Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 5, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Ю.Д. Каплунов, Е.В. Нольде

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Дается асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений теории упругости для случая изгиба пластин. Считается, что два безразмерных параметра (показатель изменяемости и показатель динамичности), характеризующие напряженно-деформированное состояние (НДС) пластины, изменяются независимо. Установлены асимптотики НДС пластины при различных значениях указанных параметров. Выявлены случаи, для которых уравнения классической теории пластин не являются первым асимптотическим приближением уравнений теории упругости.

В первых публикациях [1], посвященных построению двумерной теории пластин методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости, рассматривалась статическая задача. Такая задача характеризуется малым безразмерным параметром, равным отношению толщины пластины к характерной длине рисунка деформации. В динамике появляется еще один малый параметр, равный отношению времени прохождения волной сдвига расстояния между лицевыми поверхностями пластины к характерному временно́му масштабу изучаемых процессов. В публикациях, посвященных асимптотическому построению двумерной динамической теории пластин, обычно считалось, что между этими двумя параметрами существует связь [2]. Таким образом, априори ограничивался класс рассматриваемых поверхностных нагрузок.

Здесь предпринимается попытка общего двухпараметрического анализа динамического изгиба пластин: указанные асимптотические параметры полагаются независимыми. Как показано ниже, это приводит к значительному увеличению числа вариантов для асимптотики НДС пластины.

1. Постановка задачи. Определим положение точек пластины в трехмерном пространстве радиус-вектором $\mathbf{R} = \mathbf{r}(x^1, x^2) + x^3\mathbf{n}$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор срединной плоскости S, $\mathbf{n}$ – единичный вектор ее нормали, (x^1, x^2) – параметры криволинейных координат на S, а x^3 – расстояние, отсчитываемое от S по нормали. Обозначим через $a_{\alpha\beta}$ метрический тензор срединной плоскости S (здесь и в дальнейшем считается, что греческие индексы могут иметь значения 1, 2), σ^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ – тензор напряжений и зададим вектор смещений упругой среды $\mathbf{u}$ формулой $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{r}_\alpha + w\mathbf{n}$.

Тогда трехмерные динамические уравнения теории упругости запишутся так:

уравнения движения

$$\begin{aligned} &\nabla_\alpha \sigma^{\alpha\beta} + \partial\sigma^{3\beta}/\partial x^3 - \rho\partial^2 u^\beta/\partial t^2 = 0 \\ &\nabla_\alpha \sigma^{3\alpha} + \partial\ {}^{33}/\partial x^3 - \rho\partial^2 w/\partial t^2 = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

формулы "перемещения–напряжения"

$$\begin{aligned} &E\partial w/\partial x^3 = \sigma^{33} - \nu a_{\lambda\mu}\sigma^{\lambda\mu} \\ &E(\nabla_\alpha w + \partial u_\alpha/\partial x^3) = 2(1+\nu)a_{\lambda\alpha}\sigma^{3\lambda} \\ &Ee_{\alpha\beta} = (1+\nu)\sigma_{\alpha\beta} - \nu a_{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\sigma_{\lambda\mu} - \nu a_{\alpha\beta}\sigma^{33} \\ &e_{\alpha\beta} = ½(\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь ∇_α – символ ковариантного дифференцирования, ρ – плотность материала пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Кроме того, будем учитывать лицевые условия

$$\sigma^{33}|_{x^3=\pm h} = \pm Q^3, \quad \sigma^{3\alpha}|_{x^3=\pm h} = Q^\alpha \tag{1.3}$$

в которых Q^α, Q^3 – тензоры тангенциальной и нормальной поверхностной нагрузки, $2h$ – толщина пластины.

В (1.3) предполагается, что внешние силы приложены к обеим лицевым плоскостям таким образом, что в пластине реализуется только антисимметричное относительно срединной плоскости НДС (НДС изгиба). Внешние нагрузки общего вида помимо НДС изгиба приводят к появлению симметричного относительно срединной плоскости НДС (НДС растяжения и обжатия). Вопрос об асимптотическом определении последнего в настоящей статье не обсуждается.

