Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 5, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. В.Я. Терещенко

ДВОЙСТВЕННЫЕ НЕСВЯЗАННЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В отличие от рассмотренных ранее [1–3] предлагаются несвязанные двойственные формулировки (НДФ) для граничных функционалов линейной теории упругости в том смысле, что перемещения и напряжения варьируются независимо, а уравнения состояния на границе выполняются как уравнения связей при помощи множителей Лагранжа. Идея подобных формулировок, использующих метод множителей Лагранжа для снятия ограничений вариационной задачи в виде уравнений состояния, прменялась ранее [4] для постановки двойственных вариационных задач линейной теории упругости на основании известного принципа Лагранжа – Кастильяно. Конечно-элементная аппроксимация решений этих задач приводит к смешанным формулировкам метода конечных элементов [5]. Таким образом, предлагаемые ниже гранично-элементные аппроксимации (ГЭА) НДФ могут рассматриваться как вариант смешанных формулировок. Одновременная ГЭА перемещений и напряжений расширяет возможности НДФ для приложений в тех задачах, где особенности решения должны быть учтены при аппроксимации, например, в контактных задачах теории упругости, в задачах механики разрушения (задачи о трещинах).

1. Пусть $G \subset E_m$ $(m = 2, 3)$ – область упругой среды (которая может быть бесконечной) с достаточно гладкой границей S. Задача минимизации квадратичного функционала энергии второй граничной задачи линейной теории упругости (с заданными напряжениями на S) приводится [6] к эквивалентной задаче минимизации граничного функционала на кинематически допустимых перемещениях

$$\min_{\mathbf{u}\in D} F_S(\mathbf{u}), \quad F_S = \int_S \mathbf{u}\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})\,ds - 2\int_S \mathbf{u}\mathbf{g}^{(\nu)}ds$$
$$D = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{A}\mathbf{u}(x) = 0,\ x \in G\} \tag{1.1}$$

Здесь массовые силы не учитываются, а $\mathbf{g}^{(\nu)}(y)$, $y \in S$ – вектор заданных нормальных напряжений на S; множество векторов перемещений D, удовлетворяющих уравнению равновесия упругой среды, есть множество линейных ограничений вариационной задачи. Решение задачи (1.1) существует с точностью до произвольного жесткого перемещения. При условиях, исключающих такое перемещение, имеет место [6] равенство

$$\min_{\mathbf{u}\in D} F_S(\mathbf{u}) = F_S(\mathbf{u}_0) = d_0 = -\int_S \mathbf{u}_0\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)\,ds$$

где $\mathbf{u}_0$ – вектор упругих перемещений, решение второй задачи теории упругости. Задача (1.1) "связанная" в том смысле, что переменные вектор перемещений $\mathbf{u}$ и вектор нормальных напряжений на границе $\mathbf{t}^{(\nu)}$ зависимы через определяющие соотношения

$$\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}) = \sum_{i,k,l,r} c_{iklr}(x)\epsilon_{lr}\cos(\nu, x_i)\,\mathbf{x}_k^{(0)} \tag{1.2}$$

Далее рассматривается "несвязанная" формулировка, когда указанные соотношения выполняются как уравнения связей при помощи множителей Лагранжа. При этом предварительно доказывается соотношение двойственности (в отличие от ранее установленного [6] для связанных формулировок).

Пусть T – множество граничных значений статически допустимых векторов напряжений. Определим множители Лагранжа в виде достаточно гладких вектор-функций λ, определенных в точках S, и таких, что для числовой функции

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}, \lambda) = \int_{S'} \lambda[\mathbf{t}^{(\nu)} - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})]ds, \quad \mathbf{u} \in D, \quad \mathbf{t}^{(\nu)} \in T \tag{1.3}$$

имеет место равенство

$$\sup_\lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}, \lambda) = \begin{cases} 0, & \mathbf{t}^{(\nu)} = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}) \\ +\infty, & \mathbf{t}^{(\nu)} \neq \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}) \end{cases}$$

