m} \quad (2.9)$$

Далее понадобятся решения  $\psi = (v, w)$  однородной системы (2.7); (2.8) на прямой  $\mathbf{R}$ . Три из них очевидны

$$\psi^1(\xi_1) = (1, 0), \quad \psi^2(\xi_1) = (0, 1), \quad \psi^3(\xi_1) = (0, \xi_1) \quad (2.10)$$

Еще три получаются после интегрирования системы. Для того чтобы сократить

формулы, введем обозначения

$$(R_1 z)(\xi_1) = \int_0^{\xi_1} z(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (z(t) - z(-t)) dt, \quad (R_2 z)(\xi_1) = \int_0^{\xi_1} (\xi_1 - t) z(t) dt + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t(z(t) + z(-t)) dt - \frac{1}{2} \xi_1 \int_0^{\infty} (z(t) - z(-t)) dt \quad (2.11)$$

Отметим, что  $\partial_1 R_1 z = z$  и  $\partial_1^2 R_2 z = z$ . Упомянутые решения имеют вид

$$\psi^{j+3} = (R_1 \Psi_1^j, R_2 \Psi_2^j), \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.12)$$

$$\Psi_1^1 = -4H^{-4}(H_+^3 + H_-^3), \quad \Psi_2^1 = -6H^{-4}(H_+^2 - H_-^2) \\ \Psi_1^2 = 6\xi_1 H^{-4}(H_+^2 - H_-^2), \quad \Psi_2^2 = 12\xi_1 H^{-3} \\ \Psi_1^3 = -6H^{-4}(H_+^2 - H_-^2), \quad \Psi_2^3 = -12H^{-3}; \quad H = H_+ + H_- \quad (2.13)$$

Введем еще решения  $\psi^{0j}$  однородной системы (2.7), (2.8), в которой вместо функций  $H_{\pm}$  из (2.9) фигурируют величины  $H_{\pm}^0(\xi_1) = a_{\pm} \xi_1^{2m}$ . Помимо очевидных решений (2.10) этой системе удовлетворяют вектор-функции  $\psi^{0j+3}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , причем

$$\psi^{0j+3}(\xi_1) = A_+^{-3} \xi_1^{\beta_j} (b_1^j, b_2^j \xi_1^{1-2m}) \quad (2.14)$$

$$\beta_1 = 1 - 2m, \quad \beta_2 = 2 - 4m, \quad \beta_3 = 1 - 4m, \quad A_{\pm} = a_{\pm} \pm a_{\mp}$$

$$b_1^1 = -4(a_+^3 + a_-^3)(1 - 2m)^{-1} A_+^{-1}, \quad b_2^1 = -3(1 - 2m)^{-1}(1 - 4m)^{-1} A_-$$

$$b_1^2 = 3(1 - 2m)^{-1} A_-, \quad b_2^2 = 2(1 - 2m)^{-1}(1 - 3m)^{-1}$$

$$b_1^3 = -6(1 - 4m)^{-1} A_-, \quad b_2^3 = -6(1 - 3m)^{-1}(1 - 6m)^{-1}$$

В силу (2.11), (2.13) и (2.9) решения (2.12) допускают разложения

$$\psi^{j+3}(\xi_1) = \psi^{0j+3}(\xi_1) \pm \sum_{k=1}^3 c_{jk} \psi^k(\xi_1) + (1, |\xi_1|^{1-2m}) \cdot O(|\xi_1|^{\beta_j-1}), \quad \xi_1 \rightarrow \pm\infty \quad (2.15)$$

$$c_{12} = c_{21} = c_{32} = c_{31} = 0$$

$$c_{11} = \int_0^{\infty} \Psi_1^1(t) dt, \quad c_{13} = c_{31} = \int_0^{\infty} \Psi_1^3(t) dt = \int_0^{\infty} \Psi_2^1(t) dt$$

$$c_{22} = -\int_0^{\infty} t \Psi_2^2(t) dt, \quad c_{33} = \int_0^{\infty} \Psi_2^3(t) dt \quad (2.16)$$

Как следует из формул (2.16) и (2.13) матрица  $c = \|c_{jk}\|$ , составленная из коэффициентов разложений (2.15), симметрична и отрицательно определена. Этот факт имеет место при любых функциях  $H_{\pm}$  с достаточно быстрым ростом на бесконечности. Обозначим матричный дифференциальный оператор системы (2.7), (2.8) через  $T(\xi_1, \partial_1)$ . Интегрируя скалярное произведение  $\psi^{3+j} \cdot T\psi^{3+k}$  по частям на интервале  $(-R, R)$ , вычисляя внеинтегральные члены при помощи асимптотических формул (2.15) и переходя к пределу при  $R \rightarrow \infty$ , получаем представление

$$2c_{jk} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \psi^{j+3}(\xi_1) \cdot T(\xi_1, \partial_1) \psi^{k+3}(\xi_1) d\xi_1 - \mathfrak{E}(\psi^{j+3}, \psi^{k+3}; (-R, R)) =$$

$$= -\mathfrak{E}(\psi^{j+3}, \psi^{k+3}; (-\infty, +\infty))$$

$$\mathfrak{E}(\varphi, \psi; I) = \int_I (H_+ + H_-) \partial_1 \varphi_1 \partial_1 \psi_1 + \frac{1}{3} (H_+^3 + H_-^3) \partial_1^2 \varphi_2 \partial_1^2 \psi_2 - \frac{1}{2} (H_+^2 - H_-^2) (\partial_1^2 \varphi_2 \partial_1 \psi_1 + \partial_1 \varphi_1 \partial_1^2 \psi_2) d\xi_1$$

$$\mathfrak{E}(\varphi, \varphi; I) \geq (4 + 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}})^{-1} \int_I (H_+ + H_-) |\partial_1 \varphi_1|^2 + \frac{1}{3} (H_+^3 + H_-^3) |\partial_1^2 \varphi_2|^2 d\xi_1$$

Таким образом,  $-c$  — матрица Грама, обладающая названными свойствами.

3. Асимптотика решения для вырожденной перемычки. Рассмотрим предельную ( $\epsilon = 0$ ) задачу (1.3), (1.4). Так как нагрузка самоуравновешена, то существует решение задачи, обладающее конечной упругой энергией. Найдем асимптотику решения вблизи вершин  $(0, +0)$  и  $(0, -0)$  пиков, образуемых контурами  $\Gamma_0$  и  $\Gamma$ . Процедура построения асимптотики по существу повторяет процедуру определения коэффициентов ряда (2.4). При этом вместо "быстрых" переменных  $\xi$  используются исходные переменные  $x$ , а под функциями  $H_{\pm}$  в (2.2) подразумеваются функции  $h_{\pm}$  из (1.2). Подчеркнем, что теперь в уравнениях границы  $x_2 = \pm h_{\pm}(x_1)$  отсутствует малый параметр, однако перемычка по-прежнему является тонкой благодаря соотношению (1.2).

