Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 5, 1992

УДК 539.3+624.073

© 1992 г. К.Ю. Волох

РЕГУЛЯРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РАСЧЕТАХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Для решения задач теории трехслойных пластин в предложенной автором[1] постановке рассматривается два варианта асимптотического метода, которые позволяют расчленить исходную задачу на две более простые, решаемые в рамках классической теории пластин. Указанные методы применены к статическому и динамическому расчету прямоугольной трехслойной пластины шарнирно опертой по контуру. Найдены оценки погрешностей приближенных решений, получаемых после произвольного числа итераций.

1. На основании известной гипотезы ломаной [1] при помощи вариационного принципа Лагранжа автором были получены уравнения равновесия в перемещениях и естественные краевые условия теории трехслойных пластин с несжимаемым в поперечном направлении жестким заполнителем.

При преимущественно изгибном деформировании симметрично собранной по толщине трехслойной пластины для тангенциальных перемещений срединных плоскостей крайних несущих слоев ($i = 1, 2$) необходимо положить $u_1 = -u_2 = u$, и $v_1 = -v_2 = v$; тангенциальные поверхностные и контурные внешние силы отсутствуют; $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $h_1 = h_2 = h$, где E_i – модули упругости, ν_i – коэффициенты Пуассона и h_i – толщины крайних слоев. В этом случае уравнения равновесия и граничные условия на контуре $x = \text{const}$ могут быть записаны в операторной форме следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&L_{11}(w) + L_{12}(u) + L_{13}(v) = q\\
&L_{k1}(w) + L_{k2}(u) + L_{k3}(v) = 0, \quad k = 2,3
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&L_1(w) + L_2(u, v) = 0 \leftrightarrow w = 0, \quad L_3(w) + L_4(u, v) = 0 \leftrightarrow \partial w/\partial x = 0\\
&L_5(u, v) + L_6(w) = 0 \leftrightarrow u = 0, \quad L_7(u, v) + L_8(w) = 0 \leftrightarrow v = 0
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Здесь:

$$
L_{11}(w) = \bar{D}\nabla^4 w - Bc^2\nabla^2 w, \quad L_{12}(u) = 2Bc\frac{\partial u}{\partial x} - A_3\frac{h}{6}\nabla^2\frac{\partial u}{\partial x}
$$

$$
L_{22}(u) = 2A^*\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A^*(1-\nu^*)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4Bu, \quad L_{23}(v) = A^*(1+\nu^*)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}
$$

$$
L_1(w) = \bar{D}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\bar{\nu})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right) - Bc^2\frac{\partial w}{\partial x}, \quad L_2(u, v) = 2Bcu -
$$

$$
-A_3\frac{h}{6}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + (1-\nu_3)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad L_3(w) = \bar{D}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)
$$

---

[1] *Волох К.Ю.* Расчетно-экспериментальное исследование и оптимизация трехслойных пластин, опертых в точках: Дисс... канд. техн. наук. М., 1991. 135 с.

$$L_4(u, v) = -A_3 \frac{h}{6} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_3 \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad L_5(u, v) = A^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu^* \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$L_6(w) = -A_3 \frac{h}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad L_7(u, v) = A^* \frac{1 - \nu^*}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$L_8(w) = -A_3 \frac{h}{12} (1 - \nu_3) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$B = \frac{G_3}{h_3}, \quad A = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{6(1 - \nu^2)}, \quad A_3 = \frac{E_3 h_3}{1 - \nu_3^2}, \quad A^* = A + \frac{A_3}{6}$$

$$\nu^* = \frac{\nu A + \nu_3 A_3/6}{A^*}, \quad \overline{D} = D + \frac{A_3 h^2}{12}, \quad \overline{\nu} = \frac{D\nu + A_3 \nu_3 h^2/12}{\overline{D}}$$

Операторы L_{13} и L_{33} получаются из L_{12} и L_{22} путем замен x и y, u и v; $L_{ij} = L_{ji}$; w – прогиб, E_3, ν_3, h_3 – модуль упругости, коэффициент Пуассона, толщина среднего слоя (заполнителя), G_3 – модуль сдвига трансверсально-изотропного заполнителя в плоскостях перпендикулярных плоскости изотропии, c – расстояние между срединными плоскостями несущих слоев.

