

УДК 539.3

© 1992 г. Ю.А. Антипов, Н.Х. Арутюнян

## КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНОВИДНЫХ ОБЛАСТЕЙ В УСЛОВИЯХ ТРЕНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ

Рассматривается вдавливание клиновидного штампа с углом раствора, близким к  $\pi$ , в упругую полуплоскость под действием центрально приложенной вертикальной силы  $P$ , причем область контакта, разбиваемая на участки сцепления и трения, фиксируется заранее или требует определения (задачи 1а или 1б соответственно). Исследуется плоская контактная задача для упругого клина, в который вдавливается штамп под действием вертикальной силы  $P$ , горизонтальной  $T$  и пары сил с моментом  $M$  (задача 2), причем штамп выходит на вершину клина, имеет плоский профиль, а область контакта разбивается на внутренний участок сцепления и два внешних участка кулоновского трения.

Для сформулированных задач, являющихся обобщением задачи [1], строится аналитическое решение с любой наперед заданной точностью методом [2], заключающимся в сведении задач к векторной задаче Римана для двух (задачи 1а, 1б) или трех (задача 2) пар функций и ее решении. Находятся границы зон сцепления и трения, а для задачи 1б – и область контакта. Строятся формулы для контактных напряжений. Доказывается их непрерывность в точке перехода от зоны сцепления к трению. Показывается ошибочность утверждения [3] о том, что при симметричном вдавливании штампа в полуплоскость отношение  $\lambda$  длин зон сцепления  $2b$  и контакта  $2a$  для плоского штампа и штампа, профиль которого описывается функцией  $f(x) = \Lambda |x|^n$  ( $n \geq 1$ ), одно и то же. Доказывается, что в случае гладкости профиля штампа в окрестности точки  $a$  величина  $\lambda$  есть функция только коэффициентов Пуассона  $\nu$ , трения  $\mu$  и показателя  $n$  и не зависит от коэффициента  $\Lambda$  и силы  $P$  (в частности, для задачи 1б величина  $\lambda$  не зависит от угла раствора штампа).

Введение зон трения в область контакта для задачи 2 позволяет не только устранить осцилляцию контактных напряжений в окрестности концов штампа, но и построить аналитическое решение контактной задачи для клина при неизвестных контактных касательных и нормальных напряжениях (аналогичное решение для полностью сцепленного штампа получить не удается).

Задача о контакте двух клиновидных упругих тел в условиях отсутствия касательных напряжений решена в [4].

**1. Задачи о клиновидном штампе.** Пусть в упругую полуплоскость ( $0 < r < \infty$ ,  $-\pi < \theta < 0$ ) с коэффициентом Пуассона  $\nu$  и модулем упругости  $E$  вдавливается клиновидный штамп с углом раствора  $2\gamma$ , близким к  $\pi$ , под действием центрально приложенной вертикальной силы  $P$ . Область контакта ( $0 < r < a$ ,  $\theta = -\pi$  и  $\theta = 0$ ) разбивается на зоны сцепления ( $0 < r < b$ ,  $\theta = -\pi$  и  $\theta = 0$ ) и кулоновского трения ( $b < r < a$ ,  $\theta = -\pi$  и  $\theta = 0$ ):

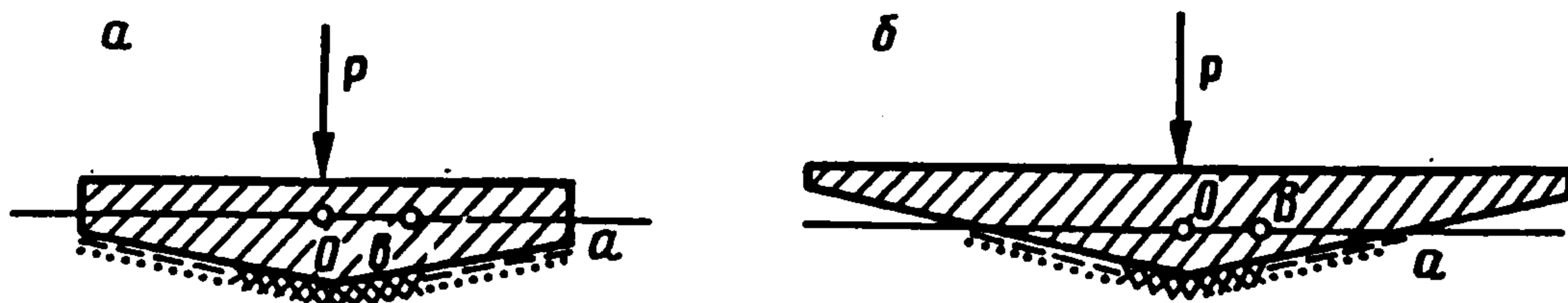
$$u_\theta = r \operatorname{ctg} \gamma + \delta_n \quad (0 < r < a, \quad \theta = -\pi, \quad \theta = 0)$$

$$u_r = 0 \quad (0 < r < b, \quad \theta = -\pi, \quad \theta = 0)$$

$$\tau_{r\theta} - \mu\sigma_\theta = 0 \quad (b < r < a, \quad \theta = -\pi); \quad \tau_{r\theta} + \mu\sigma_\theta = 0 \quad (b < r < a, \quad \theta = 0)$$

( $\delta_n$  – аддитивная постоянная,  $\mu$  – коэффициент трения). Вне зоны контакта граница полуплоскости свободна от нагружения. Величина  $a$  либо фиксирована (задача 1а – фиг. 1а), либо подлежит определению (задача 1б – фиг. 1б). На участке сцепления касательные напряжения недостаточны для того, чтобы вызвать проскальзывание:  $|\tau_{r\theta}| < \mu |\sigma_\theta|$ . Нормальные напряжения всюду в области контакта должны быть отрицательны.

Вследствие симметрии задачи 1а, 1б приводятся к плоской краевой задаче для чет-



Фиг. 1

верть-плоскости с граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}|_{\theta=0} &= \chi_1(r), \quad (\tau_{r\theta} + \mu\sigma_{\theta})|_{\theta=0} = \chi_2(r), \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{\theta=0} &= \nu_* \psi_1(r), \quad \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \Big|_{\theta=0} = \nu_* \psi_2(r) + \text{ctg } \gamma, \quad \nu_* = \frac{1+\nu}{E} \\ u_{\theta}|_{\theta=-\pi/2} &= 0, \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=-\pi/2} = 0 \quad (0 < r < \infty) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\chi_j(r)$ ,  $\psi_j(r)$  ( $j = 1, 2$ ) – неизвестные функции, причем

$$\begin{aligned} \text{supp } \chi_1 &\subset [0, a], \quad \text{supp } \chi_2 \subset [0, b] \\ \text{supp } \psi_1 &\subset [b, \infty), \quad \text{supp } \psi_2 \subset [a, \infty) \end{aligned}$$

Равновесие штампа обеспечивает условие

$$\int_0^a \chi_1(r) dr = -\frac{P}{2} \quad (1.2)$$

Введем в рассмотрение преобразования по Меллину неизвестных функций

$$\Phi_1^-(s) = \int_0^1 \chi_1(a\rho) \rho^s d\rho, \quad \Phi_2^-(s) = \int_0^1 \chi_2(b\rho) \rho^s d\rho \quad (1.3)$$

$$\Phi_1^+(s) = \int_1^{\infty} \psi_1(b\rho) \rho^s d\rho, \quad \Phi_2^+(s) = \int_1^{\infty} \psi_2(a\rho) \rho^s d\rho$$

Функции  $\Phi_j^{\pm}(s)$  ( $j = 1, 2$ ) аналитичны в области  $D^{\pm}$ :  $\text{Re}(s) \leq \gamma \in (-1, 0)$  и удовлетворяют [2] следующей неоднородной матричной задаче Римана:

$$\begin{aligned} \lambda^{s+1} \Phi_1^+(s) &= K_1(s) \Phi_1^-(s) - \kappa_+ \lambda^{s+1} \text{tg } \frac{1}{2} \pi s \Phi_2^-(s) \\ (s+1)^{-1} \nu_0 + \Phi_2^+(s) &= K_0(s) \Phi_1^-(s) - \kappa_- \lambda^{s+1} \Phi_2^-(s), \quad s \in \Gamma: \text{Re}(s) = \gamma \\ K_1(s) &= \kappa_- + \mu \kappa_+ \text{tg } \frac{1}{2} \pi s, \quad K_0(s) = \kappa_+ \text{ctg } \frac{1}{2} \pi s + \mu \kappa_- \\ \kappa_{\pm} &= \frac{1}{2} (\kappa \pm 1), \quad \kappa = 3 - 4\nu, \quad \nu_0 = \nu_*^{-1} \text{ctg } \gamma, \quad \lambda = a^{-1} b \end{aligned} \quad (1.4)$$

которая после факторизации функции  $K_0(s)$  приводится к виду:

$$\begin{aligned} \kappa_* [K_0^-(s)]^{-1} \Phi_2^-(s) &= K_0^+(s) \Phi_1^+(s) - \lambda^{-s-1} [K_0^-(s)]^{-1} K_1(s) [\Phi_2^+(s) + (s+1)^{-1} \nu_0] \\ [K_0^+(s)]^{-1} [\Phi_2^+(s) + (s+1)^{-1} \nu_0] &= K_0^-(s) \Phi_1^-(s) - \kappa_- \lambda^{s+1} [K_0^+(s)]^{-1} \Phi_2^-(s), \quad s \in \Gamma \end{aligned}$$

$$K_0^+(s) = -\frac{\kappa_0 \Gamma(-\frac{1}{2}s)}{\Gamma(1 - \frac{1}{2}s - \alpha)}, \quad K_0^-(s) = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2}s)}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}s)}, \quad \kappa_0 = \frac{\kappa_+}{\sin \pi \alpha}$$

$$\kappa_* = \kappa_-^2 - \kappa_+^2, \quad \alpha = \pi^{-1} \text{arccotg}(\mu \kappa_- \kappa_+^{-1})$$