Сначала обратимся к случаю, когда  $p = 0$  в окрестности точки  $O$ . Тогда асимптотика решения  $u^0$  предельной задачи (1.3), (1.4) в области  $\Omega_0$  имеет вид

$$u^0(x) = (k_1^{\pm} - k_3^{\pm} x_2, k_2^{\pm} + k_3^{\pm} x_1) + O(\exp(-\delta_0 |x_1|^{1-2m})), \quad x_1 \rightarrow \pm 0 \quad (3.1)$$

Здесь  $k_j^{\pm}$  — некоторые постоянные,  $0 < \delta_0$  — малое число. Поскольку решение  $u^0$  определено с точностью до жестких смещений, то его можно выбрать так, чтобы

$$k_j^{\pm} = \pm k_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

Далее понадобятся поля  $Z^j$  смещений в области  $\Omega_0$ , отвечающие сосредоточенным воздействиям в вершинах пиков (аналоги продольной, перерезывающей сил и изгибающего момента). Более точно, векторы  $Z^j$  удовлетворяют однородным уравнениям (1.3) в  $\Omega_0$  и (1.4) на  $\partial\Omega_0 \setminus 0$  и вблизи вершин пиков обладают асимптотиками

$$Z^j(x) \sim \pm U(1, x_2, \partial/\partial x_1) \Psi^{j+3}(x), \quad x_1 \rightarrow \pm 0 \quad (3.3)$$

Поясним обозначения, принятые в (3.3). Через  $U$  обозначен матричный дифференциальный оператор, определенный при помощи векторов с компонентами (2.5):

$$U(\epsilon, \xi_2, \partial/\partial \xi_1)(v(\xi_1), w(\xi_1)) = (\epsilon^{\alpha} v(\xi_1), w(\xi_1)) + \sum_{k=1}^4 \epsilon^{k\alpha} (U_1^k(\xi), U_2^k(\xi)) \quad (3.4)$$

Отметим, что в (3.4)  $U_1^4 = 0$ , а явный вид функции  $U_2^4$  не потребуется (возможность ее построения указывалась после формулы (2.5)). Вектор-функции  $\Psi^{j+3}$  определяются следующим образом. В проколотой окрестности точки  $x_1 = 0$  они удовлетворяют однородным уравнениям (2.7), (2.8), где величины  $H_{\pm}(\xi_1)$  заменены на  $h_{\pm}(x_1)$ , и в соответствии с (1.2) допускают разложения

$$\Psi^{j+3}(x_1) = \psi^{0j+3}(x_1) + (1, |x_1|^{1-2m}) \cdot O(|x_1|^{\beta_j+1}), \quad x_1 \rightarrow \pm 0 \quad (3.5)$$

Доказательство существования нужных решений проводится по обычной схеме: асимптотические слагаемые  $Z^{j\pm}$  из (3.3) умножаются на срезающие функции  $\chi_{\pm}(x_1)$ , затем вычисляются невязки  $f^j, p^j$  полученных произведений в однородной предельной ( $\epsilon = 0$ ) задаче (1.3), (1.4) и, наконец, прибавляются "энергетические" решения  $Z^{1j}$  задачи в  $\Omega_0$ , компенсирующие возникшие невязки. Поясним, почему удастся найти решения  $Z^{1j}$  с конечной энергией. Процедура построения формальной асимптотики, намеченная в начале разд. 2, позволяет построить члены ряда  $U^k$  с номерами  $k = 4, 5, \dots$ . Если  $(v, w) = \psi^{3+j}$ , то согласно (3.5), (2.14) и (2.5) справедливы неравенства

$$|U^k(x)| \leq c_1 |x_1|^{\beta_j + (k-1)(2m-1)} \leq c_2 |x_1|^{(k-3)(2m-1) - 1} \quad (3.6)$$

Таким образом, заменяя в (3.3) оператор  $U$  оператором (3.4) с большим числом членов ряда, можно добиться сколь угодно быстрого убывания невязок при  $|x| \rightarrow 0$  — это снимает вопрос о допустимых сингулярностях в вершинах пиков. Поскольку согласно (3.6) производные функций  $U_i^5$  квадратично суммируемы, то при построении энергетической поправки  $Z^{1j}$  достаточно взять четыре члена в (3.4). Итак, для существования нужного вектора  $Z^{1j}$  осталось проверить самоуравновешенность нагрузок  $f^j, p^j$ . Обозначим через  $\Omega(d)$  область  $\Omega_0 \setminus Q_d$  с "обломанными" пиками; здесь  $0 < d$  — малое число,  $Q_d = \{x: |x_1| < d, |x_2| < cd\}$  — прямоугольник, граница которого пересекается с  $\Omega_0$  по отрезкам  $I^{\pm}(d) = \{x: x_1 = \pm d, -h_{-}(\pm d) < x_2 < h_{+}(\pm d)\}$ . Положим  $X^1 = e^1$ ,

$X^2 = e^2$  и  $X^3(x) = (-x_2, x_1)$ . Имеем

$$\int_{\Omega_0} f^j \cdot X^k dx + \int_{\partial\Omega_0} p^j \cdot X^k ds_x = \lim_{d \rightarrow 0 \pm} \sum_{\Omega(d)} (- \int_{\Omega(d)} X^k \cdot L(x_{\pm} Z^{j\pm}) dx + \int_{\partial\Omega(d) \cap \partial\Omega_0} X^k \cdot B^{\pm}(x_{\pm} Z^{j\pm}) ds_x) = \lim_{d \rightarrow 0 \pm} \sum_{I(d)} \{ \sigma_{11}(Z^{j\pm}) X_1^k + \sigma_{12}(Z^{j\pm}) X_2^k \} dx_2 \equiv \lim_{d \rightarrow 0 \pm} \sum_{\mp} J_{j,k}^{\pm}(d) \quad (3.7)$$

В силу (2.5) верны равенства

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(Z^{j\pm}) &= \Lambda (\partial_1 \Psi_1^{j+3} - x_2 \partial_1^2 \Psi_2^{j+3}) + (3\lambda + 4\mu) (1/6 x_2^3 \partial_1^4 \Psi_2^{j+3} - 1/2 \partial_1^3 \Psi_1^{j+3}) + \\ &+ (\lambda + \mu) x_2 \partial_1^2 (- (h_+^2 + h_-^2) \partial_1^2 \Psi_2^{j+3} + 2(h_+ - h_-) \partial_1 \Psi_1^{j+3}) \\ \sigma_{12}(Z^{j\pm}) &= \Lambda (1/2 x_2^2 \partial_1^3 \Psi_2^{j+3} - x_2 \partial_1^2 \Psi_1^{j+3}) + 1/4 \Lambda \partial_1 (- (h_+^2 + h_-^2) \partial_1^2 \Psi_2^{j+3} + 2(h_+ - h_-) \partial_1 \Psi_1^{j+3}), \\ \partial_1 &= \partial / \partial x_1, \quad \Lambda = 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Теперь вычисляя интегралы, получаем

$$\mp J_{j,k}^{\pm} = \Lambda \delta_{j,k} + O(1), \quad d \rightarrow 0$$

Следовательно, пределы (3.7) аннулируются, т.е. нагрузки самоуравновешены и энергетические поправки  $Z^{1j}$  существуют. Заметим, что те же выкладки (применительно к формуле Бетти для векторов  $u^0$  и  $Z^j$ ) позволяют найти постоянные  $k_j$  из формул (3.1), (3.2)

$$k_j = - \int_{\Gamma} Z^j \cdot p dx, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.9)$$

Оказывается, что в случае  $p(0) \neq 0$  нет решения задачи (1.3), (1.4) в области  $\Omega_0$ , обладающего конечной энергией. Процедура отыскания решения  $u^0$  с наименьшей из возможных сингулярностей остается прежней: строится отрезок асимптотического ряда и подбирается асимптотическая поправка. Далее понадобится только главный сингулярный член асимптотики. Обращаясь к алгоритму из разд. 2, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6), (2.7), в которой величины  $H_{\pm}$  заменены на  $a_{\pm} x_1^{2m}$  и  $F_1 = -\Lambda^{-1} p_1(0)$ ,  $F_2(x) = \Lambda^{-1} (-p_2(0) + p_1(0) 2a_- m x_1^{2m-1})$ . Частное решение этой системы имеет вид:

$$(v(x_1), w(x_1)) = p_1(0)(v^1(x_1), w^1(x_1)) + p_2(0)(v^2(x_1), w^2(x_1)) \quad (3.10)$$

$$v^1(x_1) = \Lambda^{-1} A_+^{-4} [4(a_+^3 + a_-^3) + 6(2m+1)^{-1} a_- (a_+^2 - a_-^2)] (2-2m)^{-1} x_1^{2-2m}$$

$$w^1(x_1) = \Lambda^{-1} A_+^{-4} [6(a_+^2 - a_-^2) + 12(2m+1)^{-1} a_- (a_+ + a_-)] (3-4m)^{-1} (2-4m)^{-1} x_1^{3-4m}$$

$$v^2(x_1) = -\Lambda^{-1} A_+^{-3} 3(a_+ - a_-) (3-4m)^{-1} x_1^{3-4m}$$

$$w^2(x_1) = -\Lambda^{-1} A_+^{-3} 6(3-6m)^{-1} (4-6m)^{-1} x_1^{4-6m} \quad (3.11)$$

Если  $m = 1$ , то в первой строке (3.11) множитель  $(2-2m)^{-1} x_1^{2-2m}$  заменяется на  $\ln |x_1|$ .

