Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 5, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. С.В. Кузнецов

ПРЯМОЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассматривается вариант прямого метода граничных интегральных уравнений (ГИУ), приводящий к системам сингулярных интегральных уравнений второго рода при решении всех основных типов краевых задач теории упругости. Изложение ведется применительно к средам с произвольной упругой анизотропией.

Сингулярные интегральные уравнения второго рода в прямом методе ГИУ получаются при решении второй краевой задачи с заданными на границе $\partial\Omega$ основной области поверхностными напряжениями, если записать тождество Сомильяны для $\partial\Omega$ [1]:

$$(^1/_2 + \mathbf{S}^t)(\mathbf{u}_0)(\mathbf{x}') = \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{t}_0(\mathbf{y}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}' - \mathbf{y}')\, dy' \tag{0.1}$$

Здесь $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{t}_0$ – значения поверхностных перемещений и напряжений соответственно, $\mathbf{E}$ – фундаментальное решение Кельвина (Кельвина–Буссинеска для плоского случая), $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица, $\mathbf{S}$ – матричный сингулярный оператор, получаемый сужением потенциала двойного слоя на $\partial\Omega$. В случае первой краевой задачи соотношение (0.1) приводит к интегральным уравнениям первого рода (относительно $\mathbf{t}_0$) с вполне непрерывным ядром $\mathbf{E}$. Учитывая некорректность этой задачи, для получения численно устойчивых решений необходимо использовать методы регуляризации. Аналогичные проблемы возникают и при решении смешанных краевых задач. Прямые варианты метода ГИУ возможны также при решении плоских задач теории упругости при помощи комплексных потенциалов [2].

Для получения уравнений второго рода в прямых вариантах ГИУ при решении первой краевой задачи естественно воздействовать оператором напряжений на обе части тождества Сомильяны. Тогда

$$(^1/_2 + \mathbf{S}^*)(\mathbf{t}_0)(\mathbf{x}') = \mathbf{G}_0(\mathbf{u}_0)(\mathbf{x}') \tag{0.2}$$

$$\mathbf{G}_0(\mathbf{u}_0)(\mathbf{x}') = \lim_{x'' \to x'} T(\nu_{x'}, \partial_{x''}) \int\limits_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0(\mathbf{y}') \cdot \mathbf{T}(\nu_{y'}, \partial_{y'})\, \mathbf{E}(\mathbf{x}' - \mathbf{y}')\, dy' \tag{0.3}$$

Пределы в левой части формулы (0.3) вычисляются по некасательным направлениям к $\partial\Omega$. Уравнение (0.2) является уравнением второго рода относительно $\mathbf{t}_0$, однако оператор $\mathbf{G}_0$ оказывается сверхсингулярным. Аналогичные сверхсингулярные операторы появляются и при решении смешанных краевых задач. Свойства таких операторов с вычислительной точки зрения почти не изучены [3].

Ниже развивается вариант прямого метода, приводящий к уравнениям второго рода, аналогичным (0.2) для всех основных типов граничных задач теории упругости. Показано, что оператор $\mathbf{G}_0$ может быть представлен в виде композиции интегрального оператора со слабой особенностью и оператора Бельтрами – Лапласа. Такое представление позволяет исключать окрестности ω_ϵ точек, содержащих неинтегрируемые составляющие сверхсингулярных интегралов с ошибкой $O(\mathrm{mes}(\omega_\epsilon))$. Это в свою очередь позволяет распространить имеющиеся программные средства, предназначенные для вычисления сингулярных интегралов и интегралов со слабой особенностью, на сверхсингулярные интегралы рассматриваемого вида.