Будем считать, что относительная полутолщина пластины $\eta = h/R$ мала (R – характерный линейный размер в плоскости S). Следуя схеме асимптотического подхода [2, 3], выполним преобразование растяжения масштабов независимых переменных по формулам ($c_s = (E/\rho)^{1/2}$)

$$x^\alpha = R\eta^q \xi^\alpha, \quad x^3 = R\eta\zeta, \quad t = Rc_s^{-1}\eta^a \tau \tag{1.4}$$

и будем полагать, что дифференцирование любой кратности по переменным ξ^α, ζ, τ не меняет асимптотического порядка искомых величин.

Числа q и a в формулах (1.4) – соответственно показатель изменяемости и показатель динамичности искомого НДС. Показатель изменяемости характеризует длину рисунка деформации, а показатель динамичности – скорость протекания рассматриваемых процессов во времени.

Будем считать, что показатели q и a независимы, и подчиним их лишь неравенствам

$$q < 1, \quad a < 1 \tag{1.5}$$

которые являются необходимыми условиями существования любой двумерной теории пластин. Эти неравенства означают, что рассматриваются только такие НДС, для которых характерная длина рисунка деформации значительно превышает толщину пластины и характерный временной масштаб намного больше, чем время прохождения волной сдвига расстояния между лицевыми плоскостями.

Наиболее часто встречающимся в литературе случаям соответствуют следующие дополнительные ограничения, накладываемые на показатели q и a: $a \to -\infty$ (статика), $a = 2q - 1$ (свободные изгибные колебания). Класс поверхностных нагрузок, определяемый условием $a \leqslant 2q - 1$, подробно рассматривался ранее [2].

Асимптотика искомого НДС существенным образом зависит от вида поверхностной нагрузки. Рассмотрим сначала случай, когда тангенциальная поверхностная нагрузка отсутствует.

2. Асимптотическое интегрирование (случай $Q^\alpha = 0$). Введем безразмерные перемещения и напряжения

$$\begin{gathered} w = Rw^*, \quad u_\alpha = R\eta^{1-q}u_\alpha^* \\ \sigma^{\alpha\beta} = E\eta^{1-2q-c}\sigma_*^{\alpha\beta}, \quad \sigma^{3\alpha} = E\eta^{2-3q-c}\sigma_*^{3\alpha} \\ \sigma^{33} = E\eta^{3-4q-b}\sigma_*^{33} \end{gathered} \tag{2.1}$$

и примем, что b и c – числа, которые задаются следующим образом:

$$\begin{gathered} b = \begin{cases} 0, & a \leqslant 2q - 1 \\ 2 + 2a - 4q, & a \geqslant 2q - 1 \end{cases} \\ c = \begin{cases} 0, & a \leqslant q \\ 2a - 2q, & a \geqslant q \end{cases} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Кроме того, будем считать, что все величины, отмеченные в (2.1) звездочкой, имеют вид $O(\eta^\kappa)$ при одинаковых κ для всех этих величин. Тогда формулами (2.1), (2.2)

Таблица 1

χ	$a \leqslant 2q-1$	$2q-1 \leqslant a \leqslant q$	$a \geqslant q$
$2q-2a+c$	$2q-2a (\geqslant 2-2q)$	$2q-2a$	0
$4q-2a-2+b$	$4q-2a-2$	0	0
$4-4q-b$	$4-4q$	$2-2a$	$2-2a$
$2-2q-c$	$2-2q$	$2-2q$	$2-2a$
$2-2q+c-b$	$2-2q$	$2q-2a$	0

Таблица 2

χ	$a \leqslant 2q-1$	$2q-1 \leqslant a \leqslant q$	$a \geqslant q$
$b-c$	0	$2+2a-4q$	$2-2q$
$2q-2a+b-c$	$2q-2a \; (\geqslant 2-2q)$	$2-2q$	$2-2a$
$b-2c$	0	$2+2a-4q$	$2-2a$
$4q-2a-2+b$	$4q-2a-2$	0	0
$4-4q-2c$	$4-4q$	$4-4q$	$4-4a$
$2-2q-c$	$2-2q$	$2-2q$	$2-2a$
$2-2q+c-b$	$2-2q$	$2q-2a$	0

определяются асимптотические свойства динамического НДС пластины, работающей на изгиб.