Функции (3.11) определяют асимптотику решения

$$u^0(x) \sim U(1, x_2, \partial / \partial x_1) \{ p_1(0)(v^1(x_1), w^1(x_1)) + p_2(0)(v^2(x_1), w^2(x_1)) \} \quad (3.12)$$

При  $p_2(0) \neq 0$  содержательным является лишь второе слагаемое из фигурных скобок: оно описывает главный член асимптотики, а следующие за ним младшие слагаемые, зависящие, например, от  $(\partial_1 p)(0)$ , имеют больший порядок, чем выражение  $p_1(0)(v^1, w^1)$ . Это выражение главенствует в случае  $p_2(0) = 0$ .

4. Асимптотика решения. Предположим сначала, что  $p = 0$  в окрестности точки  $O$ . В качестве главного приближения к решению задачи (1.3), (1.4) естественно взять решение  $u^0$  предельной задачи (1.3), (1.4) в области  $\Omega_0$ . Это решение удовлетворяет краевому условию (1.4) на  $\Gamma$ , вне окрестности перемычки оставляет малую невязку  $O(\epsilon)$  в условии на контуре  $\Gamma_{\epsilon}$ . Однако вблизи точки  $O$  оно непригодно как приближение к решению  $u(\epsilon, x)$  поскольку при  $x_1 \rightarrow \pm 0$  может иметь разные пределы (ср. с (3.1)

и (3.2)). Поэтому, обращаясь к методу сращиваемых асимптотических разложений, выберем иное представление вектора  $u(\epsilon, x)$  на перемычке. Именно главный член асимптотики при малых  $x$  будем искать в виде

$$u(\epsilon, x) \sim U(\epsilon, \xi_2, \frac{\partial}{\partial \xi_1}) \sum_{j=1}^3 A_j(\epsilon) \psi^{j+3}(\xi_1) \quad (4.1)$$

Здесь  $\psi^{j+3}$  — решения (2.12), описанные в разд. 2,  $U$  — оператор из (3.4), а  $A_j(\epsilon)$  — величины, подлежащие определению. Пользуясь формулами (2.15), выделим убывающие слагаемые в асимптотике правой части (4.1) при  $\xi_1 \rightarrow \pm\infty$ . Возвращаясь согласно (1.5) к координатам  $x$ , получаем, что эти слагаемые равны

$$\begin{aligned} & \pm A_1(\epsilon) [\epsilon^\alpha c_{11}(1, 0) + c_{13}(-\epsilon^\alpha \xi_2, \xi_1)] \pm A_2(\epsilon) c_{22}(0, 1) \pm A_3(\epsilon) [\epsilon^\alpha c_{31}(1, 0) + \\ & + c_{33}(-\epsilon^\alpha \xi_2, \xi_1)] = \pm \epsilon^\alpha [c_{11}A_1(\epsilon) + c_{31}A_3(\epsilon)](1, 0) \pm c_{22}A_2(\epsilon)(0, 1) \pm \\ & \pm \epsilon^{-\gamma} [c_{13}A_1(\epsilon) + c_{33}A_3(\epsilon)](-x_2, x_1) \end{aligned}$$

Сравнивая последнее выражение с асимптотиками (3.1) и решая систему алгебраических уравнений при учете равенств (3.2), находим

$$\begin{aligned} A_2(\epsilon) &= A_2^\circ = k_2 c_{22}^{-1} \\ A_p(\epsilon) &= \epsilon^{-\alpha} A_p^\circ + O(\epsilon^\gamma) \quad (p = 1, 3) \\ A_1^\circ &= k_1 c_{33} d^{-1}, \quad A_3^\circ = -k_1 c_{13} d^{-1}, \quad d = c_{11} c_{33} - c_{13}^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Итак, главный член асимптотики решения  $u(\epsilon, x)$  на перемычке следует определить формулой (4.1), в которой величины  $A_j(\epsilon)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , заменены величинами  $\epsilon^{-\alpha} A_1^\circ$ ,  $A_2^\circ$ ,  $\epsilon^{-\alpha} A_3^\circ$  из (4.2). (Сопоставляя (2.4) и (4.1), видим, что  $\tau = -\alpha$ .) Перейдем к построению следующего члена  $\epsilon^\rho u^\rho$  внешнего разложения. Выбор показателя  $\rho$  степени малого параметра обуславливается двумя факторами: сращиванием с младшими (при  $\xi_1 \rightarrow \pm\infty$ ) членами разложения суммы из (4.1) и компенсацией невязки  $O(\epsilon)$ , оставленной вектором  $u^0$  в краевом условии (1.4) на  $\Gamma_\epsilon$ . Согласно (2.15), (2.14) и (1.5) упомянутые младшие члены имеют вид

$$\begin{aligned} & U(\epsilon, \xi_2, \partial/\partial \xi_1) (A_1(\epsilon) \psi^{04}(\xi_1) + A_2(\epsilon) \psi^{05}(\xi_1) + A_3(\epsilon) \psi^{06}(\xi_1)) + \dots = \\ & = U(1, x_2, \partial/\partial x_1) \{ \epsilon^{-\alpha} A_1^\circ \epsilon^{2-2\gamma} \psi^{04}(x_1) + A_2^\circ \epsilon^{3-3\gamma} \psi^{05}(x_1) + \\ & + \epsilon^{-\alpha} A_3^\circ \epsilon^{3-2\gamma} \psi^{06}(x_1) \} + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь многоточием обозначены несущественные слагаемые. Из (4.3) видно, что наименьшим показателем обладает первое слагаемое из фигурных скобок. Этот показатель  $\rho \equiv \alpha = 1 - \gamma$  меньше единицы, и потому второй член внешнего разложения определяется из процедуры сращивания. Вспоминая разложения (3.3) специальных решений  $Z^j$ , заключаем, что

$$\epsilon^{1-\gamma} u^{1-\gamma}(x) = \epsilon^{1-\gamma} A_1^\circ Z^1(x) \quad (4.4)$$

При построении следующих членов асимптотики необходимо учитывать невязки в краевом условии на  $\Gamma_\epsilon$  и к процедуре сращивания привлекать младшие члены разложений специальных решений. Ограничимся указанием основной асимптотической поправки (4.4) вдали от перемычки и обратимся к случаю  $p(0) \neq 0$ . Пусть сначала  $p_2(0) \neq 0$ ; в разложении (3.12) перейдем к быстрым переменным (1.5)

$$u^0(\epsilon, x) \sim \epsilon^{-4\alpha+1} U(\epsilon, \xi_2, \partial/\partial \xi_1) (v^2(\xi_1), w^2(\xi_1))$$

Таким образом, для осуществления сращивания нужно построить решение  $(v^2, w^2)$  системы (2.7), (2.8) с правыми частями  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = -\Lambda^{-1} p_2(0)$ , имеющее асимпто-