Если в соотношениях (1.1), (1.2) положить $E_3 = 0$, получим уравнения трехслойных пластин с легким заполнителем [2].

2. Внесем в уравнения (1.1) и граничные условия (1.2) параметр ϵ таким образом, что $L_{12}^{(u)}$ заменяется на $\epsilon L_{12}(u)$, $L_{13}(v)$ – на $\epsilon L_{13}(v)$, $L_2(u, v)$ на $\epsilon L_2(u, v)$, $L_4(u, v)$ – на $\epsilon L_4(u, v)$ и будем искать решения в виде рядов по ϵ

$$\mathbf{u} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{u}^{(j)}, \quad \mathbf{u} = (u, v, w) \tag{2.1}$$

Подставляя ряды (2.1) в уравнения и граничные условия и приравнивая слагаемые при одинаковых степенях ϵ, получим итерационный процесс

$$L_{11}(w^{(j)}) = -L_{12}(u^{(j-1)}) - L_{13}(v^{(j-1)}) + q^{(j)} \tag{2.2}$$

$$L_{k2}(u^{(j)}) + L_{k3}(v^{(j)}) = -L_{k1}(w^{(j)}), \quad k = 2, 3 \tag{2.3}$$

с граничными условиями при $x = \mathrm{const}$

$$L_1(w^{(j)}) = -L_2(u^{(j-1)}, v^{(j-1)}) \leftrightarrow w^{(j)} = 0, \quad L_3(w^{(j)}) = -L_4(u^{(j-1)}, v^{(j-1)}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \partial w^{(j)}/\partial x = 0 \tag{2.4}$$

$$L_5(u^{(j)}, v^{(j)}) = -L_6(w^{(j)}) \leftrightarrow u^{(j)} = 0, \quad L_7(u^{(j)}, v^{(j)}) = -L_8(w^{(j)}) \leftrightarrow v^{(j)} = 0 \tag{2.5}$$

причем $u^{(-1)} = v^{(-1)} = 0$; $q^{(0)} = q$; $q^{(j)} = 0$ для $j \geqslant 1$.

Согласно предлагаемой схеме сначала решается уравнение (2.2) с парой краевых условий (2.4), откуда находится $w^{(j)}$. Эта краевая задача с точностью до коэффициентов совпадает с задачей изгиба пластин, лежащих на упругом основании по классической теории, причем упругое основание препятствует повороту сечений пластины, создавая отпор в виде распределенной по площади моментной нагрузки $Bc^2 \partial w/\partial x$ и $Bc^2 \partial w/\partial y$. Затем решается плоская задача теории упругости на упругом основании (2.3), (2.5). Силы отпора упругого основания иммитируются слагаемыми $4Bu$ и $4Bv$ в операторах L_{22} и L_{33}. После нахождения $u^{(j)}$ и $v^{(j)}$ полагаем $\epsilon = 1$ и, суммируя ряды (2.1), получим искомое решение при условии сходимости рядов.

Второй вариант итерационного процесса получается, если в (1.1) дополнительно ввести малый параметр ϵ в операторах L_{22} и L_{33} перед слагаемыми $4Bu$ и $4Bv$. В этом случае на j-й итерации будет решаться плоская задача (2.3), (2.5) без упругого основания.

Слагаемые в правых частях (2.2)–(2.5) можно считать дополнительными фиктивными нагрузками, определенными на предыдущей итерации.

Таким образом, предлагаемый подход позволяет разделить исходную задачу на две более простые, для которых имеются хорошо разработанные численные методы решения и возможно применение апробированных программных комплексов.

Введем теперь малый параметр ϵ в задачи на собственные значения. В этом случае в уравнениях (1.1) и граничных условиях (1.2) $L_{12}(u)$ заменяется на $\epsilon L_{12}(u)$, $L_{13}(v)$ – на $\epsilon L_{13}(v) - \lambda M_1(w)$, $L_2(u, v)$ на $\epsilon L_2(u, v) + \epsilon\lambda M_2(w)$, $L_4(u, v)$ – на $\epsilon L_4(u, v)$.