1. Основные соотношения. Рассматривается однородная анизотропная упругая среда, уравнения равновесия которой имеют вид

$$\mathbf{A}(\partial_x)\,\mathbf{u} \equiv -\mathrm{div}\,\mathbf{C} \cdot\cdot (\nabla \mathbf{u}) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, $\mathbf{C}$ – четырехвалентный строго эллиптичный тензор упругости:

$$(\eta \otimes \xi) \cdot\cdot \mathbf{C} \cdot\cdot (\xi \otimes \eta) > 0, \quad \forall\, \eta, \xi \in R^3, \quad \eta, \xi \neq 0, \tag{1.2}$$

Предполагается, что исследуемая среда гиперупругая: это приводит к симметрии тензора **C** по крайним парам индексов: $C^{mnij} = C^{ijmn}$. Условие (1.2) обеспечивает эллиптичность матричного символа $\mathbf{A}^{\vee}$:

$$\mathbf{A}^{\vee}(\xi) = (2\pi)^2 \xi \cdot \mathbf{C} \cdot \xi \tag{1.3}$$

полученного применением преобразования Фурье

$$f^{\vee}(\xi) = \int_{R^3} f(\mathbf{x}) \exp(-2\pi i \mathbf{x} \cdot \xi)\, dx, \quad f \in L^2(R^3)$$

к уравнению (1.1).

Используя символ $\mathbf{A}^{\vee}$, легко построить обратный символ $\mathbf{E}^{\vee}$, представляющий собой преобразованное по Фурье фундаментальное решение:

$$\mathbf{E}^{\vee}(\xi) = \mathbf{A}_0^{\vee}(\xi)/\det \mathbf{A}^{\vee}(\xi) \tag{1.4}$$

где $\mathbf{A}_0^{\vee}$ – матрица алгебраических дополнений символа $\mathbf{A}^{\vee}$. Формула (1.4) показывает, что символ $\mathbf{E}^{\vee}$ эллиптичен, вещественно аналитичен всюду в $R^3 \setminus 0$ и однороден по $|\xi|$ степени –2. Обращение по Фурье выражения (1.4) в общем случае анизотропии удается осуществить лишь численно [4].

Пусть Ω – ограниченная односвязная область в R^3 с границей $\partial\Omega$, представляющей собой вложенное компактное $C^{m,\alpha}$-подмногообразие с $m \geqslant 1$, $\alpha > 0$ в R^3. На поверхности $\partial\Omega$ задается оператор граничных условий

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}(\nu, \partial_x)\,\mathbf{u} \equiv (\mathbf{M} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}(\nu, \partial_x)\,\mathbf{u})|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} \\ &\mathbf{T}(\nu, \partial_x)\,\mathbf{u} \equiv \nu \cdot \mathbf{C} \cdot \operatorname{sym}(\nabla \mathbf{u}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

где **M**, **N** – квадратные матрицы, **T** – оператор напряжений, ν – вектор единичной нормали к $\partial\Omega$.

Оператор **B** позволяет единым аналитическим выражением описать различные типы граничных условий в теории упругости. В частности, при $\mathbf{M} = \mathbf{I}$, $\mathbf{N} = 0$, где **I** – единичная диагональная матрица, это условия первой краевой задачи; при $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{N} = \mathbf{I}$ – условия второй краевой задачи; при $\mathbf{M} = \nu \otimes \nu$, $\mathbf{N} = \mathbf{I} - \nu \otimes \nu$ – условия третьей краевой задачи (задачи Адамара), когда на границе задается нормальная компонента вектора смещений и касательные напряжения; при $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \nu \otimes \nu$, $\mathbf{N} = \nu \otimes \nu$ получаем четвертую краевую задачу. Аналогичным образом могут задаваться и другие типы граничных условий.

2. Граничные операторы прямого метода. Введем в рассмотрение векторы

$$\mathbf{g} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{N} \cdot \mathbf{t}_0, \quad \mathbf{f} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{M} \cdot \mathbf{t}_0 \tag{2.1}$$

Очевидно, что для краевых задач 1–4 векторы **f** и **g** определяют соответственно известную и неизвестную векторные плотности на $\partial\Omega$.