Принимая во внимание, что функция

$$\omega(s) = \nu_0 \lambda^{-s-1} [K_0^-(s) (s+1)]^{-1} K_1(s)$$

в точке  $s = -1 (\in D^+)$  имеет полюс второго порядка, в окрестности этой точки допускает представление

$$\omega(s) = a_0 (s+1)^{-2} + (a_1 - a_0 \ln \lambda) (s+1)^{-1} + O(1), \quad s \rightarrow -1$$

$$a_0 = -2\mu\kappa_+\nu_0\pi^{-3/2}\Gamma(\alpha - 1/2)$$

$$a_1 = \nu_0\pi^{-1/2}\Gamma(\alpha - 1/2)\{\kappa_- - \mu\kappa_+\pi^{-1}[\psi(\alpha - 1/2) - \psi(1/2)]\}$$

( $\psi(x)$  — пси-функция), и следуя далее схеме [2], приходим к следующим формулам, определяющим решение задачи Римана (1.4):

$$\begin{aligned}\Phi_1^-(s) &= [K_0^-(s)]^{-1}Z_1(s) + [\kappa_*K_0^+(s)]^{-1}\kappa_-\lambda^{s+1}Z_2(s) \\ \Phi_1^+(s) &= [K_0^-(s)]^{-1}K_1(s)\lambda^{-s-1}Z_1(s) + [K_0^+(s)]^{-1}Z_2(s) \\ \Phi_2^-(s) &= \kappa_*^{-1}K_0^-(s)Z_2(s), \quad \Phi_2^+(s) = -\nu_0(s+1)^{-1} + K_0^+(s)Z_1(s) \\ Z_1(s) &= C + (s+1)^{-1}a_2 + \Psi_0^+(s), \quad a_2 = -\nu_0\kappa_0^{-1}\pi^{-1/2}\Gamma(3/2 - \alpha) \\ Z_2(s) &= -a_0(s+1)^{-2} + (a_0\ln\lambda - a_1)(s+1)^{-1} + \Psi_0^-(s) + \Psi_1^-(s)\end{aligned}\tag{1.5}$$

Здесь  $C$  — произвольная постоянная,  $\Psi_0^\pm(s)$ ,  $\Psi_1^-(s)$  — функции, аналитические в областях  $D^\pm$  и имеющие вид

$$\Psi_0^\pm(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j^\pm}{s + 2\alpha \mp 2j \mp 1 - 1}, \quad \Psi_1^-(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{s + 1 + 2j}\tag{1.6}$$

Коэффициенты  $A_j^\pm$ ,  $B_j$  подлежат определению и имеют асимптотику [2]

$$A_j^+ = O(\lambda^{2j}j^{1-2\alpha}), \quad A_j^- = O(B_j) = O(\lambda^{2j}j^{-2+2\alpha}), \quad j \rightarrow \infty$$

Функции  $\Phi_1^\pm(s)$  будут аналитичны в областях  $D^\pm$  тогда и только тогда, когда коэффициенты  $A_j^\pm$ ,  $B_j$  удовлетворяют следующей бесконечной алгебраической системе нормального типа:

$$\begin{aligned}A_n^- &= \lambda^{2n+2\alpha-1}\delta_{0n}^+ \left( C - \frac{a_2}{2n+2\alpha-1} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j^+}{2n+2j+2} \right) \\ B_n &= \lambda^{2n}\delta_{1n}^+ \left( C + q_*\delta_{n0} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j^+}{2n+2j+3-2\alpha} \right) \\ A_n^+ &= \lambda^{2n+3-2\alpha}\delta_{0n}^- \left( q_n + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j^-}{2n+2j+2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{2n+2j+3-2\alpha} \right)\end{aligned}\tag{1.7}$$

Здесь:

$$\begin{aligned}q_* &= -1/2\pi^{-1/2}\mu\nu_0\kappa_-\kappa_0^{-2}\sec\pi\alpha\Gamma(3/2 - \alpha)[\psi(3/2 - \alpha) - \psi(1/2)] \\ q_n &= -a_0(3+2n-2\alpha)^{-2} + (a_0\ln\lambda - a_1)(3+2n-2\alpha)^{-1} \\ \delta_{0n}^+ &= 2\kappa_+\kappa_*\Gamma^2(n+\alpha)(\pi\kappa_-\kappa_0^2n!)^{-1} \\ \delta_{1n}^+ &= 2\kappa_+\kappa_0^2\Gamma^2(n+1/2)[\pi\kappa_-\Gamma^2(n+3/2-\alpha)]^{-1} \\ \delta_{0n}^- &= 2\kappa_+\kappa_-\Gamma^2(n+2-\alpha)(\pi\kappa_*\kappa_0^2n!)^{-1}\end{aligned}$$

( $\delta_{mn}$  — символ Кронекера). Представляя искомые коэффициенты  $A_n^\pm$ ,  $B_n$  последовательно в виде

$$A_n^\pm = CA_{n0}^\pm + A_{n1}^\pm, \quad B_n = CB_{n0} + B_{n1}$$

$$A_{ni}^- = \lambda^{2n+2\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_{nji}^- \lambda^{2j}, \quad A_{ni}^+ = \lambda^{2n+2} \sum_{j=0}^{\infty} a_{nji}^+ \lambda^{2j}\tag{1.8}$$

$$B_{ni} = \lambda^{2n} \sum_{j=0}^{\infty} b_{nji} \lambda^{2j}$$

и вводя обозначения

$$f_{n0}^- = f_{n0} = 1, \quad f_{n0}^+ = 0, \quad f_{n1}^- = -a_2(2n+2\alpha-1)^{-1}, \quad f_{n1} = q_*\delta_{n0}, \quad f_{n1}^+ = q_n$$

обращаем систему (1.7) в терминах рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} a_{n0i}^- &= \delta_{0n}^+ f_{ni}^-, & b_{n0i} &= \delta_{1n}^+ f_{ni} \\ a_{nki}^- &= -\delta_{0n}^+ \sum_{j=1}^k \frac{a_{j-1,k-j,i}^+}{2(n+j)}, & b_{nki} &= -\delta_{1n}^+ \sum_{j=1}^k \frac{a_{j-1,k-j,i}^+}{2n+2j+1-2\alpha} \\ a_{n,k-1,i}^+ &= \delta_{0n}^- \left[ \lambda^{1-2\alpha} \delta_{k1} f_{ni}^+ + \sum_{j=1}^k \left( \frac{a_{j-1,k-j,i}^-}{2(n+j)} + \frac{\lambda^{1-2\alpha} b_{j-1,k-j,i}}{2n+2j+1-2\alpha} \right) \right] \\ (n &= 0, 1, \dots; \quad k = 1, 2, \dots; \quad i = 0, 1) \end{aligned}$$

Определим теперь постоянную  $C$ , положение точки  $b$  и в случае задачи 1б — точки  $a$ . Вследствие условия равновесия штампа (1.2), а также соотношений (1.3), (1.5), (1.6) и (1.8), находим

$$C = -\frac{1}{1+\omega_0} \left( \frac{P}{2a\Gamma(\alpha)} + a_2 + \omega_1 \right), \quad \omega_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{ji}^+}{2(\alpha-1-j)} \quad (i=0, 1) \quad (1.9)$$

Неизвестное заранее положение точки  $b$  найдем из условия ограниченности контактных напряжений в этой точке. Введем в рассмотрение коэффициент интенсивности напряжений

$$K_b = \lim_{r \rightarrow b-0} (b-r)^{1-\alpha} (\tau_{r\theta} + \mu\sigma_{\theta})_{\theta=0}$$

который вследствие (1.5) и теоремы абелева типа имеет вид

$$K_b = \frac{1}{\kappa_* \Gamma(\alpha)} \left( \frac{b}{2} \right)^{1-\alpha} \Omega(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = a_0 \ln \lambda - a_1 + \sum_{j=0}^{\infty} (A_j^- + B_j)$$

отсюда получаем трансцендентное уравнение относительно  $\lambda$

$$\Omega(\lambda) = 0 \quad (1.10)$$

Для задачи 1а при известном положении точки  $a$  уравнение (1.10) определяет и величину  $b = \lambda a$ . В случае же задачи 1б необходимо найти  $a$  из условия ограниченности нормального контактного напряжения  $\sigma_{\theta}$  в окрестности точки  $a$  (при выполнении этого условия будут ограничены и касательные напряжения вследствие  $\tau_{r\theta} = -\mu\sigma_{\theta}$  при  $b < r < a$ ,  $\theta = 0$ ). Пусть

$$L_a = \lim_{r \rightarrow a-0} (a-r)^{\alpha} \sigma_{\theta}(r, 0)$$

Принимая во внимание (1.5) и теоремы абелева типа, находим

$$L_a = 2^{1-\alpha} a^{\alpha} [\Gamma(1-\alpha)]^{-1} C$$

Из условия  $L_a = 0$  и соотношений (1.9) в случае задачи 1б получаем

$$C = 0, \quad a = -P[2\Gamma(\alpha)(a_2 + \omega_1)]^{-1} \quad (1.11)$$

**2. Контактные напряжения. Анализ решения.** Построим расчетные формулы для контактных напряжений. При помощи обратного преобразования Меллина для задачи 1а получаем из (1.5) (в случае задачи 1б  $C$  и  $a$  определяются равенствами (1.11)):