Это устанавливается непосредственной проверкой и функция f используется для построения лагранжиана

$$\begin{gathered} L(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}, \lambda) = w(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}) - 2l(\mathbf{u}) - f(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}, \lambda) \\ w = \int_S \mathbf{u}\mathbf{t}^{(\nu)} ds, \quad l = \int_S \mathbf{u}\mathbf{g}^{(\nu)} ds \end{gathered} \tag{1.4}$$

(ниже дана интерпретация множителей λ). Устанавливается, что задача поиска седловой точки $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{t}^{(\nu)}(u_0), \lambda_0\}$ функции L, которая является прямой задачей

$$\inf_{\mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)}} \sup_\lambda L$$

эквивалентна решению исходной вариационной задачи (1.1). Действительно, если $\mathbf{t}^{(\nu)} = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})$, то $\sup_\lambda f = 0$ и

$$\inf_{\mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})} \sup_\lambda L(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}), \lambda) = \inf_\mathbf{u} F_S(\mathbf{u}) = d_0 \tag{1.5}$$

Двойственная задача определения

$$\sup_\lambda \inf_{\mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)}} L \tag{1.6}$$

имеет смысл, если выполняется соотношение двойственности

$$\inf_{\mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)}} \sup_\lambda L = \sup_\lambda \inf_{\mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)}} L = d_0. \tag{1.7}$$

Таким образом, требуется доказать справедливость правой части равенства (1.7). При фиксированном λ решение $(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{t}_\lambda^{(\nu)})$ задачи нахождения $\inf_{\mathbf{u};\mathbf{t}^{(\nu)}} L$ определяется из системы уравнений

$$\begin{gathered} \operatorname{grad}_\mathbf{u} L(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{t}_\lambda^{(\nu)}, \lambda) = 0 \\ \operatorname{grad}_{\mathbf{t}^{(\nu)}} L(u_\lambda, t_\lambda^{(\nu)}, \lambda) = 0 \end{gathered}$$

которая, при учете (1.4), записывается в виде

$$w(\mathbf{v}, \mathbf{t}_\lambda^{(\nu)}) - 2l(\mathbf{v}) + \int_S \lambda \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{v}) ds = 0, \quad \forall\, \mathbf{v} \in D \tag{1.8}$$

$$w(\mathbf{u}_\lambda, \tau^{(\nu)}) - \int_S \lambda \tau^{(\nu)} ds = 0, \quad \forall\, \tau^{(\nu)} \in T \tag{1.9}$$

При этом значение функционала L на решении $(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{t}_\lambda^{(\nu)})$ получаем из выражения L и из (1.8) при $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\lambda$ и (1.9) при $\tau^{(\nu)} = \mathbf{t}_\lambda^{(\nu)}$:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{t}_\lambda^{(\nu)}, \lambda) &= -\int_S \lambda \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_\lambda) ds - \int_S \lambda \mathbf{t}_\lambda^{(\nu)} ds + \int_S \lambda \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_\lambda) ds = \\ &= -\int_S \lambda \mathbf{t}_\lambda^{(\nu)} ds = -w(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{t}_\lambda^{(\nu)}) = \inf_{\mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)}} L \end{aligned}$$

Тогда двойственная задача (1.6) приводится к задаче

$$\sup_\lambda[-w(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{t}_\lambda^{(\nu)})] = -\inf_\lambda w(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{t}_\lambda^{(\nu)})$$

где $w(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{t}_\lambda^{(\nu)})$ – квадратичная форма λ. Далее из условия

$$\operatorname{grad}_\lambda L(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}, \lambda) = \int_S \delta[\mathbf{t}^{(\nu)} - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})]ds = 0 \quad \forall \delta \in D \tag{1.10}$$

получаем $\mathbf{t}_\lambda^{(\nu)} = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_\lambda)$ для каждого фиксированного λ. Отсюда при $\lambda = \lambda_0$ и $\mathbf{u}_{\lambda_0} = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_{\lambda_0}) = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)$ имеет место равенство

$$-\inf_\lambda w(\mathbf{u}_\lambda, \mathbf{t}_\lambda^{(\nu)}) = -w(\mathbf{u}_0, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)) = d_0$$

Полученный результат и равенство (1.5) доказывают соотношение (1.7).