Записывая тождество Сомильяны для точек граничной поверхности $\partial\Omega$ и вычисляя напряжения на границе, получим следующие аналоги формул (0.1), (0.2) для решения краевых задач 1–4:

$$\mathbf{K}(\mathbf{f})(\mathbf{x}') = \mathbf{G}(\mathbf{g})(\mathbf{x}') \tag{2.2}$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{I}/2 + \mathbf{S}^t) \cdot \mathbf{N} + (\mathbf{I}/2 + \mathbf{S}^*) \cdot \mathbf{M} = \mathbf{I}/2 + \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{N} + \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{M} \tag{2.3}$$

где **K** – матричный сингулярный оператор. Ядро интегродифференциального оператора **G** имеет вид

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \mathbf{E}(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \cdot \mathbf{N} + \mathbf{G}_0(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \cdot \mathbf{M} \tag{2.4}$$

В свою очередь ядро сверхсингулярного оператора $\mathbf{G}_0$ определено формулой (0.3).

Анализ соотношения (2.3) показывает, что справедливо

Предложение 1. Оператор **K** является матричным стандартным псевдодифференциальным оператором класса S° на $\partial\Omega$.

Определение. Спектром оператора **X** будем называть множество (комплексных) чисел λ, при которых оператор $\lambda\mathbf{I}-\mathbf{X}$ необратим в классе непрерывных эндоморфизмов, действующих в соответствующем функциональном пространстве.

Обозначим через $H^s(\partial\Omega, R^3)$ пространство Соболева–Слободецкого индекса $s \geqslant 0$. Если $\partial\Omega$ – многообразие класса $C^{m,\alpha}$ и $s < 2m+\alpha$, то пространства H^s корректно определены на $\partial\Omega$. В дальнейшем это условие, накладываемое на индекс s, предполагается выполненным.

Лемма 1. А. Спектр оператора **S** дискретен. Б. Спектр **S** лежит в круге $|\lambda| \leqslant ½$. В. Точка $\lambda = -½$ принадлежит спектру S и является простым полюсом резольвенты. Г. Спектральное подпростарнство $\mathbf{E}_{-½}$ шестимерно и содержит сужения на $\partial\Omega$ жестких перемещений: $\mathbf{c}+\mathbf{W}\cdot\mathbf{x}'$, где $\mathbf{W}$ – произвольный кососимметричный тензор.

Лемма была доказана как для изотропного [5, 6], так и анизотропного случая [7].

Непосредственно из утверждения леммы 1В вытекает

Предложение 2. В фактор-пространстве $H^s(\partial\Omega, R^3)\setminus\mathbf{E}_{-½}$ оператор K обратим.

Таким образом, в $H^s(\partial\Omega, R^3)\setminus\mathbf{E}_{-½}$ уравнение второго рода (2.2) однозначно разрешимо:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}') = \mathbf{K}^{-1}\circ\mathbf{G}(\mathbf{g})(\mathbf{x}') \tag{2.5}$$

При этом предполагается, что правая часть $\mathbf{G}(\mathbf{g})(\mathbf{x}')$ принадлежит указанному фактор-пространству.

Построение обратного оператора $\mathbf{K}^{-1}$ может быть осуществлено при помощи ряда Неймана:

$$\mathbf{K}^{-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-2\mathbf{S}^t\cdot\mathbf{N} - 2\mathbf{S}^*\cdot\mathbf{M})^n \tag{2.6}$$

В силу утверждений леммы 1Б, В ряд Неймана (2.6) абсолютно сходится в $H^s(\partial\Omega, R^3)\setminus\mathbf{E}_{-½}$. Аналогичный метод построения обратного оператора в анизотропном случае для краевых задач 1, 2 был указан ранее [8].

Замечание 1. При решении внутренних и внешних краевых задач 1–4 непрямыми методами ГИУ [5, 6] соответствующие корневые пространства оказываются различными и, вообще говоря, отличающимися от $\mathbf{E}_{-½}$. Это объясняется тем, что в упомянутых методах граничный оператор может содержать также операторы вида $-\mathbf{I}/2+\mathbf{S}$, причем точка $\lambda = ½$ уже не принадлежит спектру **S**.

3. **Свойства оператора $\mathbf{G}_0$.** Основной результат этого раздела состоит в обосновании возможности исключения областей, содержащих неинтегрируемые особенности сверхсингулярных интегралов.

