Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 5, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Д.Д. Захаров

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТОНКОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Асимптотическим методом [1–4] выведены двумерные динамические уравнения пластинки из N анизотропных слоев с плоскостями упругой симметрии, параллельными лицевым поверхностям. Показано, что в отличие от изотропно-слоистых пластинок [4] они не сводятся к уравнениям для эквивалентной монопластинки и первая гипотеза Кирхгофа оказывается неприменимой. Найден полный тензор напряжений, включающий асимптотически малые компоненты, а также интегральные характеристики пакета. Проанализированы общие случаи разделения задач изгиба и продольного растяжения–сжатия–сдвига и рассмотрены некоторые частные анизотропные структуры. Для решения статических задач предложено представление искомых функций в виде функций комплексного переменного.

1. Рассмотрим слоистую пластину, составленную из N анизотропных линейно упругих слоев, полностью скрепленных по горизонтальным плоскостям контакта и таких, что в каждой точке имеется горизонтальная плоскость упругой симметрии. Так будет, например, при склеивании однонаправленных композитов с повернутыми горизонтальными главными осями. Положение слоев зафиксируем декартовыми координатами:

$$X_1,\ X_2 \in \Omega \subset R^2, \quad Z_j \leqslant X_3 \equiv Z \leqslant Z_{j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, N)$$

Пусть $H_j = Z_{j+1} - Z_j$ – толщина j-го слоя, ρ_j – плотность, $\mathbf{G}_j$ – матрица жесткостей, H_0, ρ_0, E_0, $c_0 = (E_0/\rho_0)^{1/2}$, T_0 – полутолщина и характерные значения плотности, модуля упругости, скорости и времени динамических процессов для всего пакета. Считая, что изменяемость напряженно-деформируемого состояния в продольном направлении определяется минимальным характерным размером L_0 (зависящим от внешних воздействий и геометрии пластины), далее всюду используем безразмерные переменные, перемещения, напряжения и матрицу жесткостей

$$(x_1, x_2) = \frac{(X_1,\ X_2)}{L_0}, \quad z = \frac{Z}{H_0}, \quad t = \frac{T}{T_0}, \quad \mathbf{g} = \frac{\mathbf{G}}{E_0}$$

$$(\mathbf{u}, w) \equiv (u_1, u_2, w) = \frac{\mathbf{U}}{H_0}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\Sigma_{\alpha\beta}}{E_0}$$

Верхний индекс j, где это необходимо, будет указывать номер слоя. Внешние нагрузки сосредоточены на лицевых поверхностях пластины

$$\sigma_3 = \sigma^{\mp}(x_1, x_2, t), \quad \tau \equiv (\sigma_{13}, \sigma_{23}) = \tau^{\mp}(x_1, x_2, t) \tag{1.1}$$

$$(z^{\mp} = z_1,\ z_{N+1})$$

и являются достаточно медленно меняющимися функциями. На границах раздела непрерывны перемещения и соответствующие напряжения

$$\sigma_{\alpha 3}^{j} = \sigma_{\alpha 3}^{j-1}, \quad (\mathbf{u}, w)^j = (\mathbf{u}, w)^{j-1}, \quad z = z_j, \quad j = 2, 3, \ldots, N \tag{1.2}$$

Предположим, что величина $\epsilon = H_0/L_0$ является малым параметром системы, $T_0 = \epsilon^{\tau-1}L_0/c_0$ (ниже рассматриваем случай $\tau = 0$) и отношения толщин слоев, жесткостей и плотностей не образуют новых малых (больших) параметров.

Трехмерные динамические уравнения теории упругости для каждого слоя приводятся к виду:

$$\partial_z^2 w + \epsilon\partial_z \mathbf{M}_3\mathbf{u} + \epsilon^2 N_3 w - \rho(\rho_0 g_{33})^{-1}\partial_t^2 w = 0 \tag{1.3}$$

$$\partial_z^2 \mathbf{K}_1\mathbf{u} + \epsilon\partial_z M_1 w + \epsilon^2 \mathbf{N}_1\mathbf{u} - \rho(\rho_0 g_{55})^{-1}\partial_t^2 u_1 = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$g_{33}\mathbf{M}_3 = \mathbf{i}_1\{(g_{13}+g_{55})\partial_1 + (g_{45}+g_{36})\partial_2\} + \mathbf{i}_2\{(g_{45}+g_{36})\partial_1 + (g_{23}+g_{44})\partial_2\}$$

$$g_{33}N_3 = g_{55}\partial_1^2 + 2g_{45}\partial_{12}^2 + g_{44}\partial_2^2$$

$$g_{55}\mathbf{K}_1 = g_{55}\mathbf{i}_1 + g_{45}\mathbf{i}_2, \quad g_{55}M_1 = (g_{13}+g_{55})\partial_1 + (g_{45}+g_{36})\partial_2$$

$$g_{55}\mathbf{N}_1 = \mathbf{i}_1\{g_{11}\partial_1^2 + 2g_{16}\partial_{12}^2 + g_{66}\partial_2^2\} + \mathbf{i}_2\{g_{16}\partial_1^2 + (g_{12}+g_{66})\partial_{12}^2 + g_{26}\partial_2^2\}$$