тикой при  $\xi_1 \rightarrow \pm\infty$  величину  $(v^2(\xi_1), w^2(\xi_1))$ . Ответ записываем при помощи операторов  $R_i$  из (2.12)

$$\begin{aligned} (v^2, w^2) &= p_2(0) \Lambda^{-1}(R_1 V^2, R_2 W^2) \\ V^2(\xi_1) &= H(\xi_1)^{-4} [4c_1(H_+(\xi_1)^3 + H_-(\xi_1)^3) - 6(\frac{1}{2}\xi_1^2 - c_2)(H_+(\xi_1)^2 - H_-(\xi_1)^2)] \\ W^2(\xi_1) &= H(\xi_1)^{-4} [6c_1(H_+(\xi_1)^3 + H_-(\xi_1)^3) - 12(\frac{1}{2}\xi_1^2 - c_2)(H_+(\xi_1)^2 - H_-(\xi_1)^2)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\int_0^\infty V^2(\xi_1) d\xi_1 = \int_0^\infty W^2(\xi_1) d\xi_1 = 0 \quad (4.6)$$

В (4.5) функции  $H_\pm$  задаются формулами (2.9), а постоянные  $c_1, c_2$  однозначно находятся из соотношений (4.6). Главный член асимптотики в случае  $p_2(0) = 0$ ,  $p_1(0) \neq 0$  имеет вид

$$u(\epsilon, x) \sim \epsilon^{-3\alpha+1} U(\epsilon, \xi_2, \partial/\partial \xi_1)(v^1(\xi_1), w^1(\xi_1)) \quad (4.7)$$

Отметим, что представления (4.4) и (4.7) согласуются с (2.4) при  $\tau = -4\alpha + 1$  и  $\tau = -3\alpha + 1$  соответственно. Если  $m > 1$ :

$$\begin{aligned} (v^1, w^1) &= p_1(0) \Lambda^{-1}(R_1 V^1, R_2 W^1) \\ V^1(\xi_1) &= H(\xi_1)^{-4} [4\xi_1(H_+(\xi_1)^3 + H_-(\xi_1)^3) + 6(H_+^2(\xi_1) - H_-^2(\xi_1))(\int_0^{\xi_1} H_-(t) dt + c_3 \xi_1)] \\ W^1(\xi_1) &= H(\xi_1)^{-4} [6\xi_1(H_+(\xi_1)^2 - H_-(\xi_1)^2) + 12(H_+(\xi_1) + H_-(\xi_1))(\int_0^{\xi_1} H_-(t) dt + c_3 \xi_1)] ; \\ \int_0^\infty \xi_1 W^1(\xi_1) d\xi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подчеркнем, что последнее равенство служит для отыскания постоянной  $c_3$ . При  $m = 1$  формулы (4.8) сохраняются, а нечетные функции  $V^1$  и  $W^1$  обладают асимптотикой

$$\begin{aligned} V^1(\xi_1) &\sim 2A_+^{-3} (2a_+^2 - a_+ a_- + a_-^2) \xi_1^{-1} \equiv K \xi_1^{-1} \\ W^1(\xi_1) &\sim 2A_+^{-3} (3a_+ - a_-) \xi_1^{-3} \end{aligned}$$

Формула (4.7) для  $w^1$  имеет смысл, в то время как действие оператора  $R_1$  на  $V^1$  не определено. Поэтому необходимо изменить выражение для функции  $v^1$ . Положим

$$v^1(\xi_1) = p_1(0) \Lambda^{-1} \left( \int_0^{\xi_1} V^1(\xi_1) d\xi_1 + c(\epsilon) \right)$$

а величину  $c(\epsilon)$  выберем так, чтобы было верным соотношение

$$v^1(\xi_1) = K \ln(\epsilon^{1/2} |\xi_1|) + O(|\xi_1|^{-1}), \quad |\xi_1| \rightarrow \infty \quad (4.9)$$

Подчеркнем, что согласно (1.5) переход от координат  $\xi$  к координатам  $x$  устраняет  $\ln \epsilon$  из формулы (4.9). Это обстоятельство позволяет осуществить сращивание разложений (4.6) и (3.12).

5. Обсуждение. 1°. *Весовое неравенство Корна*. При доказательстве разрешимости предельной задачи в  $\Omega_0$  и оценивании решения задачи в  $\Omega_\epsilon$  необходимо пользоваться специальным вариантом неравенства Корна. С помощью приемов из [14, 15] получается следующее утверждение. Пусть вектор  $u \in W_2^1(\Omega_\epsilon)$  подчинен условиям, устраняющим произвол в выборе жесткого смещения

$$\int_\Gamma (x_1 u_2(\epsilon, x) - x_2 u_1(\epsilon, x)) ds_x = 0, \quad \int_\Gamma u_i(\epsilon, x) ds_x = 0, \quad i = 1, 2$$

Тогда справедлива оценка

$$E(u; \Omega_\epsilon) \geq c \int_{\Omega_\epsilon} \left\{ (d+\epsilon)^{-2} |u_1|^2 + (d+\epsilon)^{-4} |u_2|^2 + \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|^2 + (d+\epsilon)^{-2} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|^2 + (d+\epsilon)^{-2} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 \right\} dx \quad (5.1)$$

в которой  $E$  – функционал упругой энергии и  $d(x) = |x|^{2m}$ . Постоянная  $c$  не зависит ни от  $u$ , ни от  $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ , а неравенство (5.1) сохраняет силу и при  $\epsilon = 0$ .

2°. *Оправдание асимптотики.* В предыдущих разделах были построены внутреннее  $u^{int}(\epsilon, \xi)$  и внешнее  $u^{ext}(\epsilon, x)$  представления для решения  $u$ . Ввиду некоторых особенностей конструкции глобального асимптотического приближения (ср. с [13, 16]) опишем ее подробно. Пусть  $\chi$  – гладкая срезающая функция в  $\Omega_\epsilon$ ; она равна нулю вне множества  $V \cap \bar{\Omega}_\epsilon$ , на перемычке выполняется равенство  $\chi(x) = \chi_0(x_1)$ , где  $\chi_0(x_1) = 1$  при  $|x_1| < \rho_0$  и  $\rho_0 > 0$ . Пусть еще  $U^{ext}(\epsilon, x_1, h(x_1)^{-1}[x_2 + h_-(x_1)])$  – запись внешнего приближения  $u^{ext}(\epsilon, x)$  на перемычке в специальных переменных. Кроме того, считаем, что вектор-функция  $u^{ext}$  продолжена с сохранением гладкости за пределы множества  $\Omega_0 \setminus 0$ . Упомянутое глобальное приближение имеет вид

$$(1 - \chi(x)) u^{ext}(\epsilon, x) + \chi(x)(1 - \chi_0(\epsilon^{-\gamma} x_1)) + \chi(x)(1 - \chi_0(\epsilon^{-\gamma} x_1)) U^{ext}(\epsilon, x_1, [\epsilon + h(x_1)]^{-1} \times [x_2 + h_-(x_1)]) + \chi(x) u^{int}(\epsilon, \epsilon^{-\gamma} x_1, \epsilon^{-1} x_2) - \chi(x)(1 - \chi_0(\epsilon^{-\gamma} x_1)) U^{as}(\epsilon, x) \quad (5.2)$$

Здесь через  $U^{as}(\epsilon, x)$  обозначены общие члены разложений вектор-функций  $u^{ext}$  и  $u^{int}$  при  $x \rightarrow 0$  и  $\xi_1 \rightarrow \infty$ . В (5.2) эта величина учитывается дважды – и во втором и в третьем слагаемом, а вычитаемое устраняет такое дублирование. Подстановка вектора (5.2) в уравнения (1.3), (1.4), вычисление соответствующей невязки и применение неравенства (5.1) доставляют энергетическую оценку разности истинного решения  $u$  задачи (1.3), (1.4) и асимптотического решения (5.2). Отметим, что, основываясь на локальных оценках [17] решений эллиптических краевых задач, можно установить и поточечную близость названных решений.