Соотношения (1.9), (1.10) могут рассматриваться, во-первых, как интегральные тождества, и тогда из первого следует интерпретация множителя Лагранжа $\lambda_0 \equiv \mathbf{u}_0$ – вектор упругих перемещений, а из второго следует выполнение уравнения связей $\mathbf{t}^{(\nu)} = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)$; во-вторых, как вариационные уравнения, которые совместно с уравнением (1.8) используются для построения ГЭА решения двойственной задачи (1.6). Так как по доказанному $\inf_{\mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)}}$, $\sup_\lambda$ в (1.7), достигаются, то они могут быть заменены соответственно на $\min_{\mathbf{u},\mathbf{t}^{(\nu)}}$, $\max_\lambda$. Минимальные условия гладкости переменных изложенных двойственных формулировок характеризуются принадлежностью: $\mathbf{u}$, $\lambda \in W_2^{1/2}(S)$, $\mathbf{t}^{(\nu)} \in W_2^{-1/2}(S)$, где $W_2^{1/2}(S)$ – пространство Соболева–Слободецкого, $W_2^{-1/2}(S)$ – его двойственное.

2. Седловая точка $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0), \lambda_0\}$ лагранжиана L, существование которой следует из (1.7), характеризуется условием [7]

$$\begin{aligned} &L(\mathbf{u}_0, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0), \lambda) \leqslant L(\mathbf{u}_0, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0), \lambda_0) = \\ &= d_0 \leqslant L(\mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}, \lambda_0), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}, \lambda \end{aligned} \tag{2.1}$$

Реализация (2.1) сводится к решению системы вариационных уравнений (1.8)–(1.10); возможны различные варианты ГЭА: изопараметрическая, супер- и субпараметрическая [8].

В дальнейшем рассматривается случай однородной изотропной среды, заполняющей область G. Пусть изопараметрические аппроксимации границы и переменных $\mathbf{u}$, $\mathbf{t}^{(\nu)}$, λ в точках граничного элемента (ГЭ) Δs_n, на которые разбита граница S, таковы:

$$\begin{aligned} &y_n = \sum_{i,k} Y_{nk}^{(i)} \psi_k, \quad \mathbf{u}_n = \sum_{i,k} U_{nk}^{(i)} \psi_k \\ &\mathbf{t}_n^{(\nu_n)} = \sum_{i,k} T_{nk}^{(i)} \psi_k, \quad \lambda_n = \sum_{i,k} \Lambda_{nk}^{(i)} \psi_k \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $Y_{nk}^{(i)}$ – декартовы координаты узлов k дискретной границы $S_\Delta = \cup \Delta s_n$ ($n = 1, \ldots, N$), а $\mathbf{U}_{nk}$, $\mathbf{T}_{nk}$, Λ_{nk} – узловые значения указанных переменных; $\psi_k(\eta)$ – базисные функции МГЭ [8] и η – локальная координата точек ГЭ Δs_n. В (2.2) суммирование производится от $i = 1$ до $i = m$ и от $k = 1$ до $k = K$.

Глобальные интерполяционные функции $\mathbf{u}_N(y_\Delta)$, $\mathbf{t}_N^{(\nu_\Delta)}(y_\Delta)$, $\lambda_N(y_\Delta)$ в точках $y_\Delta \in S_\Delta$ получаем суммированием (2.2) по $n = 1, \ldots, N$. Полученные таким образом функции в силу равенства узловых значений в общих узлах смежных элементов (условие согласованности ГЭ [8]) непрерывны в точках S_Δ. Функции, аппроксимирующие решение в точках области G_Δ, ограниченной S_Δ, по граничным значениям $\mathbf{u}_N$, $\mathbf{t}_N^{(\nu_\Delta)}$

представимы [1, 2] в виде суперпозиции граничных потенциалов (см. также [9])

$$\alpha_N(x_\Delta) = -\frac{1}{2}\int_{S_\Delta} \mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}\Big(\sum_{j=1}^{m} \mathbf{v}^{1j}\Big)\mathbf{u}_N(y_\Delta)ds(y_\Delta) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{S_\Delta}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{v}^{1j}\mathbf{t}_N^{(\nu_\Delta)}(y_\Delta)ds(y_\Delta), \quad x_\Delta \in G_\Delta \tag{2.3}$$

где $\{v^{ij}\}_{i,j=1,\dots,m}$ – тензор фундаментальных решений уравнений Ламе (тензор Сомильяны [10]).