Перепишем уравнения равновесия (1.1) и формулы "перемещения – напряжения" (1.2) при учете (1.4), (2.1):

$$\begin{aligned}
&\partial\sigma_*^{3\beta}/\partial\zeta = -\nabla_\alpha^*\sigma_*^{\alpha\beta} + \eta^{2q-2a+c}\partial^2 u_*^\beta/\partial\tau^2\\
&\partial\sigma_*^{33}/\partial\zeta = -\eta^{b-c}\nabla_\alpha^*\sigma_*^{3\alpha} + \eta^{4q-2a-2+b}\partial^2 w^*/\partial\tau^2\\
&\partial w^*/\partial\zeta = \eta^{4-4q-b}\sigma_*^{33} - \nu\eta^{2-2q-c}a_{\lambda\mu}\sigma_*^{\lambda\mu}\\
&\partial u_\alpha^*/\partial\zeta = -\nabla_\alpha^* w^* + 2(1+\nu)\eta^{2-2q-c}a_{\lambda\alpha}\sigma_*^{3\lambda}\\
&\sigma_*^{\alpha\beta} = (1-\nu^2)^{-1}\eta^c[(1-\nu)e_*^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta}a_{\lambda\mu}e_*^{\lambda\mu}] + \nu(1-\nu)^{-1}\eta^{2-2q+c-b}a^{\alpha\beta}\sigma_*^{33}\\
&e_{\alpha\beta}^* = ½(\nabla_\beta^* u_\alpha^* + \nabla_\alpha^* u_\beta^*) \quad (\nabla_\alpha^* = R\eta^q\nabla_\alpha)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Оператор ∇_α^*, так же как и операторы $\partial/\partial\xi^1$, $\partial/\partial\xi^2$, не меняет асимптотического порядка искомых величин.

Рассмотрим подробнее систему уравнений (2.3). Входящие в (2.3) множители вида η^χ определяют асимптотический порядок отдельных слагаемых в трехмерных уравнениях теории упругости. В табл. 1 приведены значения показателей χ в зависимости от соотношения между параметрами q и a. Можно удостовериться, что при выполнении неравенств (1.5) в (2.3) во всех явно выписанных степенях η показатели неотрицательны.

Пусть сначала $a \leqslant 2q - 1$. Можно убедиться, что в рамках погрешности $\delta_1 = O(\eta^{2-2q})$ в (2.3) можно пренебречь членами, соответствующими учету тангенциальных сил инерции, изменения прогиба w по толщине, деформации сдвига и пуассонова влияния напряжения σ^{33} на напряжения $\sigma^{\alpha\beta}$. Таким образом, в рамках погрешности δ_1 оказываются справедливыми все предположения, лежащие в основе классической теории изгиба пластин. Отметим, что погрешность δ_1 совпадает с погрешностью общей статической теории оболочек типа Кирхгофа – Лява [3].

При $a \geqslant q$ даже в самом грубом приближении следует учитывать в (2.3) члены, соответствующие тангенциальным силам инерции и пуассонову влиянию напряжения σ^{33} на тангенциальные напряжения $\sigma^{\alpha\beta}$, т.е. те члены, которыми в классической теории пластин обычно пренебрегают. При $a \geqslant q$ асимптотически второстепенные члены в обсуждаемой системе уравнений имеют порядок η^{2-2a} (табл. 1).

Случай $2q - 1 < a < q$ является промежуточным. Для него еще выполняются все гипотезы классической теории, однако погрешность $O(\eta^{2q-2a})$, связанная с их принятием, будет большей, чем в статике.