3°. *Концентрация напряжений на перемычке.* Сначала обратимся к ситуации, когда  $p(0) = 0$ . Согласно разд. 3, 4 вдали от перемычки асимптотика решения имеет вид

$$u(\epsilon, x) \sim u^0(x) + \epsilon^{1-\gamma} u^{1-\gamma}(x) + \dots$$

Следовательно, вне окрестности точки 0 напряжения  $\sigma(u; \epsilon, x)$  ограничены. Из-за особенности вектора (4.4) в нуле (см. (3.3), (3.5)) эти напряжения возрастают при  $x \rightarrow 0$ . Таким образом, на перемычке наблюдается концентрация напряжений, которая определяется внутренним разложением (4.1) (решением типа пограничного слоя). Исходя из формул (4.1), (4.2), (2.12), (2.13) и (2.5), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(u; \epsilon, x) &\sim \epsilon^{-\gamma} \Lambda \sum_{p=1,3} A_p^0 (\Psi_1^p(\xi_1) - \xi_2 \Psi_2^p(\xi_1)) + \dots \\ \sigma_{12}(u; \epsilon, x) &\sim \epsilon^{-\gamma+\alpha} \Lambda \sum_{p=1,3} A_p^0 [\frac{1}{2} \xi_2^2 \partial_1 \Psi_2^p(\xi_1) - \xi_2 \partial_1 \Psi_1^p(\xi_1) + D(\Psi^p; \xi_1)] + \dots \\ \sigma_{22}(u; \epsilon, x) &\sim \epsilon^{-\gamma+\alpha} \lambda(\lambda+2\mu)^{-1} \sum_{p=1,3} A_p^0 [(3\lambda+4\mu)(\frac{1}{6} \xi_2^3 \partial_1^2 \Psi_2^p(\xi_1) - \frac{1}{2} \xi_2^2 \partial_1^2 \Psi_1^p(\xi_1)) + \\ &+ (\lambda+\mu) \partial_1 D(\Psi^p; \xi_1)] + \dots \\ D(\Psi; \xi_1) &= \partial_1 \{ -(H_+(\xi_1)^2 + H_-(\xi_1)^2) \Psi_2(\xi_1) + 2(H_+(\xi_1) - H_-(\xi_1)) \Psi_1(\xi_1) \}, \quad \partial_1 = \partial/\partial \xi_1 \end{aligned}$$

Видно, что максимальное значение принимает компонента  $\sigma_{11}(u)$ ; в главном она является линейной функцией переменной  $x_2$  и имеет порядок  $\epsilon^{-\gamma}$ .

Если  $p(0) \neq 0$ , то расчеты проводятся в соответствии с формулами (4.4), (4.5) и (4.7), (4.8). Опять старшим по порядку оказывается напряжение  $\sigma_{11}(u)$ . При этом

$$\sigma_{11}(u; \epsilon, x) \sim \epsilon^{-1+\gamma} p_1(0) (V^1(\xi_1) - \xi_2 W^1(\xi_1)) + \epsilon^{-2+2\gamma} p_2(0) (V^1(\xi_1) - \xi_2 W^2(\xi_1)) + \dots$$

Иными словами, при  $p_1(0) \neq 0, p_2(0) = 0$  напряжение  $\sigma_{11}(u)$  на перемычке есть  $O(\epsilon^{-1+\gamma})$ . Если  $p_2(0) \neq 0$ , то напряжение  $\sigma_{11}(u)$  имеет порядок  $\epsilon^{-2+2\gamma}$ .

4°. *Варианты геометрических форм.* Область, изображенная на фиг. 1, остается связной. Можно рассмотреть другой случай: при  $\epsilon = 0$  область  $\Omega_\epsilon$  распадается на два множества  $\Omega_0^+$  и  $\Omega_0^-$  (фиг. 2). Если нагрузка  $p$ , приложенная к каждому из контуров  $\partial\Omega_0^\pm$ , самоуравновешена, то алгоритм построения асимптотики решения упрощается и пограничный слой определяется без участия вектор-функций (3.3). Дело в том, что существует энергетическое решение  $u^{0\pm}$  предельной задачи в об-

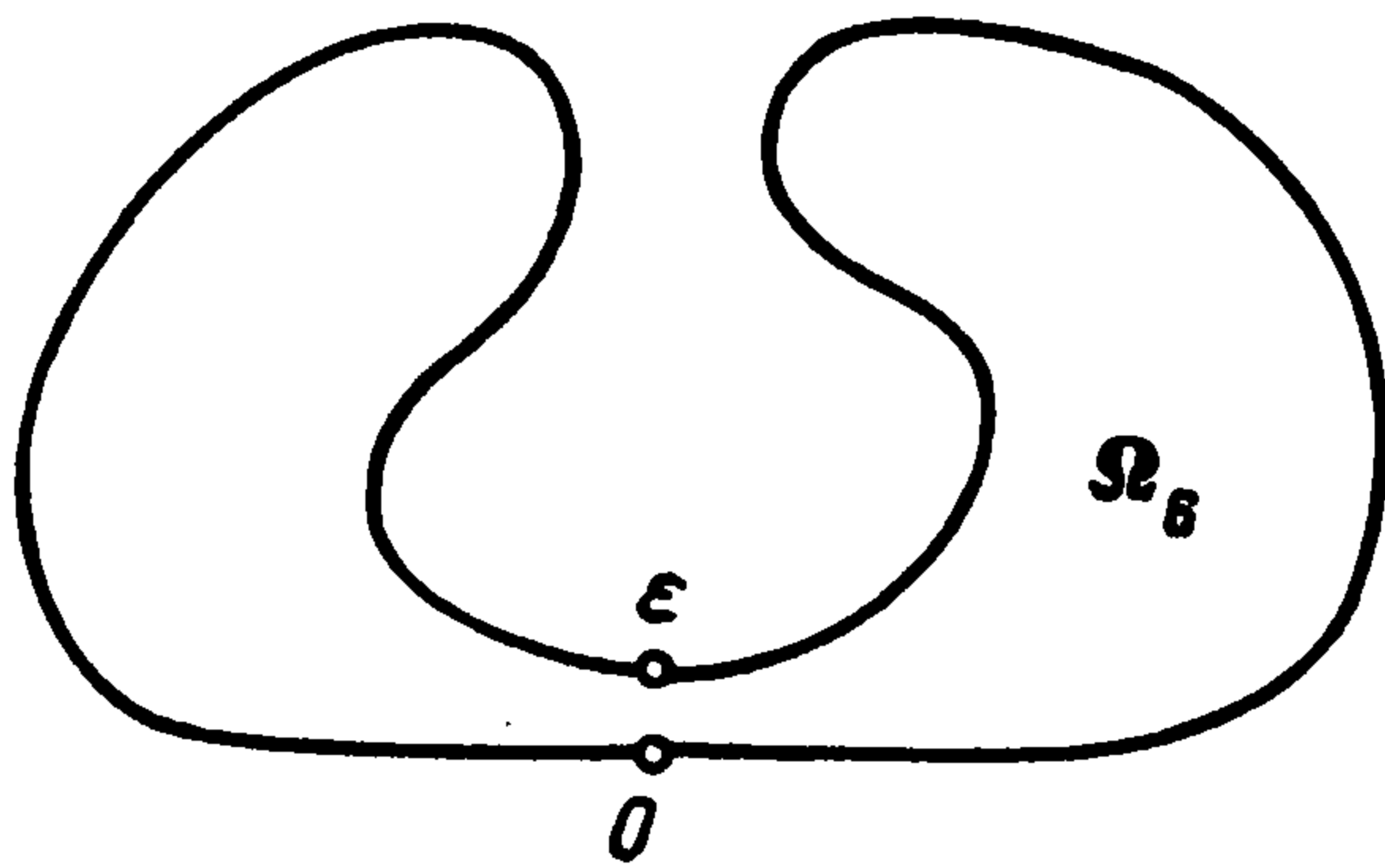
ласти  $\Omega_0^\pm$ , которое находится с точностью до жестких смещений, и потому можно считать, что  $u^{0\pm}(x) = o(\exp(-\delta_0 |x_1|^{1-2m}))$  при  $x_1 \rightarrow \pm 0$ . Значит, необходимо учитывать лишь невязки, возникающие вследствие регулярного возмущения границы области. Если же главный вектор  $(F_1^\pm, F_2^\pm)$  и главный момент  $F_3^\pm$  нагрузки, приложенной к  $\partial\Omega_0^\pm$ , отличны от нуля, то энергетического решения  $u^{0\pm}$  не существует. Учитывая очевидные соотношения  $F_j^\pm = \pm F_j$  и повторяя выкладки из разд. 3 убеждаемся в том, что существуют решения  $u^{0\pm}$  предельной задачи, обладающие асимптотикой