Представление (2.3) обосновано [11] для кусочно-гладкой границы S_Δ и несвязанным граничным значениям $\mathbf{u}_N$, $\mathbf{t}_N^{(\nu_\Delta)}$ ставит в соответствие одну и туже вектор-функцию – решение уравнения Ламе в области, лежащей внутри (и вне) S_Δ. Таким образом, функции

$$\alpha_N \in D_\Delta = \{x_\Delta |\ \mathrm{A}\alpha_N(x_\Delta) = 0, \quad x_\Delta \in G_\Delta\}$$

являются допустимыми функциями конечномерной вариационной задачи для дискретного лагранжиана $L_\Delta(\mathbf{u}_N, \mathbf{t}_N^{(\nu_\Delta)}, \lambda_N)$. На аппроксимациях $\{\mathbf{u}_N\}$, $\{\mathbf{t}_N^{(\nu_\Delta)}\}$, $\{\lambda_N\}$ вариационные уравнения (1.8)–(1.10) приводятся [1, 2] к следующей системе дискретных граничных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\Big[\int \mathbf{t}_n^{(\nu_n)}\psi_l|J_n|ds_n + \int\lambda_n c\frac{\partial\psi_l}{\partial\nu_n}|J_n|ds_n\Big] = \\
&= 2\sum_{n=1}^{N}\int \mathbf{g}_n^{(\nu_n)}\psi_l|J_n|ds_n, \quad l=1,\dots,K \\
&\sum_{n=1}^{N}\Big[\int \mathbf{u}_n\psi_l|J_n|ds_n - \int\lambda_n\psi_l|J_n|ds_n\Big] = 0 \\
&\sum_{n=1}^{N}\Big[\int \mathbf{t}_n^{(\nu_n)}\psi_l|J_n|ds_n - \int\mathbf{t}^{(\nu_n)}(\mathbf{u}_n)\psi_l|J_n|ds_n\Big] = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь интегрирование производится по объединению ГЭ Δs_n, для которых узел k (см. (2.2)) является общим, и приняты следующие обозначения (см. также [9]): $|J_n|$ – определитель матрицы Якоби преобразования элемента поверхности $ds_n(\eta)$ в локальной системе координат в элемент поверхности $ds_n(y)$ в глобальной (декартовой) системе координат; $\mathbf{g}_n^{(\nu_n)}$ – ГЭА вида (2.2) заданного вектора $\mathbf{g}^{(\nu)}$ (см. (1.1)), ν_n – внешняя нормаль в точках ГЭ Δs_n; $c(\theta,\mu)$ – постоянная, зависящая от постоянных Ламе, которая появляется [9] при переходе от аппроксимации $\mathbf{u}_n$ (см. (2.2)) к аппроксимации вектора напряжений $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_n)$. В простейших задачах, например в задаче о кручении однородного упругого стержня, имеем [9] $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_n) = 2\mu\partial\mathbf{u}_n/\partial\nu$; в общем случае оператору $c\partial/\partial\nu$ соответствует некоторый скалярный оператор, вид которого определяется [9] вектором $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})$ (см. (1.2)).