Непосредственное использование формулы (0.3) для сверхсингулярного ядра $\mathbf{G}_0$ неудобно, поскольку требуется вычислять пределы по некасательным направлениям. Для целей настоящего раздела более удобные формулы получаются, если перейти к исследованию главного символа $\mathbf{G}_0^{\sim}$:

$$\mathbf{G}_0^{\sim}(\mathbf{x}', \xi') = \lim_{x''\to\pm 0}\int\mathbf{T}^{\mathrm{v}}(\nu_{x'}, \xi)\cdot\mathbf{E}^{\mathrm{v}}(\xi)\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{v}t}(\nu_{x'}, \xi)\exp(-2\pi i\,\xi''x'')\,dx''$$

$$\xi' = \xi - (\xi\cdot\nu_{x'})\nu_{x'}, \quad \xi'' = \xi\cdot\nu_{x'}, \quad \mathbf{x}'\in\partial\Omega \tag{3.1}$$

Знак $\sim$ здесь и в дальнейшем означает преобразование Фурье по переменным, лежащим в кокасательном расслоении $T^*\partial\Omega$. В дальнейшем зависимость от x' в обозначении символа $\mathbf{G}_0^{\sim}$ будет опускаться.

Несобственный интеграл в (3.1) может быть представлен в более простом виде, если воспользоваться очевидными равенствами

$$\mathrm{T}^{\vee}(\nu,\xi) = -\frac{A^{\vee}(\xi) - (2\pi)^2 \xi' \cdot \mathbf{C} \cdot \xi}{2\pi i \xi''}, \quad \mathrm{T}^{\vee^t}(\nu,\xi) = -\frac{A^{\vee}(\xi) - (2\pi)^2 \xi \cdot \mathbf{C} \cdot \xi'}{2\pi i \xi''} \tag{3.2}$$

и принять во внимание, что $\mathrm{A}^{\vee}(\xi) \circ \mathrm{E}^{\vee}(\xi) = \mathrm{I}$. При учете соотношений (3.2) имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{G}_0^{\sim}(\xi') = &-\mathrm{sym}[(2\pi i)(\xi' \cdot \mathbf{C} \cdot \xi') \cdot H_{\xi''}\mathrm{E}^{\vee}(\xi', 0) \cdot (\xi' \cdot \mathbf{C} \cdot \nu) + \\ &+ (2\pi i)^2 (\xi' \cdot \mathbf{C} \cdot \nu) \cdot \mathrm{E}^{\sim}(\xi', 0) \cdot (\xi' \cdot \mathbf{C} \cdot \nu) + (2\pi i)^2 (\xi' \cdot \mathbf{C} \cdot \xi') \cdot \mathrm{E}^{\sim}(\xi', 0) \cdot (\nu \cdot \mathbf{C} \cdot \nu) + \\ &+ (2\pi i)(\xi' \cdot \mathbf{C} \cdot \nu) \cdot \partial_{x''}\mathrm{E}^{\sim}(\xi', 0) \cdot (\nu \cdot \mathbf{C} \cdot \nu)] \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$H_{\xi''}\mathrm{E}^{\vee}(\xi', 0) = \mathrm{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{E}^{\vee}(\xi)}{2\pi i \xi''}\, d\xi'', \quad \mathrm{E}^{\sim}(\xi', 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}^{\vee}(\xi)\, d\xi'' \tag{3.4}$$

$$\partial_{x''}\mathrm{E}^{\sim}(\xi', 0) = \mathrm{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i \mathrm{E}^{\vee}(\xi)\, \xi'' d\xi''$$

Здесь $H_{\xi''}\mathrm{E}^{\vee}(\xi', 0)$ – значение в нуле преобразование Гильберта по ξ'' от $\mathrm{E}^{\vee}(\xi)$, а $\mathrm{E}^{\sim}(\xi', 0)$ – значение при $x'' = 0$ частичного преобразования Фурье по x'. Аналогичным образом определяется и $\partial_{x''}\mathrm{E}^{\sim}(\xi', 0)$.

Существенно, что интегралы (3.4) корректно определены при любых $\xi' \neq 0$, поскольку символ $\mathrm{E}^{\vee}$, рассматриваемый как функция одного параметра ξ'', бесконечно дифференцируем и принадлежит классу L^p, $p \geqslant 1$.