Приведенные рассуждения показывают, что погрешность общей динамической теории изгиба пластин будет зависеть от двух параметров. Для асимптотической теории первого приближения она имеет вид

$$\delta_2 = O(\eta^{2-2q} + \eta^{2-2a}) \tag{2.4}$$

Перейдем к интегрированию системы уравнений (2.3) по поперечной координате ζ. Можно непосредственно убедиться, что существует полиномиальный по ζ класс трехмерных НДС, описываемых с точностью δ_2 уравнениями (2.3) и лицевыми условиями (1.3). Он определяется формулами

$$\begin{gathered}
w^* = w^{(0)}, \quad u_\alpha^* = \zeta u_\alpha^{(1)}, \quad e_{\alpha\beta}^* = \zeta e_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad \sigma_*^{\alpha\beta} = \zeta \sigma_{(1)}^{\alpha\beta} \\
\sigma_*^{3\beta} = \sigma_{(0)}^{3\beta} + \zeta^2 \sigma_{(2)}^{3\beta}, \quad \sigma_*^{33} = \zeta \sigma_{(1)}^{33} + \zeta^3 \eta^{b-c} \sigma_{(3)}^{33}
\end{gathered} \tag{2.5}$$

в которых величины, отмеченные дополнительным числовым индексом в скобках, являются функциями переменных ξ_1, ξ_2, τ или, что то же, x_1, x_2, t и имеют вид $O(\eta^\kappa)$ при одинаковых κ для всех этих величин. Они связаны между собой равенствами

$$\begin{gathered}
u_\alpha^{(1)} = -\nabla_\alpha^* w^{(0)}, \quad e_{\alpha\beta}^{(1)} = \tfrac{1}{2}(\nabla_\beta^* u_\alpha^{(1)} + \nabla_\alpha^* u_\beta^{(1)}) \\
\sigma_{(1)}^{\alpha\beta} = (1-\nu^2)^{-1} \eta^c [(1-\nu) e_{(1)}^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta} a_{\lambda\mu} e_{(1)}^{\lambda\mu}] + \\
+ \nu(1-\nu)^{-1} \eta^{2-2q+c-b} a^{\alpha\beta} \sigma_{(1)}^{33} \\
\sigma_{(2)}^{3\beta} = -\tfrac{1}{2} \nabla_\alpha^* \sigma_{(1)}^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2} \eta^{2q-2a+c} \partial^2 u_{(1)}^\beta / \partial\tau^2 \\
\sigma_{(0)}^{3\beta} = -\sigma_{(2)}^{3\beta}, \quad \sigma_{(1)}^{33} = -\eta^{b-c} \nabla_\alpha^* \sigma_{(0)}^{3\alpha} + \eta^{4q-2a-2+b} \partial^2 w^{(0)} / \partial\tau^2 \\
\sigma_{(3)}^{33} = -\tfrac{1}{3} \nabla_\alpha^* \sigma_{(2)}^{3\alpha}, \quad \sigma_{(1)}^{33} + \eta^{b-c} \sigma_{(3)}^{33} = Q_*^3 \qquad (Q_*^3 = E^{-1} \eta^{4q-3+b} Q^3)
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Безразмерная нагрузка Q_*^3 не превосходит по порядку величин, отмеченных в (2.1) звездочкой (это следует из (2.1) и лицевых условий (1.3)).

Для проверки сформулированного результата надо подставить соотношения (2.5), (2.6) в уравнения (2.3), а также в лицевые условия (1.3) и всюду в выкладках отбрасывать величины порядка δ_2 по сравнению с единицей.

3. Асимптотическое интегрирование (случай $Q^3 = 0$). Рассмотрим случай, когда отсутствует нормальная поверхностная нагрузка. Асимптотику искомого НДС зададим равенствами

$$\begin{gathered}
w = R w^*, \quad u_\alpha = R \eta^{1-q-c} u_\alpha^* \\
\sigma^{\alpha\beta} = E \eta^{1-2q-c} \sigma_*^{\alpha\beta}, \quad \sigma^{3\alpha} = E \eta^{2-3q-b} \sigma_*^{3\alpha} \\
\sigma^{33} = E \eta^{3-4q-2c} \sigma_*^{33}
\end{gathered} \tag{3.1}$$

По-прежнему считаем, что показатели q и a подчиняются неравенствам (1.5), а числа b и c определяются формулами (2.2).