При решении системы уравнений (1.3) воспользуемся разложением неизвестных функций в асимптотические ряды по степеням ϵ^s [1, 2, 5] в каждом слое ($s = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\mathbf{u} = \epsilon^{\lambda+1}\Sigma\epsilon^s\mathbf{u}^{(s)}, \quad w = \epsilon^{\lambda}\Sigma\epsilon^s w^{(s)} \tag{1.4}$$

что приводит к уравнениям для компонент перемещений

$$\begin{aligned} &\partial_z^2 w^{(s)} + \partial_z\mathbf{M}_3\mathbf{u}^{(s-2)} + N_3 w^{(s-2)} - \rho(\rho_0 g_{33})^{-1}\partial_t^2 w^{(s-4+2\tau)} = 0 \\ &\partial_z^2\mathbf{K}_1\mathbf{u}^{(s)} + \partial_z M_1 w^{(s)} + \mathbf{N}_1\mathbf{u}^{(s-2)} - \rho(\rho_0 g_{55})^{-1}\partial_t^2 u_1^{(s-4+2\tau)} = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

2. Интегрируя систему (1.5) для случая $s = 0, 1$, получаем в предположении $\tau < 2$ разложения s-компонент по переменной z

$$w^{(s)} = w_0^{(s)} + zw_1^{(s)}, \quad \mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{u}_0^{(s)} + z\mathbf{u}_1^{(s)} + z^2/2\,\mathbf{u}_2^{(s)}$$

$$2\mathbf{K}_\beta\mathbf{u}_2^{(s)} = -M_\beta w_1^{(s)}, \quad \sigma_\alpha^{(s)} = g_{\alpha 3}w_1^{(s)} \quad (\alpha = 1, 2, 3;\ \beta = 1, 2) \tag{2.1}$$

$$\sigma_{13}^{(s)} = g_{45}[u_{21} + \partial_2 w_0]^{(s)} + g_{55}[u_{11} + \partial_1 w_0]^{(s)} + 2z[g_{45}u_{22} + g_{55}u_{12}]^{(s)} \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\sigma_{12}^{(s)} = \begin{cases} g_{36}w_1^{(s)}, & g_{36} \neq 0 \\ (g_{16}\partial_1 + g_{66}\partial_2)u_1^{(s)} + (g_{66}\partial_1 + g_{26}\partial_2)u_2^{(s)}, & g_{36} = 0 \end{cases}$$

В силу необходимой независимости напряжений σ_α и условий (1.2) заключаем, что независимо от индекса слоя j

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_0^{(s)} - z\,\mathrm{grad}\,w_0^{(s)}, \quad \sigma_\alpha^{(s)} = \sigma_{\beta 3}^{(s)} = w_1^{(s)} = u_{\beta 2}^{(s)} \equiv 0$$

а также

$$\sigma_{12}^{(j,s)} = \begin{cases} 0, & g_{36}^j \neq 0 \\ [\mathbf{i}_1(g_{16}\partial_1 + g_{66}\partial_2) + \mathbf{i}_2(g_{66}\partial_1 + g_{26}\partial_2)]_j(\mathbf{u}_0 - z\,\mathrm{grad}\,w_0)^{(s)}, & g_{36}^j = 0 \end{cases}$$

Функции в правой части равенств зависят лишь от переменных x_1, x_2, t. Вообще для разложений s-компонент в степенные ряды по z вида

$$\mathbf{u}^{(s)} = \sum_{k=0}^{K} z^k\mathbf{u}_k^{(s)}, \quad w^{(s)} = \sum_{k=0}^{K} z^k w_k^{(s)}, \quad K = 2\left[\frac{s}{2}\right]$$

выполняются рекуррентные соотношения в каждом слое

$$(k+2)(k+1)\,w_{k+2}^{(s)} + (k+1)\mathbf{M}_3\mathbf{u}_{k+1}^{(s-2)} + N_3 w_k^{(s-2)} - \rho(\rho_0 g_{33})^{-1}\partial_t^2 w_k^{(s-4+2\tau)} = 0 \tag{2.2}$$

$$(k+2)(k+1)\mathbf{K}_1\mathbf{u}_{k+2}^{(s)} + (k+1)M_1 w_{k+1}^{(s)} + \mathbf{N}_1\mathbf{u}_k^{(s-2)} - \rho(\rho_0 g_{55})^{-1}\partial_t^2 u_{1k}^{(s-4+2\tau)} = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

3. При анализе компонент с индексами $s + 2 = 2, 3$ и последующими их значениями выбираем $\tau = 0$ ($T \sim L_0/c_0\epsilon$ и частота в гармонической задаче $\omega_0 \sim 2\pi c_0\epsilon/L_0$).