Если

$$M_1(w) = \rho H w, \qquad M_2(w) = 0, \quad \lambda = \omega^2$$

$$H = \sum_{i=1}^{3} h_i, \quad \rho = \frac{1}{H}\sum_{i=1}^{3} \rho_i h_i$$

где ρ_i – плотность i-го слоя, ω – круговая частота свободных колебаний, то имеем задачу о низкочастотных преимущественно изгибных свободных колебаний трехслойной пластины, получающуюся после разделения переменных.

Если $M_1(w) = -\nabla^2 w$, $M_2(w) = \partial w/\partial x$, $\lambda = N^0$, где N^0 – сжимающие силы на контуре пластины, то имеем задачу устойчивости.

Подставляя в видоизмененные уравнения и граничные условия ряды (2.1) и

$$\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \lambda^{(j)}$$

получаем итерационный процесс, аналогичный задаваемому формулами (2.2)–(2.5), с той лишь разницей, что вместо уравнения (2.2) имеем

$$L_{11}(w^{(j)}) - \lambda^{(0)} M_1(w^{(j)}) = -L_{12}(u^{(j-1)}) - L_{13}(v^{(j-1)}) + \sum_{i=1}^{j} \lambda^{(i)} M_1(w^{(j-i)}) \tag{2.6}$$

а вместо граничных условий (2.4) имеем

$$\begin{aligned} &L_1(w^{(j)}) = -L_2(u^{(j-1)}, v^{(j-1)}) - \sum_{i=0}^{j-1} \lambda^{(i)} M_2(w^{(j-1-i)}) \leftrightarrow w^{(j)} = 0 \\ &L_3(w^{(j)}) = -L_4(u^{(j-1)}, v^{(j-1)}) \leftrightarrow \partial w^{(j)}/\partial x = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Представим $w^{(j)} = w_1^{(j)} + w_2^{(j)}$, причем $w_1^{(j)}$ находим из решения однородного уравнения (2.6) с неоднородными граничными условиями (2.7). Для нахождения $w_2^{(j)}$ имеем уравнение (2.6) с однородными граничными условиями (2.7). Учитывая симметричность оператора в левой части (2.6), после скалярного домножения уравнения (2.6) на $w^{(0)}$ получим формулу для собственных значений

$$\lambda^{(j)} = \frac{(w^{(0)}, L_{12}(u^{(j-1)}) + L_{13}(v^{(j-1)}))}{(w^{(0)}, w^{(0)})} - \sum_{i=1}^{j-1} \lambda^{(i)} \frac{(w^{(0)}, M_1(w^{(j-1-i)}))}{(w^{(0)}, w^{(0)})}. \tag{2.8}$$

Вторая итерационная схема имеет те же отличия, что и в уравнениях статики, и формула (2.8) для нее верна.

3. Рассмотрим статическую задачу и задачу на собственные значения для прямоугольной шарнирно опертой по контуру пластины.

Граничные условия при $x = 0, x = a$ имеют вид

$$w = 0, \quad L_3(w) + L_4(u, v) = 0, \quad L_5(u, v) + L_6(w) = 0, \quad v = 0 \tag{3.1}$$

Соответствующие условия на контурах $y = 0, y = b$ получаем путем замен $u \rightleftarrows v$ и $x \rightleftarrows y$ в условиях (3.1).

Решение задачи получим в виде рядов (суммирование по всем m и n)

$$w = \Sigma w_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y), \quad u = \Sigma u_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y), \quad v = \Sigma v_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \tag{3.2}$$

тождественно удовлетворяющих граничным условиям.

При этом поперечную нагрузку необходимо представить в виде

$$q = \Sigma q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y), \quad \alpha = \pi m/a, \quad \beta = \pi n/b \tag{3.3}$$

После подстановки (3.2), (3.3) в (1.1) находим

$$w_{mn} = H_{mn}^{-1}(1 - \xi_{mn})^{-1} q_{mn}, \quad u_{mn} = \tfrac{1}{2} \alpha \gamma^{-2} (\xi_{mn}^{-1} - F_{mn})^{-1}$$

$$v_{mn} = \beta \alpha^{-1} u_{mn}, \quad H_{mn} = \bar{D} \gamma^4 + B c^2 \gamma^2, \quad F_{mn} = Bc + A_3 \gamma^2 h/12 \tag{3.4}$$

$$\xi_{mn} = 2F_{mn} H_{mn}^{-1} (A^* + G_{mn})^{-1}, \quad G_{mn} = 2B\gamma^{-2}, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

В задаче на собственные значения получим

$$\rho H \lambda_{mn} = H_{mn}(1 - F_{mn} \xi_{mn}) \tag{3.5}$$

Аналогичным образом решаются задачи с использованием рекуррентных соотношений (2.2)–(2.5) и (2.3), (2.5), (2.6), (2.7). Можно получить следующие оценки погрешности итерационного процесса.