$$u^{0\pm}(x) = \pm \sum_{j=1}^3 F_j U(1, x_2, \partial/\partial x_1) \Psi^{j+3}(x), \quad x_1 \rightarrow \pm 0 \quad (5.3)$$

Осуществляя сращивание, ищем внутреннее разложение в виде (4.1), причем величины  $A_j(\epsilon)$  задаем следующим образом:

$$A_1(\epsilon) = \epsilon^{-2\alpha} F_1, \quad A_2(\epsilon) = F_2, \quad A_3(\epsilon) = \epsilon^{-2\alpha-1} F_3 \quad (5.4)$$

Подчеркнем, что сумма по  $k = 1, 2, 3$  из разложений (2.15) решений  $\Psi^{j+3}$  не влияет на главные члены асимптотики напряжений  $\sigma_{jk}(u; \epsilon, x)$ , поскольку решениям (2.10) отвечают жесткие сме-



Фиг. 2

щения, которые составляют произвол в выборе решений предельной задачи в  $\Omega_0^\pm$ . Напряжения на перемычке вычисляются в соответствии с формулами (4.1), (5.4) (ср. с п. 4°). Укажем лишь на то, что при  $F_3 \neq 0$  напряжение  $\sigma_{11}(u)$  имеет порядок  $\epsilon^{-2}$ , при  $F_3 = 0$  и  $F_2 \neq 0$  этот порядок равен  $\epsilon^{-2+\gamma}$ . Наконец, если  $F_3 = F_2 = 0$  и  $F_1 \neq 0$ , то  $\sigma_{11}(u; \epsilon, x) = O(\epsilon^{-1})$ . В заключение отметим, что приведенная процедура обобщается на тот случай, когда два тела соединены несколькими перемычками (например, полоса с круговым отверстием).

5°. *Разрушение перемычки.* Вернемся к рассмотрению области, изображенной на фиг. 1, и предположим, что  $p = 0$  вблизи точки 0. Учитывая формулу (4.4), а также тот факт, что глобальное приближение решения на  $\Gamma \setminus V$  совпадает в главном с суммой  $u^0(x) + \epsilon^{1-\gamma} A_1^0 Z^1(x)$ , вычисляем асимптотику потенциальной энергии деформации тела  $\Omega_\epsilon$ :

$$\begin{aligned} \Pi(u; \Omega_\epsilon) &= E(u; \Omega_\epsilon) - \int_{\Gamma} u \cdot p ds_x = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} u \cdot p ds_x = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} u^0 \cdot p ds_x - \frac{1}{2} \epsilon^{1-\gamma} A_1^0 \int_{\Gamma} Z^1 \cdot p ds_x + O(\epsilon) = \\ &= \Pi(u^0; \Omega_0) + \epsilon^{1-\gamma} \epsilon_{33} k_1^2 d^{-1} + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Отметим, что  $\epsilon_{33} < 0$ ,  $d > 0$ , т.е. второе слагаемое в (5.5) отрицательно. Пусть  $\Omega'_\epsilon$  — область с разорвавшейся перемычкой (т.е. к границе  $\partial\Omega_\epsilon$  присовокупляется дуга, соединяющая точки на противоположных берегах перемычки). Как и в п. 4°, в асимптотическом разложении решения  $u'(\epsilon, x)$  задачи (1.3), (1.4) в области  $\Omega'_\epsilon$  исчезают пограничный слой (4.1) и поправка (4.4) к внешнему разложению, так что на  $\Gamma \setminus V$  выполняется соотношение  $u'(\epsilon, x) = u^0(x) + O(\epsilon)$ . Посему  $\Pi(u'; \Omega'_\epsilon) = \Pi(u^0; \Omega_0) + O(\epsilon)$ . Значит, приращение потенциальной энергии деформации составляет  $\epsilon^{1-\gamma} \epsilon_{33} k_1^2 d^{-1} + O(\epsilon)$ . Приращение поверхностной энергии есть  $O(\epsilon)$ , и, таким образом, энергетический баланс нарушается в случае малых  $\epsilon$ . Следовательно, в рамках гипотезы Гриффитса квазистатическое разрушение перемычки невозможно.

6. *Задача Дирихле для бигармонического уравнения.* В области  $\Omega_\epsilon$ , описанной в разд. 1, рассмотрим краевую задачу

$$\Delta^2 w(\epsilon, x) = 0, \quad x \in \Omega_\epsilon \quad (6.1)$$

$$w(\epsilon, x) = \varphi^-(x), \quad \partial_n w(\epsilon, x) = \psi^-(x), \quad x \in \Gamma \quad (6.2)$$

$$w(\epsilon, x) = \varphi^+(x), \quad \partial_n w(\epsilon, x) = \psi^+(x), \quad x \in \Gamma_\epsilon \quad (6.3)$$

Такая задача отвечает, например, изгибу пластины с жестко зашечленным краем; при этом  $\Omega_\epsilon$  — срединная поверхность пластины, а неоднородность правой части (6.1) устранена частным решением бигармонического уравнения на плоскости. Условия Дирихле упрощают алгоритм построения асимптотики: решение типа пограничного слоя вычисляется независимо от решения предельной задачи в области  $\Omega_0$  (ср. с [16]). Именно, на перемычке асимптотическое разложение ищется в виде

$$w(\epsilon, x) = W_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{2\alpha k} W_k(x_1, t) \quad (6.4)$$

$$t = [\epsilon + h(x_1)]^{-1} (x_2 - h_-(x_1))$$

Подставляя (6.4) в уравнение (6.1), получаем, что  $W_0$  — кубический полином переменной  $t$ . Коэффициенты этого полинома определяются с учетом краевых условий (6.2), (6.3)

$$W_0(t) = \varphi^-(0) + [\varphi^+(0) - \varphi^-(0)] (3t^2 - 2t^3) \quad (6.5)$$

Запись бигармонического оператора и производной  $\partial_n$  при помощи переменных  $x_1, t$  и разложение гладких функций  $\varphi^\pm, \psi^\pm$  в ряды Тейлора позволяют, как и в [13, 16], найти все члены ряда (6.4).

Возможна еще одна интерпретация соотношений (6.1)–(6.3) как задачи для определения функции Эри. На первый взгляд кажется, что явная формула (6.5) позволяет написать асимптотику напряжений  $\sigma(u; \epsilon, x)$  на перемычке. На самом деле при таком подходе возникают осложнения, вызванные многосвязностью области  $\Omega_\epsilon$ .