Непосредственный анализ выражения (3.3) показывает, что справедливо следующее утверждение:

Предложение 3. А. Матричный символ $\mathrm{G}_0^{\sim}$ является символом класса S^1 (положительно однородным степени 1). Б. Символ $\mathrm{G}_0^{\sim}$ положительно полуопределен при любых $\xi' \neq 0$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathrm{G}^{\sim}(\xi') \cdot \mathbf{a} \geqslant 0, \quad \forall\, \mathbf{a} \in R^3, \quad \mathbf{a} \neq 0$$

При учете предложения 3 можно записать

$$\mathrm{G}_0^{\sim}(\xi') = -(2\pi)^2 \Delta^{\sim}(\xi')\, \mathrm{V}^{\sim}(\xi') \tag{3.5}$$

где $\mathrm{V}^{\sim} \in S^{-1}$ – главный символ интегрального оператора со слабой (интегрируемой) особенностью на $\partial\Omega$, а $\Delta^{\sim}$ – главный символ оператора Бельтрами–Лапласа на $\partial\Omega$. Обратное преобразование Фурье, примененное к (3.5), дает

$$\mathrm{G}_0 = \mathrm{V} \circ \Delta + \mathbf{r} \tag{3.6}$$

где $\mathbf{r}$ – оператор класса S^0 на $\partial\Omega$.

Предложение 4. Вычисление сверхсингулярного интеграла с ядром G_0 от функции $\mathbf{g} \in H^2(\partial\Omega, R^3)$ при исключении окрестности полюса ω_ϵ дает ошибку $O(\mathrm{mes}(\omega_\epsilon))$.

Доказательство. Правая часть (0.3) показывает, что $\mathrm{G}_0(\mathbf{g})(\mathrm{x}') = \mathrm{G}_0(\mathbf{g} - \mathbf{g}_{x'})(\mathrm{x}')$, где $\mathbf{g}_{x'}$ – постоянное на $\partial\Omega$ векторное поле, равное значению $\mathbf{g}$ в точке x'. Таким образом, главная часть оператора $\mathbf{r}$ в (3.6) является оператором Кальдерона–Зигмунда и не содержит δ-составляющих. Поскольку $\mathbf{g}(\mathrm{y}') - \mathbf{g}_{x'}|_{y'=x'} = 0$, в предположении, что поле $\mathbf{g}$ локально постоянно в окрестности x', сверхсингулярный интеграл $\mathrm{G}_0(\mathbf{g} - \mathbf{g}_{x'})$ оказывается корректно определенным как интеграл в смысле главного значения.

Таким образом, для определения значений сверхсингулярного оператора $\mathrm{G}_0(\mathbf{g})$ могут использоваться стандартные программы по вычислению сингулярных интегралов и интегралов со слабой особенностью, основанные на исключении из рассмотрения областей, содержащих неинтегрируемые особенности.

4. Определение ядра G_0 методом мультиполярных разложений. Примененный в предыдущем разделе метод анализа оператора G_0, основанный на исследовании соответствующего символа, представляется не очень удобным для практического построения этого оператора, в особенности для задач с произвольной упругой анизотропией.

Ниже методом мультипольных разложений строится ядро оператора G_0. Этот метод применялся для восстановления фундаментальных решений уравнений равновесия по их символам [4] и для восстановления операторов [9], аналогичных рассматриваемым ниже.

Определим символ Z_0^v

$$Z_0^v(\xi) = C \cdot \cdot \, \xi \otimes E^v(\xi) \otimes \xi \cdot \cdot \, C \tag{4.1}$$

Сверткой с векторами единичных нормалей $\nu_{x'}$, $\nu_{y'}$, x', $y' \in \partial\Omega$ из (4.1) получается амплитуда

$$G_0^v(\xi) = T^v(\nu_{x'}, \xi) \cdot E^v(\xi) \cdot T^{v^t}(\nu_{y'}, \xi) = \nu_{x'} \cdot Z_0^v(\xi) \cdot \nu_{y'} \tag{4.2}$$

Она в свою очередь порождает символ $G_0^{\sim}$, исследовавшийся в предыдущем разделе.