Уравнения трехмерной теории упругости (1.1), (1.2), применив, как и раньше, преобразование независимых переменных (1.4), при учете (3.1) перепишем так:

$$\begin{aligned}
&\partial\sigma_*^{3\beta}/\partial\zeta = -\eta^{b-c}\nabla_\alpha^*\sigma_*^{\alpha\beta} + \eta^{2q-2a+b-c}\partial^2 u_*^\beta/\partial\tau^2\\
&\eta^{b-2c}\partial\sigma_*^{33}/\partial\zeta = -\nabla_\alpha^*\sigma_*^{3\alpha} + \eta^{4q-2a-2+b}\partial^2 w^*/\partial\tau^2\\
&\partial w^*/\partial\zeta = \eta^{4-4q-2c}\sigma_*^{33} - \nu\eta^{2-2q-c}a_{\lambda\mu}\sigma_*^{\lambda\mu}\\
&\partial u_\alpha^*/\partial\zeta = -\eta^c\nabla_\alpha^* w^* + 2(1+\nu)\eta^{2-2q+c-b}a_{\lambda\alpha}\sigma_*^{3\lambda}\\
&\sigma_*^{\alpha\beta} = (1-\nu^2)^{-1}[(1-\nu)e_*^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta}a_{\lambda\mu}e_*^{\lambda\mu}] + \nu(1-\nu)^{-1}\eta^{2-2q-c}a^{\alpha\beta}\sigma_*^{33}\\
&e_{\alpha\beta}^* = ½(\nabla_\beta^* u_\alpha^* + \nabla_\alpha^* u_\beta^*)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Из (3.2) и табл. 2 (аналогичной табл. 1) видно, что при построении теории изгиба пластин с погрешностью δ_2 деформацию поперечного сдвига надо учитывать, а тангенциальными силами инерции, изменением прогиба по толщине и пуассоновым влиянием напряжения σ^{33} на напряжения $\sigma^{\alpha\beta}$ можно пренебречь.

Можно проверить, что с точностью δ_2 система (3.2) имеет решения, в которых величины, отмеченные в (3.1) звездочкой, задаются равенствами

$$\begin{aligned}
&w^* = w^{(0)}, \quad u_\alpha^* = \zeta u_\alpha^{(1)}, \quad e_{\alpha\beta}^* = \zeta e_{\alpha\beta}^{(1)}\\
&\sigma_*^{\alpha\beta} = \zeta\sigma_{(1)}^{\alpha\beta}, \quad \sigma_*^{3\beta} = \sigma_{(0)}^{3\beta} + \zeta^2\eta^{b-c}\sigma_{(2)}^{3\beta}\\
&\sigma_*^{33} = \zeta\sigma_{(1)}^{33} + \zeta^3\sigma_{(3)}^{33}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

определяющими закон изменения искомого НДС по толщинной переменной ζ. Величины, отмеченные в (3.3) дополнительными числовыми индексами в скобках, зависят лишь от ξ^1, ξ^2, τ и связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned}
&u_\alpha^{(1)} = -\eta^c\nabla_\alpha^* w^{(0)} + 2(1+\nu)\eta^{2-2q+c-b}a_{\lambda\alpha}\sigma_{(0)}^{3\lambda}\\
&e_{\alpha\beta}^{(1)} = ½(\nabla_\beta^* u_\alpha^{(1)} + \nabla_\alpha^* u_\beta^{(1)})\\
&\sigma_{(1)}^{\alpha\beta} = (1-\nu^2)^{-1}[(1-\nu)e_{(1)}^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta}a_{\lambda\mu}e_{(1)}^{\lambda\mu}]\\
&\sigma_{(2)}^{3\beta} = -½\nabla_\alpha^*\sigma_{(1)}^{\alpha\beta}\\
&\sigma_{(1)}^{33} = \eta^{2c-b}[-\nabla_\alpha^*\sigma_{(0)}^{3\alpha} + \eta^{4q-2a-2+b}\partial^2 w^{(0)}/\partial\tau^2]\\
&\sigma_{(3)}^{33} = -⅓\eta^c\nabla_\alpha^*\sigma_{(2)}^{3\alpha} + ⅓\eta^{2q-2a+c}\partial^2 w^{(2)}/\partial\tau^2\\
&\sigma_{(1)}^{33} + \sigma_{(3)}^{33} = 0, \quad \sigma_{(0)}^{3\beta} + \eta^{b-c}\sigma_{(2)}^{3\beta} = Q_*^\beta\\
&(Q_*^\beta = E^{-1}\eta^{3q-2+b}Q^\beta, \ w^{(2)} = -½\nu a_{\lambda\mu}\sigma_{(1)}^{\lambda\mu})
\end{aligned} \tag{3.4}$$