Проведем сравнение с ГЭА "по Ритцу" связанных вариационных формулировок [1, 2, 9]. В отличие от процесса Ритца, где градиент дискретного функционала соответствует взятию производной от квадратичной формы параметров (искомых узловых значений), здесь градиент соответствует взятию производной по параметрам, которые входят линейно в дискретный лагранжиан L_Δ. Таким образом, в (2.4) первое уравнение соответствует $\mathrm{grad}_{\mathbf{U}_{nk}} L_\Delta = 0$ ($\mathbf{U}_{nk}$ – вектор) и записывается относительно параметров $\mathbf{T}_{nk}$, Λ_{nk}; второе и третье уравнения соответствуют $\mathrm{grad}_{\mathbf{T}_{nk}} L_\Delta = 0$ и $\mathrm{grad}_{\Lambda_{nk}} L_\Delta = 0$ и записываются относительно параметров соответственно $\mathbf{U}_{nk}$, Λ_{nk} и $\mathbf{T}_{nk}$, $\mathbf{U}_{nk}$.

Из изложенного следует, что вариационные уравнения (1.8) – (1.10) могут также рассматриваться как уравнения для построения ГЭА "по Галеркину" (см. [5]).

Установим теперь тождественность системы (2.4) системе дискретных граничных уравнений ГЭА задачи (1.1) на приближениях "по Ритцу" $\{\mathbf{u}_N\}$ [1, 2, 9]. Проведем следующий анализ. Используя третье уравнение системы (2.4), из первого уравнения исключаем первое слагаемое. Полученная система двух уравнений достаточно просто анализируется: из второго уравнения следует $\mathbf{u}_N \equiv \lambda_N$, что соответствует установленной выше тождественности множителей Лагранжа и векторов перемещений; из первого уравнения, учитывая ГЭА

$$\mathbf{t}^{(\nu_n)}(\mathbf{u}_n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} U_{nk}^{(i)} c(\theta, \mu) \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu_n}$$

условие симметрии коэффициентов матрицы системы МГЭ [1, 9]

$$\int_{\Delta s_n} \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu_n} \psi_l |J_n| ds_n(\eta) = \int_{\Delta s_n} \psi_k \frac{\partial \psi_l}{\partial \nu_n} |J_n| ds_n(\eta), \quad k, l = 1, \ldots, K$$

а также равенство $\mathbf{U}_{nk} = \Lambda_{nk}$ (как следствие $\mathbf{u}_n \equiv \lambda_n$), получим

$$2 \sum_{n=1}^{N} \int_{U\Delta s_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} U_{nk}^{(i)} c(\theta, \mu) \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu_n} \psi_l |J_n| ds_n(\eta) =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{N} \int_{U\Delta s_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K} Q_{nk}^{(i)} \psi_k \psi_l |J_n| ds_n(\eta), \quad l = 1, \ldots, K \tag{2.5}$$

что совпадает с системой дискретных граничных уравнений ГЭА задачи (1.1).

В связи с изложенной несвязанной вариационной формулировкой для граничных функционалов теории упругости отметим, что в линейной теории упругости известны также функционалы, допускающие независимое варьирование переменных перемещений и напряжений, например функционал Хеллинджера – Рейсснера. На основании вариационных формулировок для указанного функционала приведены [5] смешанные конечно-элементные аппроксимации решений двойственных задач. Несвязанные формулировки и соответственно алгоритм двойственности их реализации могут быть предложены также на основании задачи минимизации [1] обобщенных функционалов Трефтца граничных задач линейной теории упругости. Подобный алгоритм и вариационно-разностная схема его реализации рассмотрена в [12].

3. Займемся обоснованием алгоритма построения ГЭА; можно доказать, что если при $N \to \infty$ ($\operatorname{diam} \Delta s_n \to 0$) $S_\Delta \to S$ (или $S_\Delta \equiv S$, что соответствует конформному методу конечных элементов [5]), то $(\mathbf{u}_N, \mathbf{t}_N^{(\nu_\Delta)}) \to (\mathbf{u}_0, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0))$ в смысле

$$|\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_0|_{\frac{1}{2}, S} \to 0, \quad \| \mathbf{t}_N^{(\nu_\Delta)} - \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0) \|_{-\frac{1}{2}, S} \to 0 \tag{3.1}$$

где норма $|\cdot|_{\frac{1}{2}, S}$ определена в подпространстве $W_2^{*\frac{1}{2}}(S) \subset W_2^{\frac{1}{2}}(S)$, на котором граничная квадратичная форма [6] $\langle \mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}) \rangle$ положительно определена и

$$|\mathbf{u}|_{\frac{1}{2}, S} = \{\langle \mathbf{u}, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}) \rangle\}^{\frac{1}{2}}$$