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}(r, 0) &= \chi_1(r) = I_1(r) + \kappa_*^{-1} \kappa_- I_2(r), \quad 0 < r < a \\ \tau_{r\theta}(r, 0) &= -\mu\chi_1(r), \quad b < r < a; \quad \tau_{r\theta}(r, 0) = \chi_2(r) - \mu\chi_1(r), \quad 0 < r < b \\ I_1(r) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Z_1(s)}{K_0^-(s)} \left( \frac{r}{a} \right)^{-s-1} ds, \quad I_2(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Z_2(s)}{K_0^+(s)} \left( \frac{r}{b} \right)^{-s-1} ds \\ \chi_2(r) &= \frac{1}{2\pi i \kappa_*} \int_{\Gamma} K_0^-(s) Z_2(s) \left( \frac{r}{b} \right)^{-s-1} ds \end{aligned} \quad (2.1)$$

Применяя теорию вычетов, а также учитывая равенство

$$Z_1(-2\alpha - 2j) = \lambda^{-2j-2\alpha+1} (\delta_{0j}^+)^{-1} A_j^-$$

вытекающее из (1.7), находим при  $0 < r < b$

$$I_1(r) = \frac{\nu_0}{\mu\kappa_-} + \frac{\kappa_-}{\kappa_*\kappa_+} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j! A_j^- \sin \pi\alpha}{\Gamma(\alpha+j)} \left(\frac{r}{b}\right)^{2\alpha+2j-1}$$

$$I_2(r) = -\nu_0\kappa_*(\mu\kappa_-^2)^{-1} - 2\kappa_+\nu_0(\pi\kappa_-)^{-1} \ln(r/a) -$$

$$- \frac{1}{\kappa_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j! A_j^-}{\Gamma(\alpha+j)} \left(\frac{r}{b}\right)^{2\alpha+2j-1} - \frac{1}{\kappa_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3/2 - \alpha + j)}{\Gamma(1/2 + j)} B_j \left(\frac{r}{b}\right)^{2j}$$

и получаем окончательно

$$\chi_1(r) = -\frac{2\kappa_+\nu_0}{\pi\kappa_*} \ln \frac{r}{a} - \frac{\kappa_-}{\kappa_*\kappa_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j \Gamma(3/2 - \alpha + j)}{\Gamma(1/2 + j)} \left(\frac{r}{b}\right)^{2j}, \quad 0 < r < b \quad (2.2)$$

Таким образом, нормальные контакты напряжения в точке  $r = 0$  имеют логарифмическую особенность (такая же особенность получается и в задаче о контакте без трения клиновидного штампа с полуплоскостью [4]).

Пусть теперь  $b < r < a$ . Имеем

$$I_1(r) = \frac{\nu_0}{\mu\kappa_-} - \frac{\nu_0 \pi^{1/2} (r/a)^{2\alpha-1} F_*(\alpha, \alpha - 1/2; r^2/a^2)}{\kappa_0 \cos \pi\alpha \Gamma(1-\alpha) \Gamma(1/2 + \alpha)} +$$

$$+ \frac{2C}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{r}{a}\right)^{2\alpha-1} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\alpha} - \frac{(r/a)^{2\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^+}{m+1} \times$$

$$\times F_*(\alpha, m+1; \frac{r^2}{a^2}) \quad (2.3)$$

$$F_*(a, b; x) = b \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j x^j}{(b+j)j!}$$

Если  $1/2 < x < 1$ , то для вычисления функции  $F_*(a, b; x)$  следует воспользоваться формулой преобразования для функции Гаусса  $F(a, b; b+1; x)$  [5]

$$F_*(a, b; x) = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(1-a)}{\Gamma(b+1-a)x^b} + \frac{b}{a-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(b+1-a)_j}{(2-a)_j} (1-x)^{j+1-a}$$

Функция  $I_2(r)$  при  $2^{1/2}b \leq r < a$  имеет вид

$$I_2(r) = -\frac{(b/r)^{3-2\alpha}}{\kappa_0 \Gamma(\alpha-1)} \left[ -\frac{a_0}{2} S\left(\frac{3}{2} - \alpha; \frac{b^2}{r^2}\right) + \right.$$

$$+ \frac{a_0 \ln \lambda - a_1}{3/2 - \alpha} F_*(2 - \alpha, \frac{3}{2} - \alpha; \frac{b^2}{r^2}) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^-}{m+1} F_*(2 - \alpha, m+1; \frac{b^2}{r^2}) +$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{3/2 - \alpha + m} F_*(2 - \alpha, \frac{3}{2} - \alpha + m; \frac{b^2}{r^2}) \right] \quad (2.4)$$

$$S(\beta; x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2-\alpha)_j x^j}{(\beta+j)^2 j!}$$

При вычислении  $I_2(r)$  при  $b < r < \min\{2^{1/2}b, a\}$  учтем равенство (1.10), а также формулу

$$S(\beta; x) = \Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-1)[x^\beta\Gamma(\beta-1+\alpha)]^{-1} [\ln x - \psi(\beta) + \psi(\beta-1+\alpha)] - \\ - \frac{1}{1-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\beta-1+\alpha)_j}{(\alpha)_j} (1-x)^{j-1+\alpha} [\psi(\beta-1+\alpha+j) - \psi(\beta-1+\alpha)] \quad (2.5) \\ (\frac{1}{2} < x < 1)$$

получающуюся из соотношения 7.4.1.5 [5]. Имеем

$$I_2(r) = - \frac{(b/r)^{3-2\alpha}}{\kappa_0\Gamma(\alpha-1)} \left\{ - \frac{a_0}{2} S\left(\frac{3}{2} - \alpha; \frac{b^2}{r^2}\right) + (a_0 \ln \lambda - a_1) H_0\left(\frac{3}{2} - \alpha; r\right) + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} [A_m^- H_m(1; r) + B_m H_m\left(\frac{3}{2} - \alpha; r\right)] \right\} \\ H_m(\beta; r) = \frac{\Gamma(m+\beta)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(m+\beta+\alpha-1)} \left(\frac{r}{b}\right)^{2m+2\beta} + \\ + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(m+\beta+\alpha-1)_j}{(\alpha)_j} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)^{j+\alpha-1} \quad (2.6)$$

Аналогично вычисляются касательные напряжения:

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = -\nu_0 \kappa_- \kappa_*^{-1} - r [b \kappa_* \Gamma(\alpha-1)]^{-1} \left\{ \frac{1}{2} a_0 S\left(\frac{1}{2}; r^2/b^2\right) + \right. \\ \left. + (a_0 \ln \lambda - a_1) G_0\left(\frac{1}{2}; r\right) + \sum_{m=0}^{\infty} [A_m^- G_m(1-\alpha; r) + B_m G_m\left(\frac{1}{2}; r\right)] \right\}, \quad 0 < r < b \\ G_m(\beta; r) = \begin{cases} (\beta-m)^{-1} F_*\left(2-\alpha, \beta-m; r^2/b^2\right), & 0 < r < 2^{-1/2}b \\ \frac{\Gamma(-m+\beta)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(-m+\alpha+\beta-1)} \left(\frac{r}{b}\right)^{2(m-\beta)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-m+\alpha+\beta-1)_j}{(1-\alpha)(\alpha)_j} \times \\ \times \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^{j+\alpha-1}, & 2^{-1/2}b < r < b \end{cases} \quad (2.7)$$

Видно, что касательные напряжения в нуле ограничены:  $\tau_{r\theta}(r, 0) \rightarrow -\nu_0 \kappa_- \kappa_*^{-1}$ ,  $r \rightarrow 0$ . Можно доказать непрерывность контактных напряжений в точке  $b$ .