Тем самым не рассматриваем вариант квазистатических уравнений для всех перемещений ($\tau < 0$), а также появление во всех уравнениях инерционных членов ($\tau > 0$, когда возбуждаются короткие волны и нарушается условие $\epsilon \ll 1$). Ограничимся обобщением классической длинноволновой теории пластин Кирхгофа – Лява. Из рекуррентных соотношений (2.2) в каждом слое следует

$$\begin{gathered}2w_2^{(s+2)} = L_2 w_0^{(s)}, \quad 6\mathbf{K}_\beta \mathbf{u}_3^{(s+2)} = (\mathbf{N}_\beta \mathrm{grad} - M_\beta L_2)\, w_0^{(s)} \\ 2\mathbf{K}_\beta \mathbf{u}_2^{(s+2)} = -M_\beta w_1^{(s+2)} - \mathbf{N}_\beta \mathbf{u}_0^{(s)}, \quad \sigma_{31}^{(s+2)} = 0\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$L_2 = \mathbf{M}_3 \mathrm{grad} - N_3 = \mathbf{L}_1 \mathrm{grad}$$

$$g_{33}\mathbf{L}_1 = \mathbf{i}_1(g_{13}\partial_1 + g_{36}\partial_2) + \mathbf{i}_2(g_{36}\partial_1 + g_{23}\partial_2)$$

В силу произвольности граничных условий (1.1) остается потребовать, чтобы

$$\sigma_{30}^{(s+2)} = 0, \quad w_1^{(s+2)} = -\mathbf{L}_1 \mathbf{u}_0^{(s)}, \quad 2\mathbf{K}_\beta \mathbf{u}_2^{(s+2)} = [\mathbf{M}_\beta \mathbf{L}_1 - \mathbf{N}_\beta]\,\mathbf{u}_0^{(s)} \tag{3.2}$$

Выясним структуру остальных напряжений. Из закона Гука при учете (3.1), (3.2) получаем

$$\begin{gathered}\sigma_1^{(j,s+2)} = \sigma_{10}^{(j,s+2)} + z\sigma_{11}^{(j,s+2)} = \mathbf{d}_1(\gamma_{pq}^j)\,\mathbf{u}_0^{(s)} - \mathbf{d}_1(z\gamma_{pq}^j)\,\mathrm{grad}\, w_0^{(s)} \\ \sigma_{12}^{(j,s+2)} = \sigma_{120}^{(j,s+2)} + z\sigma_{121}^{(j,s+2)} = \mathbf{d}(\gamma_{pq}^j)\,\mathbf{u}_0^{(s)} - \mathbf{d}(z\gamma_{pq}^j)\,\mathrm{grad}\, w_0^{(s)}\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\mathbf{d}_1(\gamma_{pq}) \equiv \mathbf{i}_1(\gamma_{11}\partial_1 + \gamma_{16}\partial_2) + \mathbf{i}_2(\gamma_{16}\partial_1 + \gamma_{12}\partial_2) \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\mathbf{d}(\gamma_{pq}) \equiv \mathbf{i}_1(\gamma_{16}\partial_1 + \gamma_{66}\partial_2) + \mathbf{i}_2(\gamma_{66}\partial_1 + \gamma_{26}\partial_2), \quad \gamma_{pq} \equiv g_{pq} - g_{p3}g_{3q}/g_{33}$$

определяя $\sigma_{\beta 3}^{(j,s+2)}$ при помощи другой процедуры. В самом деле, поскольку поверхностная нагрузка не зависит от толщины и на границах раздела слоев выполнены равенства для контактных напряжений (1.1) и (1.2), должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\sigma_{\beta 30}^{(j,s+2)} = \frac{1}{2}\left\{(\tau_\beta^+ + \tau_\beta^-)\,\delta_{\lambda+s+3}^0 + \left[\sum_{n=1}^{j-1} - \sum_{j+1}^{N}\right]\sum_{k=1}^{K}(z_{n+1}^k - z_n^k)\,\sigma_{\beta 3k}^{(n,s+2)} - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{K}(z_{j+1}^k + z_j^k)\,\sigma_{\beta 3k}^{(j,s+2)}\right\}\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}(z_{j+1}^k - z_j^k)\,\sigma_{\beta 3k}^{(j,s+2)} = (\tau_\beta^+ - \tau_\beta^-)\,\delta_{\lambda+s+3}^0$$

Старшие компоненты $\sigma_{\beta 3k}^{(s+2)}$ имеют вид

$$\sigma_{131}^{(s+2)} = \mathbf{a}_1 \mathbf{u}_0^{(s)}, \quad \sigma_{132}^{(s+2)} = \tfrac{1}{2} b_1 w_0^{(s)} \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\mathbf{a}_1(\gamma_{pq}) = g_{55}(M_1\mathbf{L}_1 - \mathbf{N}_1) - l_1\mathbf{L}_1, \quad b_1 = -\mathbf{a}_1 \mathrm{grad}, \quad l_1 = g_{55}\partial_1 + g_{45}\partial_2$$

и после подстановки в (3.4) дают заключительные выражения для напряжений и совместную квазистатическую систему уравнений для продольных и поперечных напряжений.