Для доказательства используем вариационное уравнение (1.8) как интегральное тождество (с интегралами по S_Δ) при $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$, $\lambda = \lambda_0$ и при $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_N$, $\lambda = \lambda_N$, получим два равенства. Учитывая, что в силу (1.10) при $\delta = \lambda_N$ и при $\delta = \lambda_0$ имеем соответственно $\mathbf{t}_{\lambda_N}^{(\nu_\Delta)} = \mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N)$ и $\mathbf{t}_{\lambda_0}^{(\nu)} = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)$, в первом равенстве положим $\mathbf{u} = \mathbf{u}_N$, $\mathbf{t}_{\lambda_N}^{(\nu_\Delta)} = \mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N)$, во втором – $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{t}_{\lambda_0}^{(\nu)} = \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)$ и полученные равенства сложим, тогда

$$w_\Delta(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_N, \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0) - \mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N)) = \int_{S_\Delta} (\lambda_0 - \lambda_N)[\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0) - \mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N)] ds_\Delta$$

Если $S_\Delta \to S$ (или $S_\Delta \equiv S$), то правая часть в этом равенстве обращается в нуль в силу (1.10) при $\delta = \lambda_0 - \lambda_N$, а левая часть равна $|u_0 - u_N|^2_{1/2,S}$. Следовательно, имеет место первая сходимость из (3.1). Аналогично, рассматривая вариационное уравнение (1.9), можно установить вторую сходимость из (3.1), хотя она следует также из оценки теоремы о следах [5], если имеет место первая сходимость. Отметим, что приведенная методика доказательства сходимости в определенной степени стандартна и использовалась ранее [13] при обосновании алгоритма двойственности для решения обобщенной задачи Синьорини.

Для оценки погрешности ГЭА естественно использовать апостериорные оценки погрешности на основании двусторонних оценок функционала $L(u_0, t^{(\nu)}(u_0), \cdot\lambda_0)$. Такие оценки оказываются тождественными ранее полученным [6] оценкам для связанных аппроксимаций.

В (2.1) положим $u = u_N$, $t^{(\nu)} = t^{(\nu\Delta)}(u_N)$, $\lambda = \lambda_N$ и образуем разность функционалов

$$L_\Delta(u_N, t^{(\nu\Delta)}(u_N), \lambda_0) - L_\Delta(u_0, t^{(\nu)}(u_0), \lambda_N) \tag{3.2}$$

(индексом Δ обозначаются выражения с интегралами по S_Δ и $u_{0\Delta}$, $\lambda_{0\Delta}$ – значения u_0, λ_0 в точках S_Δ). Учитывая, что уравнения связей (1.3) выполняются на точном и приближенном решениях, следовательно, $f_\Delta(u_0, t^{(\nu)}(u_0), \lambda_N) = 0$, $f_\Delta(u_N, t^{(\nu\Delta)}(u_N), \lambda_0) = 0$ и, используя выражение лагранжиана (1.4) получим, что разность (3.2) равна разности граничных функционалов (см. (1.1))

$$F_{S_\Delta}(u_N) - F_{S_\Delta}(u_0) = w_\Delta(u_N) - w_\Delta(u_0) - 2l(u_N - u_0) \tag{3.3}$$

где $w_\Delta(u_N) = w_\Delta(u_N, t^{(\nu\Delta)}(u_N))$, аналогично $w_\Delta(u_0)$.