Вследствие (2.2) имеем

$$\chi_1(b-0) = - \frac{2\kappa_+ \nu_0}{\pi \kappa_*} \ln \lambda - \frac{\kappa_-}{\kappa_* \kappa_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j \Gamma(3/2 - \alpha + j)}{\Gamma(1/2 + j)}$$

С другой стороны

$$\chi_1(b+0) = I_1(b+0) + \kappa_*^{-1} \kappa_- I_2(b+0)$$

Для вычисления  $I_0(b+0)$  по формулам (2.6) выразим  $A_m^-$  через  $A_m^+$  при помощи первого равенства из (1.7) и учтем получающуюся из (2.5) формулу

$$S(\beta; 1) = \Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-1)[\Gamma(\beta+\alpha-1)]^{-1} [\psi(\beta-1+\alpha) - \psi(\beta)]$$

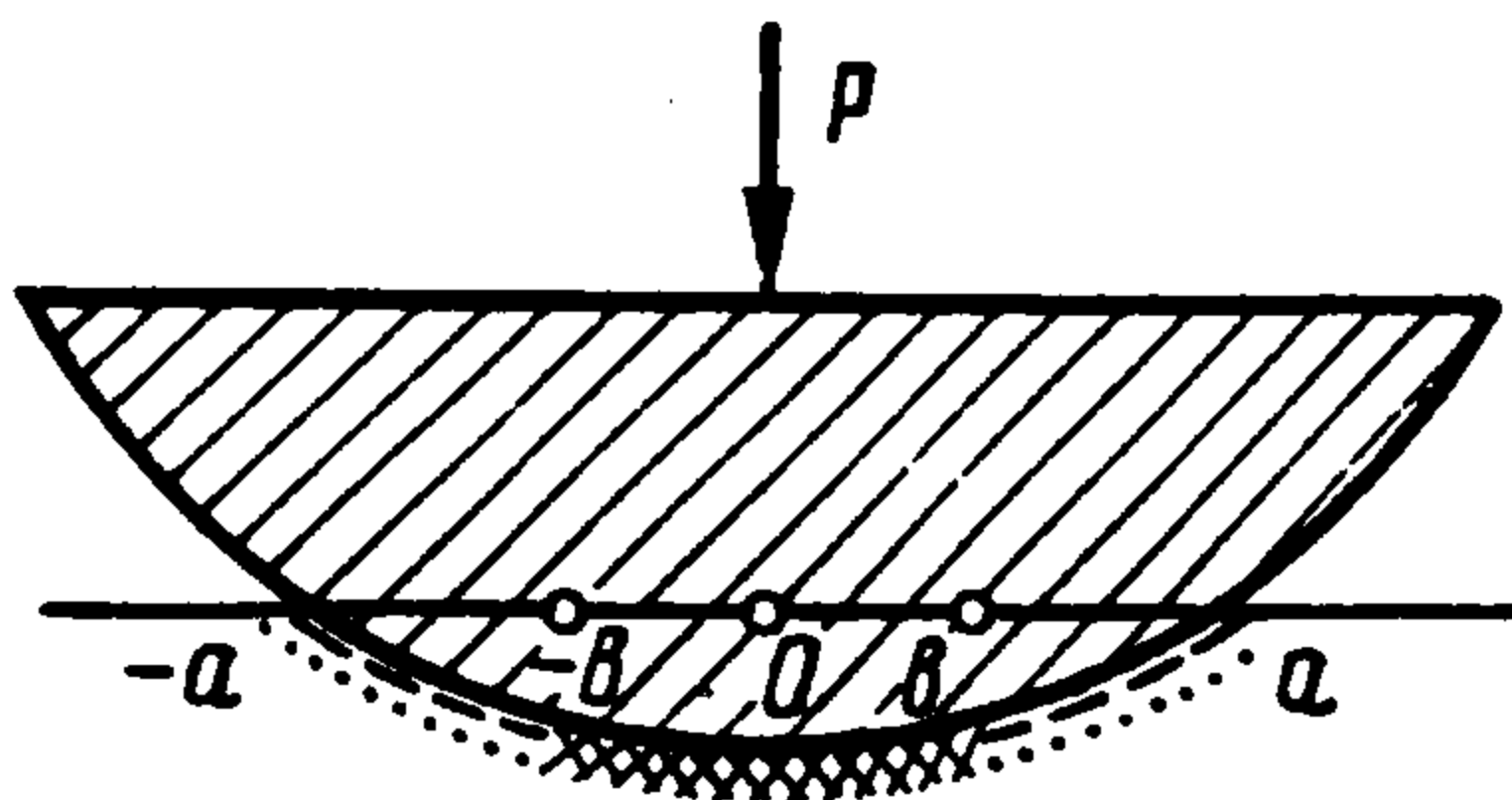
в результате приходим к требуемому соотношению

$$\lim_{r \rightarrow b-0} \sigma_\theta(r, 0) = \lim_{r \rightarrow b+0} \sigma_\theta(r, 0)$$

Принимая во внимание (2.7), а также равенство  $\tau_{r\theta}(b+0, 0) = -\mu \chi_1(b+0)$ , получаем непрерывность и касательных напряжений при переходе от зоны трения к участку сцепления.

Для задачи 1б условие  $L_a = 0$  или вытекающее из него (1.11) приводит к равенствам  $\sigma_\theta(a, 0) = \tau_{r\theta}(a, 0) = 0$ . Действительно, переходя к пределу при  $r \rightarrow a - 0$  в (2.1), (2.3) и (2.4) и учитывая (1.7), получаем  $\chi_1(a - 0) = 0$ .

3. Зависимость величины  $\lambda$  от профиля штампа. Рассмотрим задачу  $Z_n$  о вдавливании штампа, профиль которого описывается функцией  $f(x) = \Lambda |x|^n$  ( $\Lambda$  — заданная положительная постоянная, имеющая размерность  $x^{-n+1}$ ), в полуплоскость ( $|x| < \infty, y = 0$ ) под действием симметрично приложенной вертикальной силы  $P$  (фиг. 2). Область контакта ( $|x| < a, y = 0$ ) разбивается на зону сцепления ( $|x| < b$ ) и участок кулоновского трения ( $b < |x| < a$ ), причем положение точек  $a$  и  $b$  определяется a posteriori.



Фиг. 2

Утверждалось [3], что величина  $\lambda = b/a$  не зависит от  $\Lambda, n$  и  $P$ , а только от  $\mu$  и  $\nu$ , т.е. для задачи о штампе с профилем  $f(x) = \Lambda |x|^n$  ( $|\Lambda| < \infty, n \geq 1$ ) и задачи  $Z_0$  о штампе с плоским основанием ( $n = 0$ ) величина  $\lambda$  одна и та же. Этот вывод ошибочен.

Пусть  $p(x) = \sigma_y(x, 0), q(x) = \tau_{xy}(x, 0)$ . Тогда, принимая во внимание [1], получаем (для задачи  $Z_n$ ) систему двух сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \kappa_- p(x) + \frac{2\kappa_+}{\pi} \int_0^a q(t) \frac{tdt}{t^2 - x^2} &= 0, \quad 0 < x < b \\ -\kappa_- q(x) + \frac{2\kappa_+}{\pi} \int_0^a p(t) \frac{xdt}{t^2 - x^2} &= \Lambda_n x^{n-1}, \quad 0 < x < a \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\Lambda_n = n\nu^{-1}\Lambda$ . Функции  $p(x), q(x)$  на участке трения связаны условием

$$q(x) + \mu p(x) = 0 \quad (b < x < a)$$

а в точке  $x = a$  вследствие гладкости профиля штампа в окрестности этой точки удовлетворяют условию

$$p(a) = q(a) = 0 \quad (3.2)$$

Равновесие штампа обеспечивает условие

$$\int_0^a p(x) dx = -\frac{P}{2} \quad (3.3)$$

При помощи дифференциального оператора

$$d_{nx} = \frac{n-1}{n} - \frac{x}{n} \frac{d}{dx}$$

приведем [3] неоднородную систему (3.1) к однородной

$$\begin{aligned} \kappa_- p_0(x) + \frac{2\kappa_+}{\pi} \int_0^a q_0(t) \frac{tdt}{t^2 - x^2} &= 0, \quad 0 < x < b \\ -\kappa_- q_0(x) + \frac{2\kappa_+}{\pi} \int_0^a p_0(t) \frac{xdt}{t^2 - x^2} &= 0, \quad 0 < x < a \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$q_0(x) + \mu p_0(x) = 0, \quad (b < x < a)$$

$$p_0(x) = d_{nx} p(x), \quad q_0(x) = d_{nx} q(x) \quad (3.5)$$

причем вследствие (3.2) функции  $p(x)$ ,  $q(x)$  выражаются через функции  $p_0(x)$ ,  $q_0(x)$  следующим образом:

$$p(x) = nx^{n-1} \int_x^a \frac{p_0(t)}{t^n} dt, \quad q(x) = nx^{n-1} \int_x^a \frac{q_0(t)}{t^n} dt \quad (3.6)$$

Принимая во внимание (3.3), (3.6), получаем

$$\int_0^a p_0(x) = -\frac{P}{2} \quad (3.7)$$

Таким образом, система интегральных уравнений (3.4) при условиях (3.5) и (3.7) будет эквивалентна соответствующей задаче для штампа с плоским основанием, если дополнительно потребовать

$$[q_0(x) + \mu p_0(x)]_{x=b} = 0 \quad (3.8)$$

(из этого условия в случае задачи  $Z_0$  находится точка  $b$ ). Определять положение точки  $b$  из условия (3.8) и для задачи  $Z_n$  (как предлагалось, [3, 6]) неверно. Действительно, вследствие (3.6) и (3.5) имеем

$$q(x) + \mu p(x) = nx^{n-1} \int_x^b \frac{q_0(t) + \mu p_0(t)}{t^n} dt$$

и для выполнения условия  $q(b) + \mu p(b) = 0$  достаточно интегрируемости функции  $q_0(x) + \mu p_0(x)$  в окрестности точки  $x = b$ .