Поскольку $\sigma_3^{(s+2)} = 0$ при $s = 0, 1$ и поверхностная нагрузка не зависит от ϵ, естественно положить $\lambda = -4$ и проверить разложения, отвечающие индексам $s + 4 = 4, 5$. В аналогичных (3.4) соотношениях для нормальных напряжений следует сделать замену: τ_β на σ, $\sigma_{\beta 3}$ на σ_3, K на $K - 1$ и выбрать символ Кронекера $\delta_{\lambda+s+4}^0$. Следуя закону Гука, при учете рекуррентных уравнений (2.2) определяем (при всех $s \geqslant 0$, $k > 0$) старшие компоненты нормальных напряжений в каждом слое

$$\sigma_{3k}^{(s+4)} = \frac{1}{k}\left\{\frac{\rho}{\rho_0}\partial_t^2 w^{(s+2\tau)} - \mathrm{div}\tau^{(s+2)}\right\}_{k-1}$$

Подставляя данные равенства получаем выражение для $\sigma_3^{(j,s+4)}$ и третье смешанное уравнение для нормального и продольного перемещений. Опуская громоздкие промежуточные выкладки и упрощения двойных сумм, приведем итоговый результат:

$$\sigma_{\beta 3}^{(j,s+2)} = \tau_\beta^\pm \delta_s^1 \mp \Sigma_\pm \left[h_n \mathbf{a}_\beta^n \mathbf{u}_0 + \frac{z_{n+1}^2 - z_n^2}{2} b_\beta^n w_0\right]^{(s)} + \tag{3.5}$$

$$+ (z - z_j^\pm)\, \mathbf{a}_\beta^j \mathbf{u}_0^{(s)} + \frac{z^2 - (z_j^\pm)^2}{2} b_\beta^j w_0^{(s)}$$

$$\sigma_3^{(j,s+4)} = \sigma^\pm \delta_s^0 + (z^\pm - z)\,\mathrm{div}\tau^\pm - \left[(z_j^\pm - z)\frac{\rho_j}{\rho_0} \pm \Sigma_\pm \frac{\rho_n h_n}{\rho_0}\right] \partial_t^2 w_0^{(s)} \pm$$

$$\pm \Sigma_\pm \left\{\left[h_n - \frac{z_{n+1}^2 - z_n^2}{2}\right] \mathbf{a}_*^n \mathbf{u}_0 + \left[\frac{z_{n+1}^2 - z_n^2}{2} - \frac{z_{n+1}^3 - z_n^3}{3}\right] b_*^n w_0\right\}^{(s)} -$$

$$- \frac{(z - z_j^\pm)^2}{2} \mathbf{a}_*^j \mathbf{u}_0^{(s)} - \left[\frac{z^3}{6} - \frac{z (z_j^\pm)^2}{2} + \frac{(z_j^\pm)^3}{3}\right] b_*^j w_0^{(s)}$$

$$\left\{ \Sigma_- = \sum_{n=1}^{j-1}, \quad \Sigma_+ = \sum_{n=j+1}^{N}, \quad z_j^\pm = z_{j+1}, z_j \right\}$$

$$\begin{aligned} &\rho_* \partial_t^2 w_0^{(s)} + \mathbf{A}_* \mathbf{u}_0^{(s)} + B_* w_0^{(s)} = (\sigma^+ - \sigma^-)\,\delta_s^0 + \mathrm{div}(z^+\tau^+ - z^-\tau^-)\,\delta_s^1 \\ &\mathbf{A}_\beta \mathbf{u}_0^{(s)} + B_\beta w_0^{(s)} = (\tau_\beta^+ - \tau_\beta^-)\,\delta_s^1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{a}_* \equiv \partial_1 \mathbf{a}_1 + \partial_2 \mathbf{a}_2 = -\mathbf{i}_1 b_1 - \mathbf{i}_2 b_2, \quad b_* \equiv \partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 = -\mathbf{a}_* \mathrm{grad}$$

$$\mathbf{A}_\beta \equiv \mathbf{a}_\beta (D_{pq}^1), \quad B_\beta \equiv b_\beta (D_{pq}^2), \quad \mathbf{A}_* \equiv \mathbf{a}_* (D_{pq}^2), \quad B_* \equiv b_* (D_{pq}^3) \tag{3.7}$$

$$D_{pq}^n \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} (z_{j+1}^n - z_j^n)\, \gamma_{pq}^j \qquad (n = 1, 2, 3;\ pq = 11, 12, 22, 16, 66, 26)$$

$$\rho_* = \sum_{j=1}^{N} \frac{h_j \rho_j}{\rho_0}$$

Соотношения (3.5), (3.3) представляют первые два члена разложения в асимптотические ряды всех компонент тензора напряжений; совместная система уравнений для перемещений задается соотношениями (3.6), (3.7) и выведена с точностью до слагаемых $O(\epsilon^2)$.