4. Двумерные уравнения в усилиях и моментах. Получим двумерные уравнения изгиба пластин относительно тензора моментов $M^{\alpha\beta}$, тензора перерезывающих усилий N^β и прогиба срединной плоскости W. Введем их при помощи следующих формул:

$$W = w|_{x^3=0}, \quad M^{\alpha\beta} = \int_{-h}^{h}\sigma^{\alpha\beta}x^3dx^3, \quad N^\beta = \int_{-h}^{h}\sigma^{3\beta}dx^3 \tag{4.1}$$

Используя соотношения разд. 2, 3, после преобразований можно получить уравнения в терминах W, $M^{\alpha\beta}$, N^α для случаев $Q^\alpha = 0$ и $Q^3 = 0$. Объединяя их таким образом, чтобы сохранились все члены, соответствующие каждому из этих случаев, и пренебрегая величинами порядка δ_2, получим:

соотношения "моменты–прогиб"

$$M^{\alpha\beta} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[(1-\nu)\nabla^\alpha\nabla^\beta W + \nu a^{\alpha\beta}\Delta W] +$$

$$+\frac{2}{3}h^3[\nabla^\alpha Q^\beta + \nabla^\beta Q^\alpha + \frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}\nabla_\lambda Q^\lambda] +$$

$$+\frac{2}{3}h^2\frac{\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}Q^3 \quad (\Delta = a^{\lambda\mu}\nabla_\lambda\nabla_\mu) \qquad (4.2)$$

уравнения движения

$$\begin{aligned} &\Delta_\alpha M^{\alpha\beta} - N^\beta + 2hQ^\beta + \tfrac{2}{3}\rho h^3\nabla^\beta\partial^2 W/\partial t^2 = 0 \\ &\nabla_\alpha N^\alpha + 2Q^3 - 2\rho h\partial^2 W/\partial t^2 = 0 \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Выписанные уравнения отличаются от уравнений классической теории пластин присутствием в соотношениях (4.2) членов, зависящих от поверхностных нагрузок Q^α и Q^3, а также инерционного члена в моментном уравнении движения (4.3). В рамках погрешности δ_2 в этом уравнении можно осуществить замену

$$\tfrac{2}{3}\rho h^3\nabla^\beta\partial^2 W/\partial t^2 \to \tfrac{2}{3}h^2\nabla^\beta Q^3$$

Ситуации, когда указанные "неклассические" члены становятся асимптотически главными, выявляются при помощи рассуждений из разд. 2, 3.

Выражая в уравнениях движения перерезывающие силы и моменты через прогиб W и отбрасывая члены порядка δ_2, приходим к разрешающему уравнению классической теории пластин

$$\tfrac{2}{3}(1-\nu^2)^{-1}Eh^3\Delta^2 W + 2\rho h\partial^2 W/\partial t^2 = 2Q^3 + 2h\nabla_\lambda Q^\lambda \qquad (4.4)$$

Отметим, что при выполнении условия $|Q^3 + h\nabla_\lambda Q^\lambda| \ll |Q^3|$ относительный асимптотический порядок прогиба может оказаться меньшим, чем это диктуется асимптотиками (2.1), (3.1). Например, может реализоваться случай $w \sim u_\alpha$. НДС с такой асимптотикой характерны для пластин с неклассическими граничными условиями на лицевых плоскостях [4, 5].

Авторы благодарят А.Л. Гольденвейзера за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668–686.
2. *Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В.* Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко–Рейсснера // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 124–138.
3. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
4. *Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.* Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией // Тр. IV симпоз. по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск, 1984. Новосибирск: Наука, 1984. С. 105–110.
5. *Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.* Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 271–278.

Москва

Поступила в редакцию
11.X.1991