Положение точек  $b$  и  $a$  фиксируется двумя условиями эквивалентности систем (3.1) и (3.4). Для того чтобы их выписать, введем в рассмотрение функции  $\chi_1(x) = p_0(x) \in H^*[0, a]$  и  $\chi_2(x) = q_0(x) + \mu p_0(x) \in H^*[0, b]$ ;  $H^*[0, c]$  – пространство гельдеровских на отрезке  $[0, c]$  функций, допускающих интегрируемую особенность в точке  $x = c$ . Тогда  $\chi_1(x)$ ,  $\chi_2(x)$  – решение системы

$$\begin{aligned} \kappa_- \chi_1(x) - \frac{2\mu\kappa_+}{\pi} \int_0^a \frac{\chi_1(t)tdt}{t^2 - x^2} + \frac{2\kappa_+}{\pi} \int_0^b \frac{\chi_2(t)tdt}{t^2 - x^2} &= 0, \quad 0 < x < b \\ \kappa_- \mu \chi_1(x) - \kappa_- \chi_2(x) + \frac{2\kappa_+}{\pi} \int_0^a \frac{\chi_1(t)xdt}{t^2 - x^2} &= 0, \quad 0 < x < a \end{aligned} \quad (3.9)$$

Доопределяя систему (3.9) при помощи функций  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  ( $\text{supp } \psi_1(x) \subset (b, \infty)$ ,  $\text{supp } \psi_2(x) \subset (a, \infty)$ ) на полубесконечный интервал, применяя преобразование Меллина и принимая обозначения (1.3), приходим к однородной матричной задаче Римана (1.4) ( $\nu_0 = 0$ ), решенной ранее [2]. Формулы, определяющие решение, получаются также из (1.5) при  $\nu_0 = 0$  и допускают представление

$$\chi_1(a\tau) = C\chi_1^*(\tau), \quad \chi_2(b\tau) = C\chi_2^*(\tau), \quad C = Pa^{-1}C^*$$

(звездочкой помечены величины, не зависящие от  $a, P$ ). Тогда функции  $p(x)$ ,  $q(x)$  имеют вид

$$\begin{aligned} p(a\xi) &= Cp_n^*(\xi), \quad p_n^*(\xi) = n\xi^{n-1} \int_{\xi}^1 \chi_1^*(\tau) \frac{d\tau}{\tau^n} \\ q(a\xi) &= Cq_n^*(\xi), \quad q_n^*(\xi) = n\xi^{n-1} \left[ -\mu \int_{\xi}^1 \chi_1^*(\tau) \frac{d\tau}{\tau^n} + \lambda^{1-n} \int_{\xi/\lambda}^1 \chi_2^*(\tau) \frac{d\tau}{\tau^n} \right] \end{aligned}$$

Потребуем выполнимости следующих двух условий:

$$\begin{aligned} \kappa_- p_n^*(\xi_0) + \frac{2\kappa_+}{\pi} \int_0^1 q_n^*(\tau) \frac{\tau d\tau}{\tau^2 - \xi_0^2} &= 0, \quad N_n^*(\xi_1) PC^* = -\Lambda_n a^n \xi_1^{n-1} \\ N_n^*(\xi) &= -\kappa_- q_n^*(\xi) + \frac{2\kappa_+ \xi}{\pi} \int_0^1 p_n^*(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2 - \xi^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

( $\xi_0, \xi_1$  – произвольные точки из интервалов  $(0, \lambda)$  и  $(0, 1)$  соответственно). Тогда системы (3.1) и (3.4) будут эквивалентны. Первое условие из (3.10) представляет собой трансцендентное уравнение относительно  $\lambda$ , и, очевидно,  $\lambda$  есть функция параметров  $\mu, n$  и для задач с условием (3.2)

не зависит от величин  $P$ ,  $E$  и  $\Lambda$ . Из второго условия (3.10) явно находится величина  $a$

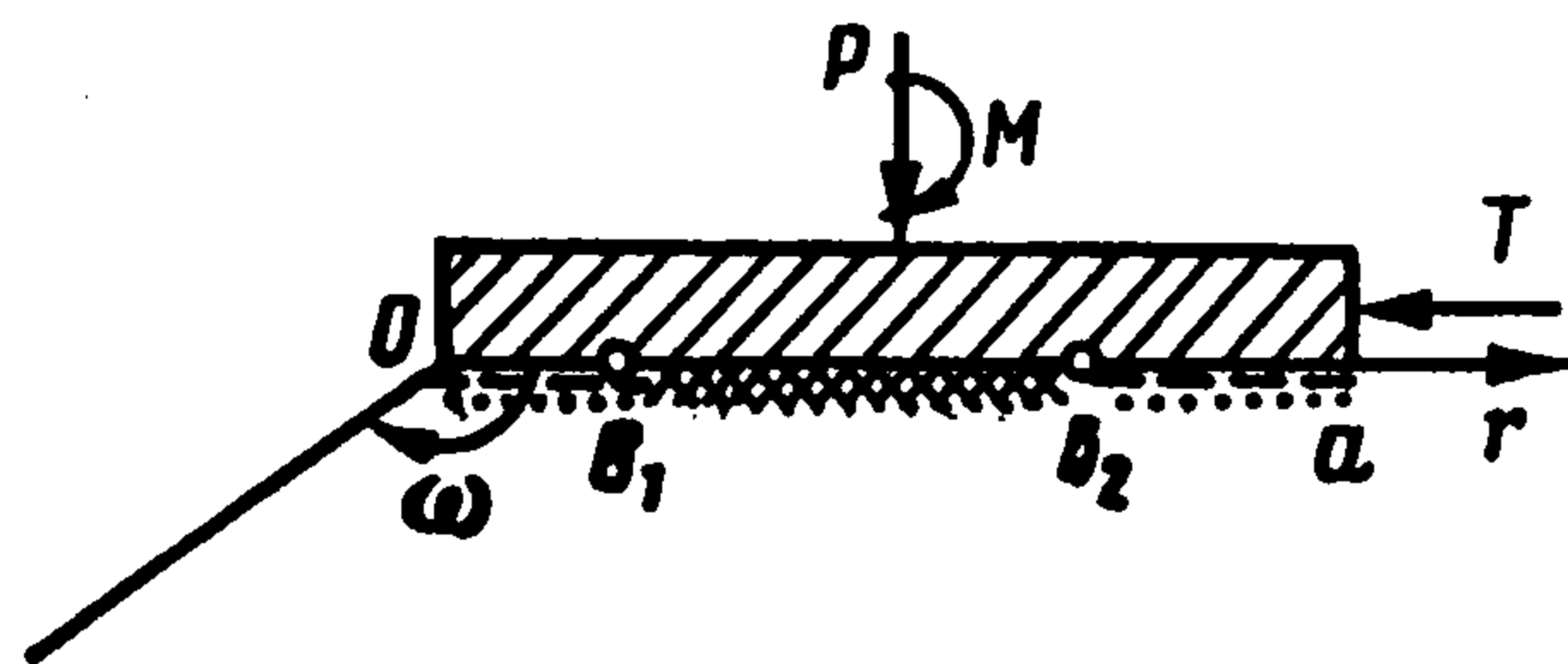
$$a = [-PC^* \xi_1^{1-n} \Lambda_n^{-1} N_n^*(\xi_1)]^{1/n}$$

Заметим, что касательные смещения на участке сцепления предполагались [3] равными не нулю, а полиному

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=0} = M_n |x|^{n-1}, \quad |x| < b, \quad M_n = n\nu_*^{-1} M \quad (3.11)$$

с подлежащей определению постоянной  $M$  из условия (3.2). Однако это условие обеспечивается автоматически вследствие (3.6). Соответствующее случаю (3.11) условие эквивалентности систем (3.1) и (3.4) приводит к невозможности выбора  $M$ , при котором для любого  $n$  величины  $\lambda$  для задач  $Z_0$  и  $Z_n$  совпадали. Так что при условии (3.11) a fortiori существует зависимость величины  $\lambda$  от профиля штампа.

**4. Контактная задача для клина при наличии трения и сцепления.** Рассмотрим задачу о вдавливании в упругий клин ( $0 < r < \infty$ ,  $-\omega < \theta < 0$ ) штампа с плоским основанием



Фиг. 3

( $0 < r < a$ ,  $\theta = 0$ ) под действием вертикальной силы  $P$ , момента  $M$  и горизонтальной силы  $T$  (фиг. 3). Область контакта состоит из участков сцепления ( $b_1 < r < b_2$ ) и трения ( $0 < r < b_1$  и  $b_2 < r < a$ ), граница  $\theta = -\omega$  свободна от напряжений:

$$\begin{aligned} \theta = 0: \quad u_\theta &= \delta_n + \gamma r, \quad 0 < r < a; \quad u_r = \delta_t, \quad b_1 < r < b_2, \\ \tau_{r\theta} - \mu\sigma_\theta &= 0, \quad 0 < r \leq b_1; \quad \tau_{r\theta} + \mu\sigma_\theta = 0, \quad b_2 \leq r < a \\ \tau_{r\theta} = \sigma_\theta &= 0, \quad a < r < \infty \\ \theta = -\omega; \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} &= 0, \quad 0 < r < \infty \end{aligned}$$

( $\gamma$  — угол поворота штампа). При выполнении условий

$$\int_0^a \sigma_\theta(r, 0) dr = -P, \quad \int_0^a \tau_{r\theta}(r, 0) dr = -T, \quad \int_0^a \sigma_\theta(r, 0) r dr = -M \quad (4.1)$$

штамп находится в равновесии. Введем в рассмотрение функции и их трансформанты Меллина

$$\begin{aligned} \chi_1(r) &= (\tau_{r\theta} - \mu\sigma_\theta)_{\theta=0}, \quad \chi_2(r) = (\tau_{r\theta} + \mu\sigma_\theta)_{\theta=0} \\ \psi_1(r) &= \frac{1}{\nu_*} \frac{\partial u_r}{\partial r}(r, 0), \quad \psi_2(r) = \frac{1}{\nu_*} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r, 0) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\| \chi_{js}, \psi_{js} \| = \int_0^\infty \| \chi_j(r), \psi_j(r) \| r^s dr$$