4. Укажем теперь порядки основных (размерных) физических величин, отвечающих приведенному выбору асимптотических разложений. Их поведение при $\epsilon \to +0$ сходно со случаем однородной пластинки [1]. Все они имеют вид

$$V = M\epsilon^\mu \{ v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + O(\epsilon^2) \}$$

где $r = 0$ отвечает задаче изгиба пластины нормальной нагрузкой, $r = 1$ соответствует реакции пластины на касательную нагрузку. Значения $M = L_0$ и $\mu = -3$, $\mu = -2$ имеют место для поперечных и продольных перемещений, $M = E_0$ и $\mu = -2$ для напряжений $\alpha\beta = 11, 12, 22$ и $\mu = -1$, $\mu = 0$ при $\alpha\beta = 13, 23$ и $\alpha\beta = 33$ (второстепенные напряжения не определяются в гипотетических теориях пластин).

Для изгибающих моментов $m_{\alpha\beta}$ ($M = E_0 L_0^2$), продольных и перерезывающих сил $q_{\alpha\beta}$, $q_{\beta 3}$ ($M = E_0 L_0$), полученных в результате интегрирования напряжений по сечению пластины в целом, порядки размерных величин уменьшаются в сравнении с порядками напряжений на двойку и единицу соответственно. Выражения для изгибающих моментов и продольных усилий аналогичны (3.3), но аргументы операторов вида

γ_{pq}, $z\gamma_{pq}$ заменяются на мембранно-изгибные и изгибные жесткости D^2_{pq}, D^3_{pq} для моментов или мембранные и мембранно-изгибные жесткости D^1_{pq}, D^2_{pq} для усилий. Выражения для перерезывающих усилий задаются равенством

$$q^{(s+2)}_{\beta 3} = -\mathrm{a}_\beta(D^2_{pq})\,\mathrm{u}^{(s)}_0 - b_\beta(D^3_{pq})\,w^{(s)}_0 + (z^+\tau^+_\beta - z^-\tau^-_\beta)\,\delta^1_s$$

и удовлетворяют уравнениям связи

$$q^{(s+2)}_{13} = \{\partial_1 m_1 + \partial_2 m_{12}\}^{(s+2)} + (z^+\tau^+_1 - z^-\tau^-_1)\,\delta^1_s \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

Основные уравнения (3.6), записанные в силах и моментах совпадают с классическими уравнениями теории Кирхгофа–Лява. В статике

$$\{\partial_1 q_1 + \partial_2 q_{12}\}^{(s+2)} + (\tau^+_1 - \tau^-_1)\,\delta^1_s = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\{\partial_1 q_{13} + \partial_2 q_{23}\}^{(s+2)} + (\sigma^+ - \sigma^-)\,\delta^0_s = 0$$

$$\{\partial^2_1 m_1 + 2\partial^2_{12} m_{12} + \partial^2_2 m_2\}^{(s+2)} + \mathrm{div}(z^+\boldsymbol{\tau}^+ - z^-\boldsymbol{\tau}^-)\,\delta^1_s + (\sigma^+ - \sigma^-)\,\delta^0_s = 0$$

5. Все предыдущие рассуждения проведены для произвольного расположения начала отсчета по вертикали и приводят к совместным уравнениям для продольных и поперечных перемещений. Проанализируем теперь возможность специального выбора системы координат и разделения задач. Для этого понадобятся полные выражения для основных операторов.

$$\mathrm{A}_1 = -\mathrm{i}_1(D^1_{11}\partial^2_1 + 2D^1_{16}\partial^2_{12} + D^1_{66}\partial^2_2) - \mathrm{i}_2(D^1_{16}\partial^2_1 + (D^1_{12} + D^1_{66})\,\partial^2_{12} + D^1_{26}\partial^2_2) \qquad (5.1)$$

$$B_1 = D^2_{11}\partial^3_1 + 3D^2_{16}\partial^2_1\partial_2 + (D^2_{12} + 2D^2_{66})\,\partial_1\partial^2_2 + D^2_{26}\partial^3_2 \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

Вообще говоря, все слагаемые в (5.1) ненулевые и соотносятся в произвольных пропорциях. Такова, например, ситуация с анизотропией общего вида или несимметрично уложенными ортотропными слоями, перекрестными укладками. Поэтому для исключения из уравнений (3.6) операторов B_1, B_2, A_* получаем несколько противоречивых условий и справедливо

Утверждение 1. Для пакета из N произвольно уложенных по толщине анизотропных слоев с общей плоскостью упругой симметрии задачи изгиба и продольного растяжения–сжатия–сдвига не разделяются. Тем самым невозможно указать эквивалентную анизотропную монопластинку с осредненными характеристиками, как это имеет место для изотропно-упругих слоев [4] [1].

Физическая причина связанности задач заключается в том, что деформации

$$\epsilon^{(s)}_{11} = \partial_1 u^{(s)}_{01} - z\partial^2_1 w^{(1)}_0, \quad \epsilon^{(s)}_{12} = \tfrac{1}{2}(\partial_1 u_{02} + \partial_2 u_{01} - 2z\partial^2_{12} w_0)^{(s)} \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

оказываются, вообще говоря, ненулевыми при любом расположении продольной плоскости x_1x_2, что приводит к нарушению первой гипотезы Кирхгофа.