Напомним некоторые свойства функции Эри (см. [18] и др.). Она определяется с точностью до линейной функции и такой произвол устраняется, например, требованием  $\varphi^- = \psi^- = 0$ . Пусть  $w$  — решение задачи (6.1)–(6.3), причем правые части  $\varphi^+$  и  $\psi^+$  вычисляются по вектору  $p = (p_1, p_2)$  из (1.4) при помощи формул

$$\varphi^+(x(s)) = 1 + x_1(s) + x_2(s) + \int_0^s x_2 p_1 - x_1 p_2 d\tau \quad (6.6)$$

$$\psi^+(x(s)) = n_1(s) \left(1 - \int_0^s p_2(\tau) d\tau\right) + n_2(s) \left(1 + \int_0^s p_1(\tau) d\tau\right)$$

Здесь  $s$  — длина дуги на контуре  $\Gamma$  и  $x(s)$  — соответствующая точка;  $x(0) = 0$ . Функции (6.6) гладкие благодаря самоуравновешенности нагрузки. Пусть еще  $w_i$  — решения той же задачи при таких правых частях:

$$\begin{aligned} \varphi_i^- = 0, \quad \varphi_0^+ = 1, \quad \varphi_k^+(x) = x_k \\ \psi_i^+ = 0, \quad \psi_0^- = 0, \quad \psi_k^-(x) = n_k(x), \quad k = 1, 2, \quad i = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Функция Эри подчиняется соотношениям

$$F = w + A_0 w_0 + A_1 w_1 + A_2 w_2 \quad (6.8)$$

$$F_{,22} = \sigma_{11}(u), \quad F_{,11} = \sigma_{22}(u), \quad F_{,12} = -\sigma_{12}(u) \quad (6.9)$$

Постоянные  $A_i$  находятся из условия однозначности восстановления вектора смещений в соответствии с (6.9). Было проверено [19], что названные условия записываются следующим образом:

$$\langle F, w_i \rangle = 0, \quad i = 0, 1, 2 \quad (6.10)$$

$$\langle F, G \rangle = \sum_{j,k=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_k^2} \right) dx$$

Заметим, что функции из (6.6) равны нулю в начале координат. Отсюда и из формул (6.7) выводим, что главный член (6.5) асимптотики функции Эри на перемычке имеет вид  $A_0(3t^2 - 2t^3)$ . Согласно (6.10) и (6.8), (6.6) величина  $A_0$  зависит от нагрузки  $p$  глобально (т.е. от ее значений во всех точках границы  $\Gamma$ ) и для определения  $A_0$  необходимо знать функцию  $w_0$  целиком. Таким образом, как и при решении задачи (1.3), (1.4), приходим к интегральным формулам типа (3.9).

7. Трехмерные перемычки. Пусть в трехмерном упругом теле  $\Omega_\epsilon$  имеется полость, граница  $\Gamma_\epsilon$  которой приближена к внешней поверхности  $\Gamma$  тела. Обозначим через  $\omega \subset \Gamma$  множество, по которому слипаются поверхности  $\Gamma$  и  $\Gamma_\epsilon$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Таким образом, тело  $\Omega_\epsilon$  содержит тонкую перемычку в окрестности  $\omega$ . Алгоритм построения асимптотики решения задачи теории упругости в  $\Omega_\epsilon$  зависит от структуры множества  $\omega$ . Если  $\omega$  — гладкий замкнутый контур, то этот алгоритм не отличается по существу от изложенного в разд. 2–4; новым моментом является лишь зависимость предельной задачи (2.7), (2.8) от переменной  $s$  на контуре  $\partial\omega$ . В случае, когда  $\omega$  — объединение двумерной области на  $\Gamma$  и ее гладкой границы  $\partial\omega$ , асимптотика напряженно-деформированного состояния тела строится при помощи тех же приемов, что и в [20, 16] (точно так же, плоская область с отверстием, отделенным от внешнего контура тонкой "балкой", исследуется аналогично [4, 5, 16]).

Рассмотрим ситуацию, в которой множество  $\omega$  состоит из единственной точки 0. В окрестности начала координат 0 тело  $\Omega_\epsilon$  определяется соотношениями

$$\begin{aligned} -h_-(x') &\leq x_3 \leq \epsilon + h_+(x') \\ h_\pm(x') &= r^{2m}(a_\pm(\varphi) + O(r)), \quad r \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь  $x' = (x_1, x_2)$  — декартовы координаты на плоскости,  $(r, \varphi)$  — отвечающие им полярные координаты;  $a_\pm(\varphi)$  — гладкие функции на окружности;  $a_+ + a_- > 0$ ;  $m = 1, 2, \dots$

В области  $\Omega_\epsilon$  рассмотрим задачу (1.3), (1.4), в которой  $p = (p_1, p_2, p_3)$  — гладкая самоуравновешенная нагрузка на контуре  $\Gamma$ , причем для простоты  $p = 0$  около 0. Как и в двумерном случае, асимптотику решения задачи отыскиваем при помощи двух предельных задач. Первую из них составляют уравнение (1.3) в  $\Omega_0$  и краевые условия (1.4) на  $(\Gamma \cup \Gamma_0) \setminus 0$ . Вторая предельная задача — система уравнений на плоскости  $\mathbb{R}^2$  — описывает явление пограничного слоя на перемычке. Построение такой системы проводится по той же схеме, что и в разд. 2. Далее будем ссылаться на формулы из разд. 2, подразумевая, что вместо переменных (1.5) используются переменные

$$\xi = (\xi', \xi_3), \quad \xi' = (\xi_1, \xi_2) = \epsilon^{-\gamma} x', \quad \xi_3 = \epsilon^{-1} x_3, \quad \gamma = (2m)^{-1} \quad (7.2)$$

В асимптотическом ряде (2.4)  $u^j(\xi')$  и  $U^j(\xi)$  — трехмерные векторы  $u^j = (v^j, w^j)$ ,  $v^j = (v_1^j, v_2^j)$ . Пусть  $v^{1'} \equiv v$ ,  $w^0 \equiv w$ , а остальные величины  $v^{j'}$ ,  $w^j$  равны нулю. Учитывая аналогичные (2.1) и (2.3) расщепления операторов, приходим к представлению (ср. с (2.5)):

$$\begin{aligned} U^{0'} &= 0, \quad U_3^0 = 0, \quad U^{1'} = -\xi_3 \nabla w, \quad U_3^1 = 0 \\ U^{2'} &= 0, \quad U_3^2 = \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} (\frac{1}{2} \xi_3^2 \Delta w - \xi_3 \nabla \cdot v) \\ U^{3'} &= (\lambda + 2\mu)^{-1} (3\lambda + 4\mu) \nabla \Delta w \frac{1}{6} \xi_3^3 - [\nabla v + 2(\lambda + 2\mu)^{-1} (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot v] \frac{1}{2} \xi_3^2 + \\ &+ (2\mu)^{-1} [Q(H_+ - H_-)v - \frac{1}{2} Q(H_+^2 + H_-^2) \nabla w] \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$H_+(\epsilon, \xi') = 1 + a_+(\varphi) \rho^{2m}, \quad H_-(\epsilon, \xi') = a_-(\varphi) \rho^{2m}; \quad \rho = |\xi'| \quad (7.4)$$

$$Q = (Q_1, Q_2), \quad Q_j(X; \xi', \nabla)v(\xi') = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial \xi_k} \{X(\xi') [\mu \left( \frac{\partial v_k}{\partial \xi_j}(\xi') + \frac{\partial v_j}{\partial \xi_k}(\xi') \right) + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \delta_{j,k} \nabla \cdot v(\xi')]\}$$

При вычислении величин  $U^{3'}$  и  $U_2^4$  возникают условия разрешимости, образующие систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$-Q(H_+ + H_-; \xi', \nabla)v + \frac{1}{2}Q(H_+^2 - H_-^2; \xi', \nabla)\nabla w = F' \quad (7.5)$$

$$\nabla \cdot \{-\frac{1}{2}Q(H_+^2 - H_-^2; \xi', \nabla)v + \frac{1}{3}Q(H_+^3 + H_-^3; \xi', \nabla)\nabla w\} = F_2 \quad (7.6)$$