Далее используется вариационное уравнение для $F_{S_\Delta}(u_0)$ (см. (1.1)), из которого следует, что $l_\Delta(u_N - u_0) = w_\Delta(u_0, u_N - u_0)$. Тогда разность (3.3) записывается в виде

$$w_\Delta(u_N) - 2w_\Delta(u_0, u_N) + w_\Delta(u_0) = w_\Delta(u_N - u_0) = |u_N - u_0|^2_{1/2, S_\Delta}$$

Для получения апостериорной оценки далее используется оценка снизу [6] функционала $F_{S_\Delta}(u_0)$ через функционал $\Phi_{S_\Delta}(t^{(\nu\Delta)}(u_N))$ двойственной связанной задачи. Таким образом, имеем

$$|u_N - u_0|^2_{1/2, S_\Delta} \leqslant F_{S_\Delta}(u_N) - \Phi_{S_\Delta}(t^{(\nu\Delta)}(u_N))$$

При этом правая часть приводится [6] к виду, удобному для вычислений

$$2\int_{S_\Delta} u_N[t^{(\nu\Delta)}(u_N) - g_N^{(\nu\Delta)}]\,ds_\Delta$$

4. Обсудим вопросы прикладного характера. Ранее предложенные [1, 2] вариационные формулировки МГЭ используют аппарат дискретных граничных потенциалов для аппроксимации решений прямой задачи (в перемещениях), или двойственной задачи (в напряжениях), при этом эти аппроксимации связаны через определяющие соотношения (1.2) в точках дискретной границы. Предложенные здесь формулировки используют одновременную несвязанную аппроксимацию решений прямой и двойственной задач. Таким образом, возможна аппроксимация поля напряжений в точках дискретной границы, независимая от аппроксимации поля перемещений в следующем смысле: если постановка задачи требует учета роста напряжений на некотором множестве точек границы (например, в особых точках контакта штампа с прямоугольным основанием с деформируемой средой), то аппроксимация границы и поля перемещений может быть изопараметрической, а поля напряжений – субпараметрической (с бо́льшим числом узлов интерполяции); аналогичная аппроксимация может быть принята для учета роста напряжений в окрестности вершины трещины в задачах о трещинах (отмечалось [14] вариационная постановка для граничных функционалов этих задач, см. дополнение Р.В. Гольдштейна). Альтернативная ГЭА – суперпараметрическая используется в задачах, где требуется учесть нерегулярность границы при ее аппроксимации. В обоих случаях число узлов в аппроксимациях границы и решения может быть разным, но порядок системы (2.4) определяется числом узлов аппроксимации решения и интегральные коэффициенты

при искомых узловых значениях перемещений и напряжений определяются от базисных функций разных порядков.

Рассмотрим подробнее структуру системы дискретных граничных уравнений при субпараметрической аппроксимации, представляющей интерес для решения отмеченных выше задач. Пусть $\{k\}_{1,\ldots,K}$, $\{k\}'_{1,\ldots,K'}$ – множества узлов интерполяции в точках ГЭ Δs_n ($n = 1, \ldots, N$) соответственно векторов перемещений $\mathbf{u}_n(\lambda_n)$ и напряжений $\mathbf{t}_n^{(\nu_n)}$ по их узловым значениям $\mathbf{U}_{nk} = \{U_{nk}^{(i)}\}_{i=1,\ldots,m}$ и $\mathbf{T}_{nk} = \{T_{nk}^{(i)}\}_{i=1,\ldots,m}$, а ψ_k, $k \in \{k\}$, ψ'_k, $k \in \{k\}'$ – соответствующие базисные функции МГЭ (в общем случае разных порядков относительно η). При $K \neq K'$ система (2.4) записывается в виде:

$$\sum_{n=1}^{N} \Big[\int_{U\Delta s_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{K'} T_{nk}^{(i)} \psi'_k \psi'_l |J_n| ds_n(\eta) + \int_{U\Delta s_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{K} \Lambda_{nk}^{(i)} \psi_k c \frac{\partial \psi_l}{\partial \nu_n} |J_n| ds_n(\eta) \Big] =$$
$$= 2 \sum_{n=1}^{N} \int_{U\Delta s_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{K'} Q_{nk}^{(i)} \psi'_k \psi'_l |J_n| ds_n(\eta)$$
$$\sum_{n=1}^{N} \Big[\int_{U\Delta s_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{K} U_{nk}^{(i)} \psi_k \psi_l |J_n| ds_n(\eta) - \int_{U\Delta s_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{K} \Lambda_{nk}^{(i)} \psi_k \psi_l |J_n| ds_n(\eta) \Big] = 0 \qquad (4.1)$$
$$\sum_{n=1}^{N} \Big[\int_{U\Delta s_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{K'} T_{nk}^{(i)} \psi'_k \psi'_l |J_n| ds_n(\eta) - \int_{U\Delta s_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{K} U_{nk}^{(i)} c \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu_n} \psi_l |J_n| ds_n(\eta) \Big] = 0$$