При симметричном расположении слоев естественно положить $z = 0$ в срединной плоскости. Тогда сумма $\sum\limits_j (z^2_{j+1} - z^2_j)F_j$ обращается в нуль для любых символов F_j, не зависящих от вертикальных координат. В уравнениях (3.6) и выражениях для сил и моментов следует исключить мембранно-изгибные жесткости [6], что автоматически отделяет задачу изгиба для пакета с недеформируемой срединной плоскостью.

Утверждение 2. Поведение пакета из $N = 2n + 1$ симметрично расположенных по толщине слоев подобно анизотропной монопластинке с осредненными параметрами.

Подчеркнем, что в отличие от гипотетического построения уравнений, мы определяем весь тензор напряжений, включая асимптотически малые компоненты, которые

---

[1] См. также *Симонов И.В.* Динамические уравнения изгиба тонких упругих вырожденно-неоднородных по толщине пластин. // Препринт № 468 ИПМ АН СССР. 1990. 46 С.

могут использоваться при анализе внутренних напряжений, прочности склейки слоев и т.д.

Рассмотрим теперь промежуточную ситуацию. Естественным критерием связанности задач является функция

$$F(z_1) = \{ \| B_1 \|^2 + \| B_2 \|^2 \}^{1/2} =$$

$$= \{(D_{11}^2)^2 + (10D_{16}^2)^2 + 2(D_{12}^2 + 2D_{66}^2)^2 + (10D_{26}^2)^2 + (D_{22}^2)^2 \}^{1/2}$$

такая, что $F^2(z_1)$ – квадратный трехчлен. Положение начала отсчета по вертикали выберем из условия

$$z_1 = z^-: \ \xi \equiv F(z^-) = \min F(z)$$

Утверждение 3. При $\xi \ll 1$ задачи изгиба и продольного растяжения–сжатия–сдвига слоистого пакета могут быть разделены пошагово в следующей итерационной процедуре:

$$\mathbf{D}_0 \mathbf{v}_1^{(s)} = \mathbf{R}^{(s)}, \quad \mathbf{D}_0 \mathbf{v}_{n+1}^{(s)} = -\mathbf{D}_1 \mathbf{y}_n^{(s)}, \quad \| \mathbf{D}_0 \|, \ \| \mathbf{D}_1 \| = O(1)$$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}, w)^\mathrm{T}, \quad \mathbf{y} = (w, w, \mathbf{u})^\mathrm{T}, \quad \mathbf{v}_0^{(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{n-1} \mathbf{v}_n^{(s)}$$

где $\mathbf{R}^{(s)}$ – вектор соответствующих нагрузок в уравнениях (3.6), оператор $\mathbf{D}_0$ отвечает раздельным задачам изгиба и обобщенного плоско-напряженного состояния, оператор $\mathbf{D}_1$ составлен из мембранно-изгибных компонент

$$\mathbf{D}_0 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, B_* + \rho_* \partial_t^2)^\mathrm{T}, \quad \mathbf{D}_1 = \xi^{-1}(B_1, B_2, \mathbf{A}_*)^\mathrm{T}$$

Точное определение радиуса сходимости рядов по ξ требует дальнейшего анализа конкретных краевых условий, но вполне очевидно, что при достаточно малых значениях ξ итерационная процедура будет сходиться в любой разумно выбранной норме.

Случай $\xi = 0$ исчерпывает все сочетания параметров пакета, допускающих полное разделение задач.

Укажем некоторые такие частные анизотропные структуры.

Утверждение 4. Для композитной балки, составленной из ортотропных слоев с главными осями, параллельными x_1, x_2, x_3 и нагруженной вдоль оси x_2 разделение задач происходит при выборе

$$z_1 = -\frac{1}{2D_{11}^1} \sum_{j=1}^{N} h_j H_j^* \gamma_{11}^j, \quad H_j^* = h_j + 2 \sum_{n=1}^{j-1} h_n \tag{5.2}$$

Соответствующие такому выбору осредненные жесткости, модули Юнга и коэффициенты Пуассона для изгиба и растяжения–сжатия–сдвига оказываются следующими:

$$\nu_*^0 = D_{12}^3 / D_{11}^3, \quad e_*^0 = {}^3\!/_2 D_{11}^3 [1 - (\nu_*^0)^2] \tag{5.3}$$

$$\nu_*^1 = D_{12}^1 / D_{11}^1, \quad e_*^1 = {}^1\!/_2 D_{11}^1 [1 - (\nu_*^1)^2]$$

$$\gamma_{11}^j = \left\{ \frac{e_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right\}_j, \quad \gamma_{12}^j = \nu_{21}^j \gamma_{11}^j$$

что приводит к аналогии с изотропной монобалкой. Небольшое отличие состоит в том, что побочные продольные усилия и(или) изгибающие моменты в приведенной средней плоскости могут быть не равны нулю

$$q_2^{(s+2)} = \nu_*^1 D_{11}^1 \partial_1 u_{01}^{(s)} - D_{12}^2 \partial_1^2 w_0^{(s)}, \quad m_2^{(s+2)} = D_{12}^2 \partial_1 u_{01}^{(s)} - \nu_*^0 D_{11}^3 \partial_1^2 w_0^{(s)}$$

и в этом смысле она не является нейтральной.