Функции  $\psi_{js}$  и  $\chi_{js}$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned} 2\mu\psi_{1s} &= l_{21}(s) \chi_{1s} + l_{22}(s) \chi_{2s}, \quad 2\mu\psi_{2s} = l_{11}(s) \chi_{1s} + l_{12}(s) \chi_{2s} \\ l_{1j}(s) &= -\mu\kappa_- + \kappa_+ [2d(s)]^{-1} [(-1)^{j-1} (\sin 2\omega s + s \sin 2\omega) + 2\mu s(s-1) \sin^2 \omega] \\ l_{2j}(s) &= (-1)^j \kappa_- + \kappa_+ [2d(s)]^{-1} [-\mu \sin 2\omega s + \mu s \sin 2\omega - 2(-1)^j s(s+1) \sin^2 \omega] \end{aligned}$$

Обозначая далее  $\lambda_1 = b_1/a$ ,  $\lambda_2 = b_2/a$ :

$$\begin{aligned}\Phi_1^-(s) &= \int_{\lambda_1}^1 \chi_1(ar) r^s dr, & \Phi_1^+(s) &= \int_1^{1/\lambda_1} \chi_1(b_1 r) r^s dr \\ \Phi_2^-(s) &= \int_0^1 \chi_2(b_2 r) r^s dr, & \Phi_2^+(s) &= 2\mu \int_1^\infty \psi_2(ar) r^s dr \\ \Phi_3^-(s) &= 2\mu \int_0^1 \psi_1(b_1 r) r^s dr, & \Phi_3^+(s) &= 2\mu \int_1^\infty \psi_1(b_2 r) r^s dr\end{aligned}\quad (4.3)$$

$$l(s) = l_{11}(s)l_{22}(s) - l_{12}(s)l_{21}(s) = 2\mu e(s)[d(s)]^{-1}$$

$$e(s) = \kappa_+^2 - s^2 \sin^2 \omega - \kappa \sin^2 \omega s$$

приходим к матричной задаче Римана [2], которую после факторизации функций:

$$k_j(s) = L_j^+(s)L_j^-(s)X_j^+(s)[X_j^-(s)]^{-1}, \quad s \in \Gamma \quad (j=0, 1, 2)$$

$$k_0(s) = l_{11}(s), \quad k_n(s) = l(s)[l_{1n}(s)]^{-1} \quad (n=1, 2)$$

$$L_0^+(s) = \frac{\kappa_0 \Gamma(-\delta s)}{\Gamma(1-\alpha-\delta s)}, \quad L_0^-(s) = \frac{\Gamma(1+\delta s)}{\Gamma(\alpha+\delta s)}, \quad \delta = \frac{\omega}{\pi}, \quad \kappa_0 = \frac{\kappa_+}{\sin \pi \alpha}$$

$$L_1^+(s) = -\frac{\kappa_1 \Gamma(-\delta s) \Gamma(1-\alpha-\delta s)}{\Gamma^2(\frac{1}{2}-\delta s)}, \quad L_1^-(s) = \frac{\Gamma(1+\delta s) \Gamma(\alpha+\delta s)}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+\delta s)}, \quad \kappa_1 = \frac{2\mu\kappa}{\kappa_0}$$

$$L_2^+(s) = \frac{\kappa_1 \Gamma(-\delta s) \Gamma(\alpha-\delta s)}{\Gamma^2(\frac{1}{2}-\delta s)}, \quad L_2^-(s) = \frac{\Gamma(1+\delta s) \Gamma(1-\alpha+\delta s)}{\Gamma^2(\frac{1}{2}+\delta s)}$$

$$X_j(s) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln k_j^0(s)}{s-z} ds\right), \quad \text{ind } k_j^0(s) = 0$$

$$k_0^0(s) = l_{11}^0(s), \quad k_n^0(s) = l^0(s)[l_{1n}^0(s)]^{-1} \quad (n=1, 2)$$

$$l_{1n}^0(s) = [-\mu\kappa_- + (-1)^n \kappa_+ \text{ctg } \omega s]^{-1} l_{1n}(s), \quad l^0(s) = -(2\mu\kappa)^{-1} \text{tg}^2 \omega s l(s)$$

перепишем в виде:

$$\frac{\Phi_2^+(s) + (s+1)^{-1} C_0}{L_0^+(s) X_0^+(s)} = \frac{L_0^-(s)}{X_0^-(s)} \Phi_1^-(s) + \lambda_2^{s+1} \frac{l_{12}(s)}{l_{11}(s)} \frac{L_0^-(s) \Phi_2^-(s)}{X_0^-(s)}, \quad C_0 = \frac{2\mu\gamma}{\nu_+}$$

$$\frac{\Phi_3^+(s)}{L_1^+(s) X_1^+(s)} - \lambda_2^{-s-1} \frac{l_{21}(s)}{l_{11}(s)} \frac{\Phi_2^+(s) + (s+1)^{-1} C_0}{L_1^+(s) X_1^+(s)} = \frac{L_1^-(s)}{X_1^-(s)} \Phi_2^-(s) -$$

$$-(\lambda_1/\lambda_2)^{s+1} l_{11}(s)[l(s) X_1^-(s)]^{-1} L_1^-(s) \Phi_3^-(s)$$

$$-[L_2^-(s)]^{-1} X_2^-(s) \Phi_3^-(s) = L_2^+(s) X_2^+(s) \Phi_1^+(s) + (\lambda_2/\lambda_1)^{s+1} l_{12}(s)[l(s)]^{-1} \times$$

$$\times L_2^+(s) X_2^+(s) \Phi_3^+(s) - \lambda_1^{-s-1} l_{22}(s)[l(s)]^{-1} L_2^+(s) X_2^+(s) [\Phi_2^+(s) + (s+1)^{-1} C_0] \quad (4.4)$$

Обозначим через  $\sigma_j^-$  ( $j=0, 1, \dots$ ) полюсы функции  $l_{12}(s)[l_{11}(s)]^{-1}$ , лежащие в области  $D^-$ , а через  $\sigma_j^+$  ( $j=0, 1, \dots$ ) — функции  $l_{21}(s)[l_{11}(s)]^{-1}$  ( $\sigma_j^+ \in D^+$ ). Заметим, что все числа  $\sigma_j^\pm$  вещественны. Пусть  $s_j$  ( $j=0, 1, \dots$ ) — корни (комплекснозначные) функции  $e(s)$ , определенной в (4.3). Тогда функция  $l_{11}(s)[l(s)]^{-1}$  в области  $D^-$  имеет полюсы в точках  $s = s_j$ , а функции  $l_{12}(s)[l(s)]^{-1}$ ,  $l_{22}(s)[l(s)]^{-1}$  в  $D^+$  — в точках  $s = -s_j$ . Следуя схеме [2], введем функции

$$\Psi_1^\pm(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j^\pm}{s - \sigma_j^\mp}, \quad \Psi_2^\pm(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j^\pm}{s \mp s_j}$$

( $A_j^\pm, B_j^\pm$  — подлежащие определению коэффициенты) и получим решение задачи (4.4):

$$\begin{aligned}\Phi_1^-(s) &= \frac{X_0^-(s)}{L_0^-(s)} \Omega_1(s) - \lambda_2^{s+1} \frac{l_{12}(s) X_1^-(s)}{l_{11}(s) L_1^-(s)} \Omega_2(s) + \lambda_1^{s+1} \frac{l_{12}(s) L_2^-(s)}{l(s) X_2^-(s)} \Omega_3(s) \\ \Phi_1^+(s) &= \lambda_1^{-s-1} \Phi_1^-(s), \quad \Phi_2^-(s) = \frac{X_1^-(s)}{L_1^-(s)} \Omega_2(s) - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{s+1} \frac{l_{11}(s) L_2^-(s)}{l(s) X_2^-(s)} \Omega_3(s) \\ \Phi_2^+(s) &= -(s+1)^{-1} C_0 + L_0^+(s) X_0^+(s) \Omega_1(s), \quad \Phi_3^-(s) = -L_2^-(s) [X_2^-(s)]^{-1} \Omega_3(s) \\ \Phi_3^+(s) &= L_1^+(s) X_1^+(s) \Omega_2(s) + \lambda_2^{-s-1} l_{21}(s) [l_{11}(s)]^{-1} L_0^+(s) X_0^+(s) \Omega_1(s) \\ \Omega_1(s) &= (s+1)^{-1} \nu_0 C_0 + C_1 + \Psi_1^+(s) \\ \Omega_2(s) &= -(s+1)^{-1} \nu_1 C_0 + C_2 + \Psi_1^-(s) + \Psi_2^+(s), \quad \Omega_3(s) = -(s+1)^{-1} \nu_2 C_0 + \Psi_2^-(s) \\ \nu_0 &= [L_0^+(-1) X_0^+(-1)]^{-1} \\ \nu_1 &= \frac{1}{X_1^+(-1) L_1^+(-1)} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{l_{21}(s)}{l_{11}(s)}, \quad \nu_2 = L_2^+(-1) X_2^+(-1) \lim_{s \rightarrow -1} \frac{l_{22}(s)}{l(s)}\end{aligned}\tag{4.5}$$