и матрица системы имеет переменную ширину ленты. При изопараметрической аппроксимации имеем $\{k\} \equiv \{k\}'$, $\psi_k \equiv \psi'_k$ и система (4.1), как было показано выше, приводится к (2.5). Для случая $K' > K$ и $\{k\}' \supset \{k\}$ (т.е. рассматриваются дополнительные узлы интерполяции поля напряжений) при помощи равенств

$$\Lambda_{nk}^{(i)} = U_{nk}^{(i)}, \quad T_{nk}^{(i)} = c(\theta, \mu) U_{nk}^{(i)}, \quad \forall k \in \{k\} \qquad (4.2)$$

(второе из них отражает выполнение определяющих соотношений для узловых значений перемещений и напряжений на множестве $\{k\}$ узлов интерполяции множителей Лагранжа) решение системы (4.1) приводится к решению системы дискретных граничных уравнений относительно компонент узловых напряжений $T_{nk}^{(i)}$

$$\sum_{n=1}^{N} \Big[\int_{U\Delta s_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{K'} T_{nk}^{(i)} \psi'_k \psi'_l |J_n| ds_n(\eta) + \int_{U\Delta s_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{K} T_{nk}^{(i)} \psi_k \frac{\partial \psi_l}{\partial \nu_n} |J_n| ds_n(\eta) \Big] =$$
$$= 2 \sum_{n=1}^{N} \int_{U\Delta s_n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{K'} Q_{nk}^{(i)} \psi'_k \psi'_l |J_n| ds_n(\eta) \qquad (4.3)$$

где $Q_{nk}^{(i)}$ – узловые значения компонент заданного вектора напряжений $\mathbf{g}^{(\nu)}$ (см. (1.1)).

Обоснование априори задаваемых определяющих соотношений (4.2) следует из того, что при подстановке первого слагаемого системы (4.3) в третье уравнение системы (4.1), при учете соотношений (4.2) и условий симметрии коэффициентов системы МГЭ (см. выше), получаем систему, правая часть которой содержит вклады узлов $k \in \{k\}'$; сужение правой части на множество узлов $\{k\}$ дает систему, соответствующую системе (2.5) для связанной ГЭА, при решении которой реализуются определяющие соотношения (4.2). После определения значений $T_{nk}^{(i)}$ на множестве $\{k\}'$ из (4.3) значения $U_{nk}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$ на множестве $\{k\}$ определяются из третьего уравнения системы (4.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Терещенко В.Я.* О некоторых формулировках метода граничных элементов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 616–627.

2. *Терещенко В.Я.* Двойственные формулировки метода граничных элементов. Приложение к задачам теории упругости для неоднородных тел // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 118–125.

3. *Терещенко В.Я.* К вопросу обоснования вариационных формулировок метода граничных элементов // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 309–316.

4. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
5. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
6. *Терещенко В.Я.* Двойственные вариационные задачи для граничных функционалов линейной теории упругости // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 1053–1059.
7. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
8. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
9. *Терещенко В.Я.* Алгоритм реализации и оценки погрешности вариационного метода граничных элементов в задачах теории упругости // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 442–451.
10. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
11. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
12. *Терещенко В.Я.* Вариационно-разностная схема реализации алгоритма двойственности в задачах минимизации обобщенных функционалов Трефтца // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 30. № 2. С. 320–324.
13. *Терещенко В.Я.* Об алгоритме решения задачи Синьорини // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 1020–1029.
14. Метод граничных интегральных уравнений // Под ред. Круз. Т., Риццо Ф. М.: Мир, 1978. 210 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
27.XI.1991