Утверждение 5. При трансверсальной изотропии слоев (z – общая ось анизотропии) раздельная постановка задач также обеспечивается выбором приведенной срединной плоскости по формуле (5.2).

В самом деле, полагая, что e, ν – нормированные модули Юнга и коэффициенты Пуассона в плоскости изотропии, имеем для каждого слоя

$$a_\beta = -\frac{e}{2(1-\nu)}\partial_\beta \mathrm{div} - \frac{e}{2(1+\nu)}\mathrm{i}_\beta\Delta, \quad b_\beta = \gamma\partial_\beta\Delta$$

$$a_* = -\gamma\Delta\mathrm{div}, \quad b_* = \gamma\Delta^2 \quad (\Delta \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2)$$

$$\gamma \equiv \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{12} + 2\gamma_{66} = \frac{e}{1-\nu^2}, \quad \gamma_{12} = \nu\gamma_{11}$$

и затем из (3.6) получаем разделившиеся уравнения. Выражения для моментов и усилий в сечении пластины также существенно упрощаются, значения осредненных модулей Юнга и коэффициента Пуассона определяются соотношениями (5.3).

Эти результаты совпадают с полученными для изотропно-слоистых пластин (см. работу, цитированную в сноске на стр. 746) и, таким образом, все рассмотренные в данной работе случаи асимптотического вырождения параметров слоев естественным образом обобщаются на структуры с трансверсальной изотропией.

6. При решении статических задач для несимметричного пакета можно ввести потенциал перемещений и воспользоваться аппаратом функций комплексного переменного, развитым для случая анизотропной монопластинки [7]. Предположим, что найдено частное решение задачи, отвечающее конкретным нагрузкам в уравнениях (3.6). Связанные невырожденные однородные решения будем искать в следующем виде (индекс s опускаем)

$$\mathbf{u} = \mathrm{Re}[\mathbf{u}^*\varphi'(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2)], \quad w = \mathrm{Re}[u_3^*\varphi(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2)] \tag{6.1}$$

где u_α^*, ζ_β – комплексные константы, а производная от функции φ берется по аргументу в целом (не нарушая общности, можно полагать, что $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = \zeta$, $u_3^* = 1$). Тогда уравнения (3.6) удовлетворяются тождественно, если ζ есть корень характеристического уравнения восьмого порядка, а константы u_1^*, u_2^* определяются из линейной системы

$$p^*(\zeta_1, \zeta_2) \equiv p_{33}p_0 + p_{11}p_{23}^2 + p_{22}p_{13}^2 + 2p_{12}p_{23}p_{31} = 0 \tag{6.2}$$

$$\mathbf{Pu}^* = 0, \quad \mathbf{P} = \| p_{\alpha\beta} \|, \quad p^* = \det\mathbf{P}, \quad p_0 \equiv p_{11}p_{22} - p_{12}^2$$

Полиномы $p_{\alpha\beta}$ задаются равенствами

$$p_{11} = -D_{11}^1\zeta_1^2 - 2D_{16}^1\zeta_1\zeta_2 - D_{66}^1\zeta_2^2, \quad p_{12} = -D_{16}^1\zeta_1^2 - (D_{12}^1 + D_{66}^1)\zeta_1\zeta_2 - D_{26}^1\zeta_2^2$$

$$p_{13} = D_{11}^2\zeta_1^3 + 3D_{16}^2\zeta_1^2\zeta_2 + (D_{12}^2 + 2D_{66}^2)\zeta_1\zeta_2^2 + D_{26}^2\zeta_2^3, \quad p_{31} = -p_{13} \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$p_{33} = D_{11}^3\zeta_1^4 + 4D_{16}^3\zeta_1^3\zeta_2 + 2(D_{12}^3 + 2D_{66}^3)\zeta_1^2\zeta_2^2 + 4D_{26}^3\zeta_1\zeta_2^3 + D_{22}^3\zeta_2^4$$

Если существует недеформируемая "нейтральная" плоскость ($\xi = 0$) и задачи изгиба и обобщенного плоско-напряженного состояния разделены, то $p_{\beta 3} \equiv 0$. Корни характеристического уравнения (6.2) также разделяются на две группы, отвечающие каждой из задач. Для задачи изгиба $u_1^* = u_2^* = 0$, для плоской задачи $u_3^* = 0$ и замена $\psi = \varphi'$ позволяет (после небольших алгебраических преобразований) использовать известные методы [7].

Утверждение 6. Характеристическое уравнение (6.2), а также характеристические уравнения для компонент ($\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$) и B_* редуцированного оператора $\mathbf{D}_0$ не имеют вещественных корней. Комплексные корни образуют сопряженные пары.