(если  $\omega \neq \pi$  или  $\omega \neq \text{arctg } \mu$ , то  $\nu_1 \neq 0$ ; если  $\sin^2 \omega \neq 1 - \nu$ , то  $\nu_2 = 0$ );  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

Для нахождения границ зон сцепления и трения определим коэффициенты интенсивности напряжений

$$\begin{aligned}K_1 &= \lim_{r \rightarrow b_1+0} (r-b_1)^{1-\alpha} \chi_1(r) = \frac{b_1^{1-\alpha} (\nu_2 C_0 - B_*)}{\delta^{\alpha-1} \kappa_1 \Gamma(\alpha)}, \quad B_* = \sum_{j=0}^{\infty} B_j^- \\ K_2 &= \lim_{r \rightarrow b_2-0} (b_2-r)^{1-\alpha} \chi_2(r) = C_2 b_2^{1-\alpha} [\Gamma(\alpha) \delta^\alpha]^{-1}\end{aligned}$$

и потребуем  $K_1 = 0, K_2 = 0$ . Тогда

$$C_2 = 0, \quad \nu_2 C_0 - B_* = 0$$

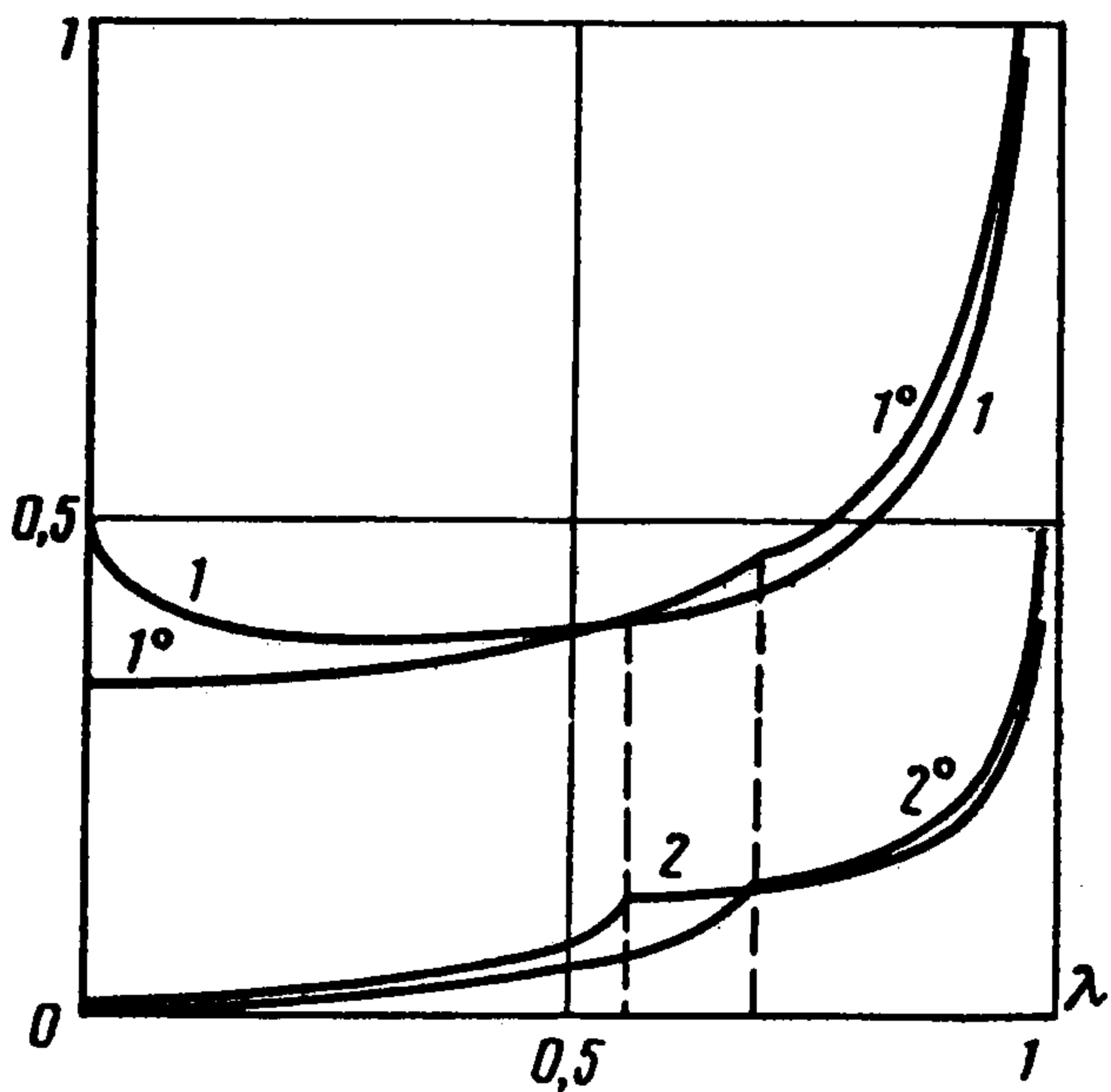
Представим коэффициенты  $A_n^\pm, B_n^\pm$  в виде

$$A_n^\pm = \sum_{k=0}^1 C_k A_{nk}^\pm, \quad B_n^\pm = \sum_{k=0}^1 C_k B_{nk}^\pm$$

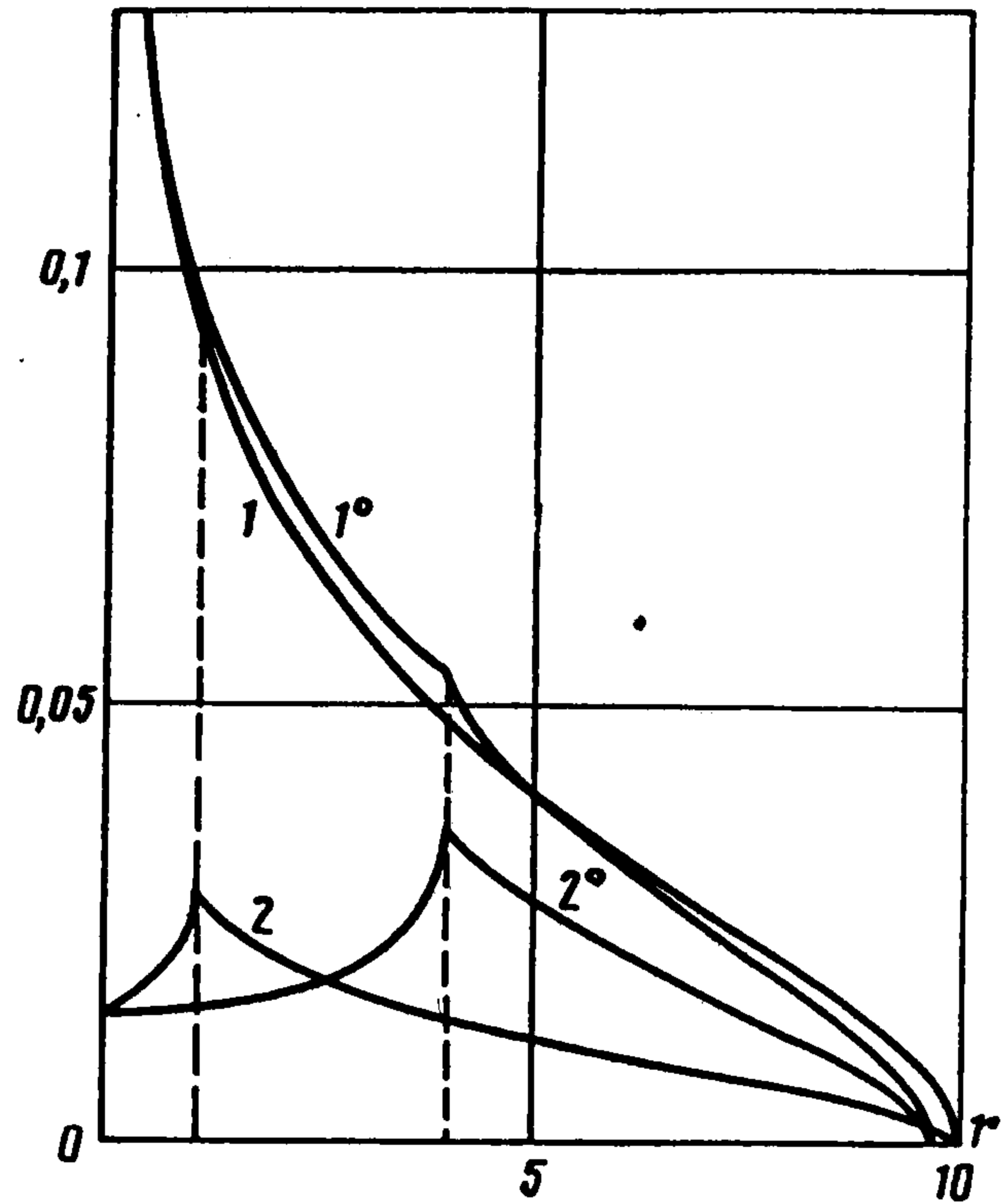
Тогда для того, чтобы функции  $\Phi_j^\pm(s)$  ( $j = 1, 2, 3$ ), определенные в (4.5), были аналитичны в  $D^\pm$ , необходимо и достаточно, чтобы:

$$\begin{aligned}A_{nk}^- &= \lambda_2^{-\sigma_n^+ - 1} r_n^{(1)} \left( -\frac{\nu_0 \delta_{k0}}{\sigma_n^+ + 1} - \delta_{k1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{jk}^+}{\sigma_j^- - \sigma_n^+} \right) \\ B_{nk}^+ &= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{s_n+1} r_n^{(3)} \left( -\frac{\nu_2 \delta_{k0}}{s_n+1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_{jk}^-}{s_n + s_j} \right) \\ A_{nk}^+ &= \lambda_2^{\sigma_n^- + 1} r_n^{(2)} \left[ -\frac{\nu_1 \delta_{k0}}{\sigma_n^- + 1} + \delta_{k2} + \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{A_{jk}^-}{\sigma_n^- - \sigma_j^+} + \frac{B_{jk}^+}{\sigma_n^- - s_j} \right) \right] \\ B_{nk}^- &= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{s_n-1} r_n^{(4)} \left[ \frac{\nu_1 \delta_{k0}}{s_n-1} + \delta_{k2} - \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{A_{jk}^-}{s_n + \sigma_j^+} + \frac{B_{jk}^+}{s_n + s_j} \right) \right] \\ (n=0, 1, \dots; k=0, 1)\end{aligned}\tag{4.6}$$

$$r_n^{(1)} = \frac{l_{21}(s)}{l'_{11}(s)} \frac{L_0^+(s) X_0^+(s)}{L_1^+(s) X_1^+(s)} \Big|_{s=\sigma_n^+}, \quad r_n^{(2)} = \frac{l_{12}(s)}{l'_{11}(s)} \frac{L_0^-(s) X_1^-(s)}{X_0^-(s) L_1^-(s)} \Big|_{s=\sigma_n^-}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

$$r_n^{(3)} = \frac{l_{11}(s)}{l'(s)} \frac{L_1^-(s)L_2^-(s)}{X_1^-(s)X_2^-(s)} \Big|_{s=s_n}, \quad r_n^{(4)} = \frac{l_{12}(s)}{l'(s)} L_1^+(s)L_2^+(s)X_1^+(s)X_2^+(s) \Big|_{s=-s_n}$$

(условия (4.6) соответствуют бесконечной алгебраической системе нормального типа).

Удовлетворяя трем условиям равновесия (4.1), получаем формулу для угла поворота штампа

$$\gamma = -\nu_* a^{-1} P F_1 [a_{00} F_1 + a_{01} (\dot{\nu}_2 - F_0)]^{-1} \quad (4.7)$$

и систему двух трансцендентных уравнений относительно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$

$$f_0 [a_{j0} F_1 + a_{j1} (\dot{\nu}_2 - F_0)] = [a_{00} F_1 + a_{01} (\dot{\nu}_2 - F_0)] f_j \quad (j = 1, 2)$$

Здесь и в (4.7) приняты обозначения

$$F_k = \sum_{j=0}^{\infty} B_{jk}^- \quad (k = 0, 1); \quad f_0 = \frac{2\mu P}{a}, \quad f_1 = \frac{2T}{a}, \quad f_2 = \frac{2\mu M}{a^2}$$

$$a_{jk} = \lambda_2 e_1 [1 + (-1)^j d_0] (-\nu_1 \delta_{k0} + \omega_{k0}^- + \chi_{k0}^+) - (-1)^j e_0 (\nu_0 \delta_{k0} + \delta_{k1} + \omega_{k0}^+)$$

$$a_{2k} = -q_0 (\frac{1}{2} \nu_0 \delta_{k0} + \delta_{k1} + \omega_{k1}^+ \quad (j, k = 0, 1),$$

$$d_0 = \frac{2\omega + \sin 2\omega + 2\mu \sin^2 \omega}{-2\omega - \sin 2\omega + 2\mu \sin^2 \omega}, \quad g_0 = \frac{X_0^-(1)}{L_0^-(1)}, \quad e_j = \frac{X_j^-(0)}{L_j^-(0)} \quad (j = 0, 1)$$

$$\omega_{km}^{\pm} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{jk}^{\pm}}{m - \sigma_j^{\pm}}, \quad \chi_{k0}^+ = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_{jk}^+}{s_j}$$

Определим особенности функций  $\tau_{r\theta}$ ,  $\sigma_{\theta}$ ,  $\partial u_r / \partial r$ ,  $\partial u_{\theta} / \partial r$  при  $r \rightarrow 0$  ( $\theta = 0$ ). Принимая во внимание (4.2), (4.3) и (4.5), получаем

$$\chi_2(b_2 r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{l_{11}(s)}{l(s)} L_1^+(s) X_1^+(s) \Omega_2(s) - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{s+1} \frac{l_{11}(s)}{l_{12}(s)} \frac{\Omega_3(s)}{L_2^+(s) X_2^+(s)} \right\} \frac{ds}{r^{s+1}}$$

По теореме Коши, учитывая (4.6), находим

$$\chi_2(r) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{l_{11}(s)\Omega_3(s)}{l'_{12}(s)X_2^+(s)L_2^+(s)} \right\}_{s=\beta_n^+} \left( \frac{r}{b_1} \right)^{-\beta_n^+ - 1} \quad (4.8)$$

где  $\beta_n^+$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) — корни функции  $l_{12}(s)$ , расположенные в области  $D^+$ . Аналогично (4.8) имеем

$$2\mu\eta_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{l(s)\Omega_3(s)}{l'_{12}(s)L_2^+(s)X_2^+(s)} \right\}_{s=\beta_n^+} \left( \frac{r}{b_1} \right)^{-\beta_n^+ - 1}$$

Таким образом, контактные напряжения и радиальные производные смещений при  $r \rightarrow 0$  ведут себя как  $r^\sigma$  ( $\sigma = -\beta_0^+ - 1$ ,  $\beta_0^+$  имеет наибольшую вещественную часть среди всех корней  $\beta_n^+$ ).

**5. Численная реализация.** Расчеты проведены при  $\nu = 0,3$ ,  $E/P = 1$  для задач 1а и 1б. Ниже для штампа с плоским основанием приведены значения  $\lambda \cdot 10^3$  при различных значениях  $\mu$  (во второй строке — взятые из [1], а в третьей — полученные в настоящей работе для задачи 1а при  $2\gamma = \pi$ )

$\mu$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\lambda \cdot 10^3$	36,9	366	695	868	942	974	989	993
$\lambda \cdot 10^3$	36,5	360	689	865	941	973	988	992

(заметим, что эти значения от величины  $E/P$  не зависят). В таблице представлены значения  $\lambda \cdot 10^3$  для некоторых значений  $\mu$  и  $\gamma_0 = \pi - \gamma$  при  $E/P = 1$  для задачи 1а. Для задачи 1б, как отмечалось

$\gamma_0$	$\mu = 0,1$	0,3	0,5	0,7	0,9
$1^\circ$	29,0	662	930	986	—
$5^\circ$	11,4	558	874	966	992
$10^\circ$	4,09	442	779	917	970
$15^\circ$	1,91	345	676	840	922

в разд. 3, величина  $\lambda$  не зависит от угла  $\gamma$  и отношения  $E/P$  и зависит только от  $\mu$  и  $\nu$ . Приведем значения  $\lambda$  и  $a$  для некоторых значений  $\mu$

$\mu$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3
$\lambda$	$3,18 \cdot 10^{-4}$	0,109	0,289	0,413	0,497	0,556	0,601
$a$	10,27	10,03	9,84	9,70	9,59	9,50	9,43

(нижняя строка соответствует случаю  $\gamma_0 = 5^\circ$ ), а также значения  $a$  при фиксированном  $\mu = 0,3$  для некоторых значений  $\gamma_0$

$\gamma_0$	$1^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$
$a$	50,28	10,03	4,98	3,28

На фиг. 4 при  $\mu = 0,3$  изображены графики контактных напряжений. Кривые 1 и  $1^\circ$  соответствуют нормальным напряжениям  $-P^{-1}\sigma_\theta(ar, 0)$  для задачи 1а при  $\gamma_0 = 5^\circ$  и  $\gamma_0 = 0$  (штамп с плоским основанием), а кривые 2 и  $2^\circ$  — касательным напряжениям  $P^{-1}\tau_{r\theta}(ar, 0)$  для тех же случаев. Для задачи 1б для случая  $\gamma_0 = 5^\circ$  графики напряжений  $-P^{-1}\sigma_\theta(r, 0)$  и  $P^{-1}\tau_{r\theta}(r, 0)$  приведены на фиг. 5, причем кривые 1 и 2 соответствуют нормальным и касательным напряжениям при  $\mu = 0,3$ , а  $1^\circ$  и  $2^\circ$  — соответствующим напряжениям при  $\mu = 0,7$ . Графики функций  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}(\mu\sigma_y)^{-1}$  при  $y = 0$  для задачи 1а при  $\gamma_0 = 0$  (плоский штамп),  $\nu = 0$ ,  $\mu = 0,3683$  (в этом случае  $\lambda = 0,3$ ) хорошо согласуется с соответствующими графиками [3], построенными на основе численного решения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л.А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413–424.
2. *Антипов Ю.А., Арутюнян Н.Х.* Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1005–1017.
3. *Spence D.A.* An eigenvalue problem for elastic contact with finite friction // Proc. Camb. Phil. Soc. 1973. V. 73. № 1. P. 249–268.
4. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
5. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
6. *Spence D.A.* The Hertz contact problem with finite friction // J. Elasticity. 1975. V. 5. N 3/4. P. 297–319.

Одесса, Москва

Поступила в редакцию  
3. III. 1992