Рассмотрим разложение положительно однородного степени нуль символа Z_0^v в мультипольный ряд (ряд по поверхностным сферическим гармоникам):

$$Z_0^v(\xi') = \sum_{p=0,2,\ldots}^{\infty} \sum_{k=1}^{2p+1} Z^{p,k}\, Y_k^p(\xi') \tag{4.3}$$

$$Z^{p,k} = (2\pi)^{-2} \int_S Z_0^v(\xi')\, Y_k^p(\xi')\, d\xi'$$

где Y_k^p – сферические гармоники, а тензорные коэффициенты $Z^{p,k}$ определяются интегрированием по сфере S единичного радиуса в R^3.

Тот факт, что в разложении (4.3) присутствуют лишь гармоники четных степеней, обусловлен положительной однородностью символа Z_0^v. Обратное преобразование Фурье (4.3) дает [10]

$$Z'_0(x) = \pi^{-3/2} \sum_{p=2,4,\ldots}^{\infty} (-1)^{p/2}\, \frac{\Gamma((p+3)/2)}{\Gamma(p/2)} \sum_{k=1}^{2p+1} Z^{p,k}\, \frac{Y_k^p(x')}{|x|^3} \tag{4.4}$$

В этой формуле опущено слагаемое, отвечающее сферической гармонике степени нуль (константе) в (4.3), как приводящее при обратном преобразовании Фурье к появлению δ-образной составляющей. Последняя, как легко видеть, исчезает при сужениях на многообразия меньшей размерности и, в частности, на $\partial\Omega$.

Таким образом, ряд (4.4) определяет сверхсингулярное на $\partial\Omega$ ядро Z'_0. Осуществляя свертку с векторами $\nu_{x'}$, $\nu_{y'}$, получаем искомое ядро оператора G_0. Основные вопросы сходимости и численной реализации метода мультипольных разложений рассматривались ранее [4].

Замечание 2. Помимо мультипольных разложений восстановление оператора Z'_0 по соответствующему символу при произвольной анизотропии среды может производиться и при помощи преобразования Радона, для рассматриваемого класса задач представляющего собой дезинтегрирование лебеговой меры по плоскостям при обратном преобразовании Фурье. В отечественной литературе этот метод называют также методом разложения по плоским волнам [11]. Численные эксперименты по обращению символов фундаментальных решений показали [12], что в общем случае анизотропии этот метод приводит к значительным затратам машинного времени и для эффективной реализации требует проведения дополнительных аппроксимаций на сферах – по существу разложений характеристик или символов E^v по мультиполям. Аналогичные осложнения в методе Радона возникают и при восстановлении оператора Z'_0.

Автор выражает благодарность Р.В. Гольдштейну за постановку задачи и Ю.М. Мамедову за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rizzo F.J.* An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics//Quart. Appl. Math. 1967. V. 25. № 1. P. 83–95.
2. *Матехин Н.А., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В.* Некоторые прямые схемы метода потенциала//Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 2. С. 296–298.
3. *Бурчуладзе Т.В., Гегелиа Т.Г.* Развитие метода потенциала в теории упругости//Тр. Тбил. мат. ин-та. 1985. Т. 79. С. 5–226.
4. *Кузнецов С.В.* Фундаментальные решения уравнений Ламе для анизотропных упругих сред//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 50–54.
5. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
6. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математеической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
7. *Кузнецов С.В.* К вопросу о дискретности спектра сингулярных интегральных операторов теории упругости//Изв. вузов. Математика. 1991. № 5. С. 26–28.
8. *Кузнецов С.В.* Построение Тензора Грина и Неймана в теории упругости анизотропного тела// Прикл. механизка. 1991. Т. 27. № 7. С. 58–62.
9. *Кузнецов С.В.* Взаимодействие дислокаций в анизотропных средах//ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 870–873.
10. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.
11. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
12. *Wilson R.B., Cruse T.A.* Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary-integral equation stress analysis//Intern. J. Numer. Meth. Engng. 1978. V. 12. № 9. P. 1387–1397.

Поступила в редакцию
13.XI.1991

Москва