Для доказательства рассмотрим выражение для потенциальной энергии пластины. Как следует из асимптотических разложений, она равна

$$\Pi^{(s)} = \frac{1}{2}\int_\Omega \{ q_1 e_{11} + 2q_{12}e_{12} + q_2 e_{22} - m_1\partial_1^2 w_0 - 2m_{12}\partial_{12}^2 w_0 - m_2\partial_2^2 w_0 \}^{(s)} d\Omega$$

$$\Pi = E_0 L_0^3 \epsilon^{-3}\{\Pi^{(0)} + \epsilon^2\Pi^{(1)} + O(\epsilon^4)\}, \quad e_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\partial_\alpha u_{0\beta} + \partial_\beta u_{0\alpha}) \tag{6.3}$$

После подстановки равенств (6.1) в (6.3) получаем квадратичную форму

$$\Pi^*(\mathbf{u}^*) = \frac{1}{2}\int_\Omega \{ p_{33}u_3^*\bar{u}_3^* - \sum_{\alpha\beta \neq 33} p_{\alpha\beta}u_\alpha^*\bar{u}_\beta^* \} |\varphi''|^2 d\Omega, \quad \zeta \in R$$

Тогда из условия положительной определенности энергии следует, что $p^*(\zeta)$, $p_0(\zeta)$, $p_{33}(\zeta) > 0$ при $\zeta \in R$. Вторая часть утверждения выполняется в силу вещественности всех коэффициентов полиномов. Это означает эллиптичность указанных операторов и возможность решения задач с оператором $\mathbf{D}_0$ теми же способами, что и в классической теории пластин.

В итоге выражения (6.1) приводятся к виду

$$(\mathbf{u}_0, w_0) = \sum_{k=1}^{4} \mathrm{Re}(\mathbf{u}^*\varphi', u_3^*\varphi)_k, \quad \zeta_{k+4} = \bar{\zeta}_k, \ \zeta_\zeta \neq \zeta_j \tag{6.4}$$

и обладают достаточным произволом для того, чтобы удовлетворить комбинированным граничным условиям на множестве $\partial\Omega$.

По смыслу задачи таких условий должно быть четыре и наиболее естественным образом они составляются из объединения краевых условий для задач изгиба и обобщенного плоско-напряженного состояния пластины [5, 7–9]. Погрешность, вносимая интегральными условиями на торцах, может зависеть от выбора этих условий [3], но, как правило, в изотропных пластинках не превышает $O(\epsilon)$ вне пограничного слоя. Детальное построение пограничного слоя для слоистой пластинки и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием требует отдельного исследования.

В заключение приведем пример, когда представление (6.4) принимает наиболее простой вид. Рассмотрим эллиптическую слоистую пластинку несимметричного строения с жестко защемленным контуром

$$\partial\Omega: \ f \equiv (x_1/c_1)^2 + (x_2/c_2)^2 - 1 = 0, \quad \mathbf{u}_0 = 0, \quad w_0 = \partial_n w_0 = 0$$

Решение для постоянной нормальной нагрузки и линейных тангенциальных нагрузок

$$\sigma^\pm = \mathrm{const}, \quad \tau^\pm = \tau_1^\pm x_1 + \tau_2^\pm x_2, \quad \tau_\beta^\pm = \mathrm{const}$$

дается формулами

$$u_{0\beta} = u_{\beta 1}\partial_1 f^2 + u_{\beta 2}\partial_2 f^2, \quad w_0 = u_{33}f^2, \quad u_{\alpha\beta} \in R$$

После подстановки равенств в уравнения (3.6) константы $u_{\alpha\beta}$ определяются из линейной системы уравнений пятого порядка. Если пакет ортотропен и полуоси эллипса расположены на главных осях, то $u_{12} = u_{21} = 0$ и число уравнений сокращается до трех.

7. В стационарной динамике дисперсионное соотношение для монохроматической волны $(\mathbf{u}_0, w_0) \equiv (\mathbf{u}^*, u_3^*)\exp(i\omega t - i\eta(x_1\cos\theta + x_2\sin\theta))$ определяется полиномами (6.2) и принимает вид:

$$\omega^2 = \frac{\eta^4 p^*(\cos\theta, \sin\theta)}{\rho_* p_0(\cos\theta, \sin\theta)}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668–686.
2. *Гольденвейзер А.Л., Колос А.В.* К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 141–155.
3. *Гуссейн-Заде М.И.* Асимптотический анализ граничных и начальных условий в динамике тонких пластинок // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 899–907
4. *Симонов И.В.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонких двухслойных упругих пластинок // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 976–982.
5. *Агаловян Л.А.* К теории изгиба ортотропных пластин // Инж. журн. МТТ. 1966. № 6. С. 114–121.
6. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 263 С.
7. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 С.
8. *Агаловян Л.А.* О граничных условиях для изгиба анизотропных пластин // Изв. Ан Арм. ССР. Сер. Механика. 1966. Т. 19. № 4. С. 13–23.
9. *Агаловян Л.А.* О погранслое ортотропных пластинок // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Механика. 1973. Т. 26. № 2. С. 27- 43.

Москва

Поступила в редакцию
27.I.1992