В случае первой схемы с двумя упругими основаниями для k-го приближения имеем

$$\eta_w^{(k)} = \eta_u^{(k)} = \eta_v^{(k)} = [F_{mn} \xi_{mn}]^{k+1}, \quad \rho H \lambda_{mn}^{(0)} = H_{mn},$$

$$\rho H \lambda_{mn}^{(1)} = -F_{mn} H_{mn} \xi_{mn}, \ \lambda_{mn}^{(k)} = 0 \tag{3.6}$$

В случае второй схемы с одним упругим основанием имеем

$$\eta_w^{(0)} = 1 - H_{mn}^{-2}(1 - \xi_{mn})^{-1}, \quad \eta_w^{(k)} = F_{mn} \xi_{mn} [\zeta_{mn}]^k, \ \eta_u^{(k)} = \eta_v^{(k)} = [\zeta_{mn}]^{k+1}$$

$$\eta_\lambda^{(k)} = -F_{mn} \xi_{mn} (1 - F_{mn} \xi_{mn})^{-1} [-G_{mn}/A^*]^k, \quad \zeta_{mn} = 2F_{mn}^2 H_{mn}^{-1}/A^* - G_{mn}/A^* \tag{3.7}$$

$$\eta_r^{(k)} = \frac{r_{mn} - s_r^{(k)}}{r_{mn}}, \quad s_r^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} r_{mn}^{(i)} \ (r = u, v, w, \lambda)$$

Отметим, что выражения, стоящие в оценках (3.6), (3.7) в квадратных скобках, существенно меньше единицы в широком диапазоне изменения геометрических и физических параметров трехслойных пластин [3], что говорит о хорошей сходимости методов.

Рассмотрим численный пример. Пусть $a = b = 1$ м, $q = \text{const} = q_0$, $E = 10^5$ МПа, $E_3 = 2{,}5 \cdot 10^3$ МПа, $G_3 = 10^3$ МПа, $h = 0{,}025$ м, $h_3 = 0{,}1$ м, $\nu = \nu_3 = 0{,}25$.

Ниже приведены результаты расчетов (номер столбца соответствует номеру приближения, начиная с нулевого).

Для первой итерационной схемы

$w_{\max}^{(j)} \times 10^4/q_0$	451	133	38	10
$u_{\max}^{(j)} \times 10^5/q_0$	256	72	23	8
$\rho H \lambda_{11}^{(j)}$ м$^{-1}$	3197	−854	0	

Для второй итерационной схемы

$w_{\max}^{(j)} \times 10^4/q_0$	451	182	–1						
$u_{\max}^{(j)} \times 10^5/q_0$	361	–2	0						
$\rho H \lambda_{11}^{(j)}$ м$^{-1}$	3197	–1173	438	–163	61	–23	9	–3	1

Из полученных численных результатов следует, что итерационная схема с двумя упругими основаниями предпочтительна в задачах динамики и устойчивости, а с одним упругим основанием – в задачах статики. Последнее подтверждается результатами работы, цитированной в сноске, где итерационная схема с одним упругим основанием была применена к статическому расчету круглых пластин при точечном опирании. Удовлетворительные результаты получались на нулевом – первом приближении.

Следует отметить, что аналогичный метод был эффективно применен [4] к пологим оболочкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 172 с.
2. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
3. *Александров А.А., Брюккер Л.Э., Куршин Л.М., Прусаков А.П.* Расчет трехслойных панелей. М.: Оборонгиз, 1960. 270 с.
4. *Любимов В.М., Пшеничнов Г.И.* Метод возмущений в теории пологих оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 4. С. 143–148.

Москва

Поступила в редакцию 6.II.1992