Вблизи точки 0 асимптотика решения предельной задачи в области  $\Omega_0$  также описывается степенными решениями системы (7.5), (7.6), где  $\xi' = x'$  и  $H_{\pm}(x') = r^{2m} a_{\pm}(\varphi)$  (см. [21, 22]). Исследование системы (7.4), (7.5) осложняется тем, что дифференциальные операторы, входящие в нее, вырождаются в точке  $r = 0$  (или имеют рассогласованный рост при  $\rho \rightarrow +\infty$ ). Однако умножив уравнения (7.5) и (7.6) на  $r^{-2m}$  и  $r^{-4m}$  соответственно и заменив функцию  $w$  функцией  $w = r^{2m} w$ , приводим систему к тому виду, который допустим для применения результатов [23, 24]. Поэтому упомянутые степенные решения выглядят так:

$$v(x') = r^{\Lambda} \sum_{j=0}^k (j!)^{-1} (\ln r)^j V^{(k-j)}(\varphi)$$

$$w(x') = r^{\Lambda+1-2m} \sum_{j=0}^k (j!)^{-1} (\ln r)^j W^{(k-j)}(\varphi) \quad (7.7)$$

Здесь  $k = 0, \dots, J-1$ , а  $\Lambda$  и  $(V^{(0)}, W^{(0)}), \dots, (V^{(J-1)}, W^{(J-1)})$  — собственное число и жорданова цепочка (собственные и присоединенные векторы) некоторого стандартно выстраемого [23] пучка на единичной окружности.

Шесть решений можно указать явно

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-x_2, x_1, 0), (0, 0, x_1), (0, 0, x_2)$$

Они соответствуют собственным числам  $\Lambda = 0, 2m-1, 1, 2m$  и в силу (7.3) порождают жесткие смещения, которые и определяют главный член асимптотики решения  $u^0$  трехмерной задачи в предельной области  $\Omega_0$

$$u_1^0(x) = c_1 - b_3 x_2 + b_2 x_3 + O(r^{\operatorname{Re} \Lambda_0})$$

$$u_2^0(x) = c_2 + b_3 x_1 + b_1 x_3 + O(r^{\operatorname{Re} \Lambda_0})$$

$$u_3^0(x) = c_3 - b_2 x_1 - b_1 x_2 + O(r^{\operatorname{Re} \Lambda_0 + 1 - 2m}) \quad (7.8)$$

При этом  $\Lambda_0$  — первое (с наименьшей вещественной частью) собственное число упомянутого пучка, расположенное в полуплоскости  $\{\Lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \Lambda > -m\}$  и отличное от чисел  $0, 1, 2m-1, 2m$ .

Подчеркнем, что разложение (7.8) существенно отличается от разложения (3.1): в двумерном случае остаток имел экспоненциальное убывание при приближении к вершине пика, а в трехмерном он характеризуется лишь степенным поведением при  $r \rightarrow 0$ . Это усложняет процедуру сращивания полных разложений, внешнего и внутреннего, однако главный член пограничного слоя в рассматриваемой задаче определяется проще. Дело в том, что еще одно отличие формул (7.8) и (3.1) вызвано разницей геометрических структур предельных областей. В задаче из разд. 3 точка являлась вершиной сразу двух пиков, разложения (3.1) в двух пиках содержат различающиеся постоянные  $k_j^{\pm}$  и в двумерный пограничный слой включаются решения (2.15), учитывающие скачки  $k_j^+ - k_j^-$  (в п. 4° разд. 5 обсуждались иные возможности, связанные с

геометрической множества  $\Omega_0$ ). Разложение (7.8) имеет один и тот же вид при любом способе подхода к точке 0, какие-либо скачки отсутствуют и главные члены пограничного слоя задаются формулой

$$(c_1, c_2, c_3) + \epsilon^\gamma (-b_3 \xi_2, b_3 \xi_1, -b_2 \xi_1 - b_1 \xi_2) + \epsilon (b_2 \xi_3, b_1 \xi_3, 0) \quad (7.9)$$

Подчеркнем, что выражению (7.9) отвечают нулевые напряжения и потому асимптотика напряженно-деформированного состояния перемены определяется младшими членами пограничного слоя. Для их построения нужно найти специальные решения (7.7) однородной системы (7.5), (7.6) в случае  $H_\pm(x') = r^{2m} a_\pm(\varphi)$ , вычислить коэффициенты при таких решениях в разложении поля  $u^0$  и определить решение системы (7.5), (7.6) в случае (7.3), обладающее заданной асимптотикой на бесконечности (ср. с формулами (3.1), (3.2), (3.9) и (4.1), (2.15), где удалось указать явные решения благодаря тому, что (2.7), (2.8) — система обыкновенных дифференциальных уравнений).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mindlin R.D. Stress distribution around a hole near the edge of a plate under tension // Proc. Soc. Exptl. Stress Anal. 1948. № 5. P. 56–67.
2. Шерман Д.И. Об одной частной задаче Дирихле для двусвязной области, границы которой весьма сближены в узкой зоне // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 3. С. 76–87.
3. Callias C., Markenscoff X. Singular asymptotics analysis for the singularity at a hole near a boundary // Quart. Appl. Math. 1989. V. 47. № 2. P. 233–245.
4. Назаров С.А., Черняев П.К. Антиплоский сдвиг области с двумя близко-расположенными трещинами // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 815–825.
5. Назаров С.А., Полякова О.Р. Коэффициенты интенсивности напряжений для параллельных сближенных трещин в плоской области // 1990. ПММ. Т. 54. Вып. 1. С. 132–141.
6. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
7. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668–686.
8. Назаров С.А. Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестн. ЛГУ. 1982. № 7. С. 65–68.
9. Sanchez-Palencia E. Passage à la limite de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. II. 1990. V. 311. № 8. P. 909–916.
10. Пламеневский Б.А. Об асимптотическом поведении решений квазиэллиптических дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37. № 6. С. 1332–1375.
11. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Об асимптотике решения задачи Дирихле вблизи изолированной особенности границы // Вестн. ЛГУ. 1977. № 13. С. 60–66.
12. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
13. Mazja W.G., Nazarov S.A., Plamenewski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. 430 s.
14. Шойхет Б.А. Одно энергетическое тождество в физически нелинейной теории упругости и оценки погрешности уравнений плит // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 317–326.
15. Кондратьев В.А., Олейник О.А. О зависимости констант в неравенстве Корна от параметров, характеризующих геометрию области // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44. № 6. С. 157–158.
16. Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Задачи Дирихле в областях с тонкими перемиками // Сиб. мат. ж. 1984. Т. 25. № 2. С. 161–179.
17. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. № 1.
18. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.
19. Назаров С.А., Шойхет Б.А. Об эллиптичности плоской задачи теории упругости в напряжениях // Изв. вузов. Математика. 1988. № 1. С. 57–66.
20. Полякова О.Р. Коэффициенты интенсивности напряжений для трещины, параллельной границе полупространства. Л., 1990. 20 с. — Деп. в ВИНТИ 09.08.90. № 4547–В90.
21. Nazarov S.A. Asymptotics of the Stokes system solutions at a surfaces contact point // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1991. V. 312. № 1. P. 207–211.
22. Назаров С.А. Поведение на бесконечности решений систем Ламе и Стокса в секторе слоя // Докл. АН АрмССР. 1988. Т. 87. № 4. С. 156–159.
23. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
24. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991. 336 с.

Санкт-Петербург

3 Прикладная математика и механика, № 5

Поступила в редакцию

26.XI.1991

769